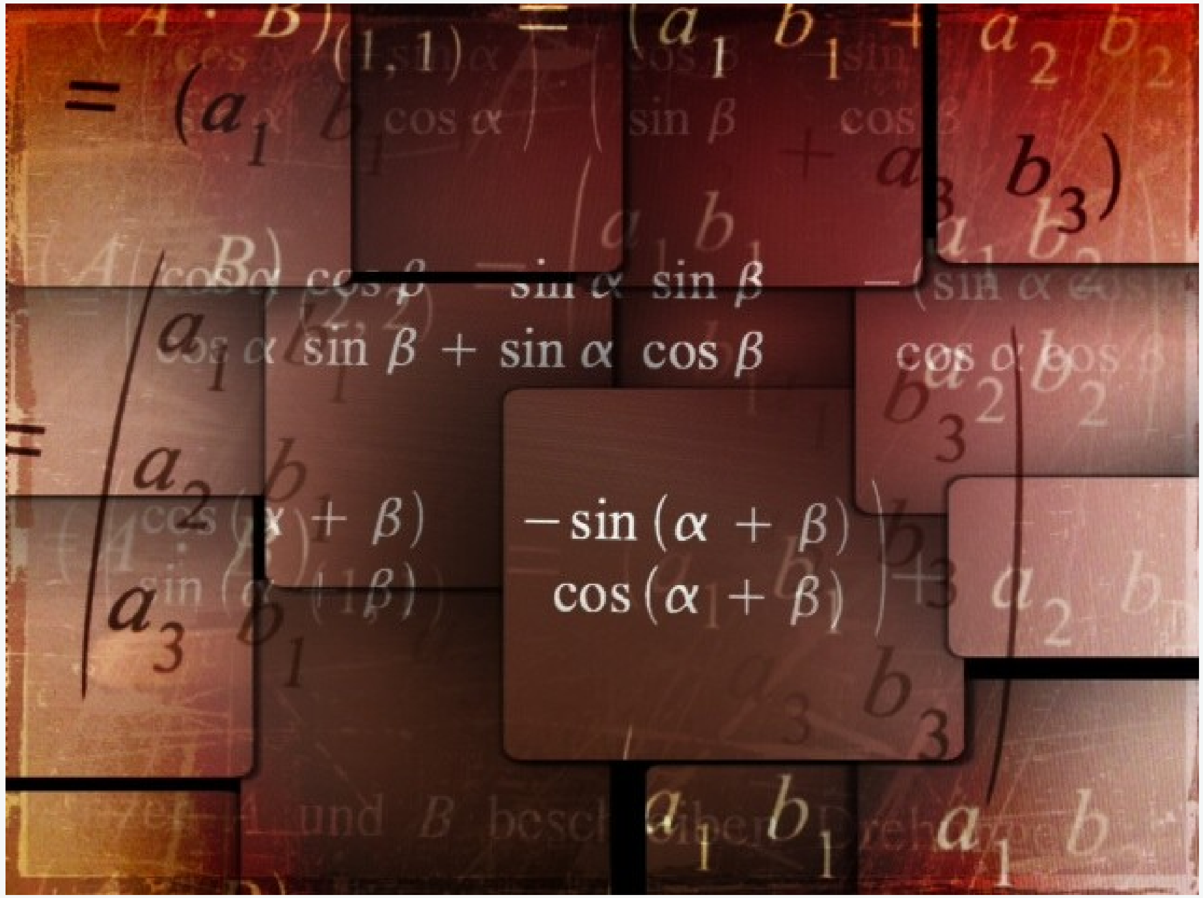
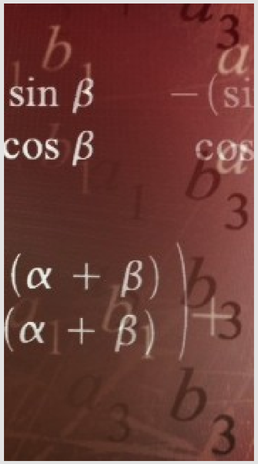


Spezielle Matrizen

Spezielle Matrizen: Aufgabe 1



Erklären Sie die Bedeutung folgender Matrizen und bestimmen Sie ihre Determinanten:

$$a)\quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\quad M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen: Lösung 1a

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ordnet jedem Vektor eines zweidimensionalen Raumes einen Vektor zu, dessen erste Koordinate null ist und dessen zweite Koordinate unverändert ist :

$$P_1 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^2$$

Ist $\boldsymbol{r}$ ein Vektor des kartesischen x,y-Koordinatensystems, so kann man diese Gleichung in folgender Form darstellen:

$$P_1 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Die Matrix projiziert jeden Vektor der x,y-Ebene auf die y-Achse.

$$\det P_1 = 0$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ordnet jedem Vektor eines zweidimensionalen Raumes einen Vektor zu mit unveränderter ersten Koordinate und mit der zweiten Koordinate gleich null:

$$P_2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^2$$

oder im x,y-Koordinatensystem:

$$P_2 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix projiziert jeden Vektor der x,y-Ebene auf die x-Achse.

$$\det P_2 = 0$$

a) Die Matrix beschreibt die Spiegelung an der x-Achse:

$$S_x \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix beschreibt die Spiegelung an der y-Achse:

$$S_y \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

c) Die Matrix beschreibt die Spiegelung am Koordinatenursprung:

$$S_O \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ordnet jedem Vektor eines dreidimensionalen Raumes einen Vektor mit unveränderter dritter Koordinate zu. Die anderen Koordinaten werden null :

$$M_1 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^3$$

oder im *x,y,z*-Koordinatensystem:

$$M_1 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Die Matrix projiziert jeden Vektor des *3*-Raumes auf die *z*-Achse.

$$\det M_1 = 0$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ordnet jedem Vektor eines dreidimensionalen Raumes seine Projektion auf die *x,y*-Ebene zu

$$M_2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^3$$

$$\det M_2 = 0$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ordnet jedem Vektor eines dreidimensionalen Raumes seine Projektion auf die *x,z*-Ebene zu

$$M_3 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^3$$

$$\det M_3 = 0$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix beschreibt die Drehung eines *3D*-Vektors um einen Winkel θ in der x,y-Ebene

$$M_1 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot u_x - \sin\theta \cdot u_y \\ \sin\theta \cdot u_x + \cos\theta \cdot u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$\det M_1 = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Diese Matrix beschreibt die Drehung eines *3D*-Vektors um einen Winkel θ in der *y,z*-Ebene

$$M_2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ \cos\theta \cdot u_y - \sin\theta \cdot u_z \\ \sin\theta \cdot u_y + \cos\theta \cdot u_z \end{pmatrix}$$

$$\det M_2 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$