



## *Matrizengleichungen*

## Aufgabe 1:

Schreiben Sie folgende lineare Gleichungen in Form einer Matrizen-  
gleichung. Bestimmen Sie die Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $z$

$$a) 2x - 3y = -6, \quad -x + 2y = 7$$

$$b) 3x - y = -11, \quad 2x + 3y = 11$$

$$c) y + 4x = 8, \quad -2x + y = -2$$

$$d) x + 2y + 3z = 12, \quad -x + 4y + z = 8, \quad 2x - 2y + 4z = 20$$

## Matrizengleichungen erstellen: Lösung 1

$$a) 2x - 3y = -6, \quad -x + 2y = 7, \quad x = 9, \quad y = 8$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$b) 3x - y = -11, \quad 2x + 3y = 11, \quad x = -2, \quad y = 5$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$c) y + 4x = 8, \quad -2x + y = -2, \quad x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{4}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d) x + 2y + 3z = 12, \quad -x + 4y + z = 8, \quad 2x - 2y + 4z = 20$$

$$x = -8, \quad y = -2, \quad z = 8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Eine  $n$ -reihige, quadratische Matrix heißt invertierbar (umkehrbar), wenn es eine Matrix  $A^{-1}$  gibt mit der Eigenschaft

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad \det A \neq 0$$

$E$  ist die  $n$ -reihige Einheitsmatrix, z.B. für  $n = 2$ :  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1}$  heißt die zu  $A$  inverse Matrix, Kehrmatrix, Umkehrmatrix oder die Inverse von  $A$ .

Eine Gleichung, bei der die Elemente einer unbekanntem Matrix zu bestimmen sind, heißt Matrizengleichung.

### Aufgabe 2:

Formen Sie folgende Matrizengleichungen mit Hilfe einer Umkehrmatrix so um, dass eine unbekannte Matrix  $X$  auf einer Seite der Gleichung isoliert steht. Die Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  seien invertierbar:

$$a) A \cdot X = B, \quad b) X \cdot A = B, \quad c) A \cdot X \cdot B = C$$

$$d) A \cdot X \cdot B = C \cdot D, \quad e) A \cdot B \cdot C \cdot X = D,$$

## Matrizengleichung: Lösung 2

$$a) A \cdot X = B, \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad X = A^{-1} \cdot B$$

$$b) X \cdot A = B, \quad X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}, \quad X \cdot E = B \cdot A^{-1}, \quad X = B \cdot A^{-1}$$

$$c) A \cdot X \cdot B = C, \quad A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C, \quad X \cdot B = A^{-1} \cdot C,$$

$$X \cdot B = A^{-1} \cdot C, \quad X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}, \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$d) A \cdot X \cdot B = C \cdot D, \quad X \cdot B = A^{-1} \cdot C \cdot D, \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot D \cdot B^{-1},$$

$$e) A \cdot B \cdot C \cdot X = D, \quad B \cdot C \cdot X = A^{-1} \cdot D, \quad C \cdot X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot D$$

$$X = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot D$$

$$X \cdot E = E \cdot X = X$$

## Lösung einer Matrixgleichung

- 1) Wenn man eine unbekannte Matrix  $X$  ausklammert, muss  $X$  nach dem Ausklammern auf der Seite stehen, wo sie vorher stand:

$$A \cdot X + B \cdot X = (A + B) \cdot X$$

- 2) Die Zahlen beim Ausklammern werden mit einer Einheitsmatrix multipliziert:

$$A \cdot X + 4X = (A + 4E) \cdot X$$

- 3) Man kann nicht durch eine Matrix dividieren, man kann aber mit einer inversen Matrix multiplizieren:

$$A \cdot X = B, \quad X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B, \quad X = B \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot X + B \cdot X = C, \quad (A + B) \cdot X = C, \quad X = (A + B)^{-1} C$$

$$A \cdot X + 4X = C, \quad (A + 4E) \cdot X = C, \quad X = (A + 4E)^{-1} C$$

Aufgabe 3:

Formen Sie folgende Matrixgleichungen mit Hilfe einer Umkehrmatrix so um, dass eine unbekannte Matrix  $X$  auf einer Seite der Gleichung isoliert steht. Die Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  seien invertierbar.

$$a) A \cdot X + B = 3X, \quad b) X \cdot A + 6 \cdot X = B$$

Aufgabe 4:

Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und ihre inversen Matrizen sind gegeben. Lösen Sie folgende Matrixgleichungen nach einer unbekanntem Matrix  $X$ .

$$a) A \cdot X = B, \quad b) B \cdot X = A, \quad c) A \cdot X \cdot B = C, \quad d) A \cdot B \cdot X = C$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$a) A \cdot X + B = 3 X$$

Schritt 1: Alle  $X$  auf eine Seite  $A \cdot X - 3 X = -B$

Schritt 2:  $X$  ausklammern und darauf achten, dass  $X$  rechts von den Matrizen steht

$$3 X = 3 E X, \quad (A - 3 E) X = -B$$

Schritt 3: Beide Seiten der Gleichung mit einer inversen Matrix zu  $(A - 3 E)$  von links multiplizieren

$$(A - 3 E)^{-1} (A - 3 E) X = -(A - 3 E)^{-1} B$$

$$X = -(A - 3 E)^{-1} B$$

$$b) X \cdot A + 6 \cdot X = B, \quad X \cdot A + X \cdot 6 = B, \quad X \cdot (A + 6 \cdot E) = B$$

$$X = B \cdot (A + 6 \cdot E)^{-1}$$

## Lösung einer Matrixgleichung: Lösung 4

$$a) A \cdot X = B, \quad X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$b) B \cdot X = A, \quad X = B^{-1} \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c) A \cdot X \cdot B = C, \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -33 & -21 \\ -50 & -34 \end{pmatrix}$$

$$d) A \cdot B \cdot X = C, \quad A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot X = A^{-1} \cdot C, \quad B \cdot X = A^{-1} \cdot C,$$

$$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C, \quad X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$$

$$X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -40 & -72 \\ -14 & -27 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 5:

Formen Sie folgende lineare Gleichungssysteme in entsprechende Matrixgleichungen um, und bestimmen Sie die Unbekannten  $x$  und  $y$  beim Lösen der Matrixgleichungen:

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - 2y = -8, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - 6y = 10, \\ 2x + 3y = 5, \end{cases} \quad c) \begin{cases} 5x + 2y = 5, \\ 3x + y = 4, \end{cases}$$

Aufgabe 6: Lösen Sie folgende Matrixgleichungen nach  $X$ :

$$a) AX = B, \quad b) XA = C, \quad c) AX + 2X = D$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Lösen Sie folgende Matrixgleichungen nach  $X$ :

$$a) ABX - 2X = 2C, \quad b) AX + BC = A - 2X$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

## Lösung 5a:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - 2y = -8, \end{cases} \quad A \vec{X} = \vec{C}: \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{C}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -7, \quad A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{C} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## Lösung 5b:

$$\begin{cases} x - 6y = 10, \\ 2x + 3y = 5, \end{cases} \quad A \vec{X} = \vec{C}: \quad \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{C} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## Lösung 5c:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 5, \\ 3x + y = 4, \end{cases} \quad A \vec{X} = \vec{C}: \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

## Lösung 6:

$$a) AX = B, \quad X = A^{-1}B$$

$$b) XA = C, \quad X = CA^{-1}$$

$$c) AX + 2X = D, \quad (A + 2E)X = D, \quad X = (A + 2E)^{-1}D$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist  $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

## Lösung 7:

$$a) ABX - 2X = 2C, \quad (AB - 2E)X = 2C,$$

$$X = (AB - 2E)^{-1}2C = 2(AB - 2E)^{-1}C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) AX + BC = A - 2X, \quad (A + 2E)X = A - BC,$$

$$X = (A + 2E)^{-1}(A - BC) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 21 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 67 & -23 \end{pmatrix}$$

Als ein *Kryptogramm* bezeichnet man einen Geheimtext, also einen Text, der nach einem geheimen Code geschrieben wird. Das griechische Wort *kryptos* bedeutet *verborgen*, das griechische Wort *gramma* bedeutet *Schreiben*. Im Folgenden wird eine Methode beschrieben, wie man mit Hilfe von Matrizen Texte kodieren und dekodieren, d.h. verschlüsseln und wieder lesen, kann.

Jedem Buchstaben wird entsprechend (2.115) eine Zahl zugeordnet, eine Null steht für eine Leerstelle zwischen den Wörtern.

$A = 1$	$E = 5$	$I = 9$	$M = 13$	$Q = 17$	$U = 21$	$Y = 25$
$B = 2$	$F = 6$	$J = 10$	$N = 14$	$R = 18$	$V = 22$	$Z = 26$
$C = 3$	$G = 7$	$K = 11$	$O = 15$	$S = 19$	$W = 23$	$\_ = 0$
$D = 4$	$H = 8$	$L = 12$	$P = 16$	$T = 20$	$X = 24$	(2.115)

Aufgabe 8: Kodieren Sie mit Hilfe der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  das Wort: *abbilden*.

Lösung 8:

$$\text{abbilden} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & 14 \end{pmatrix}, AM = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 28 & 24 \\ 3 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$