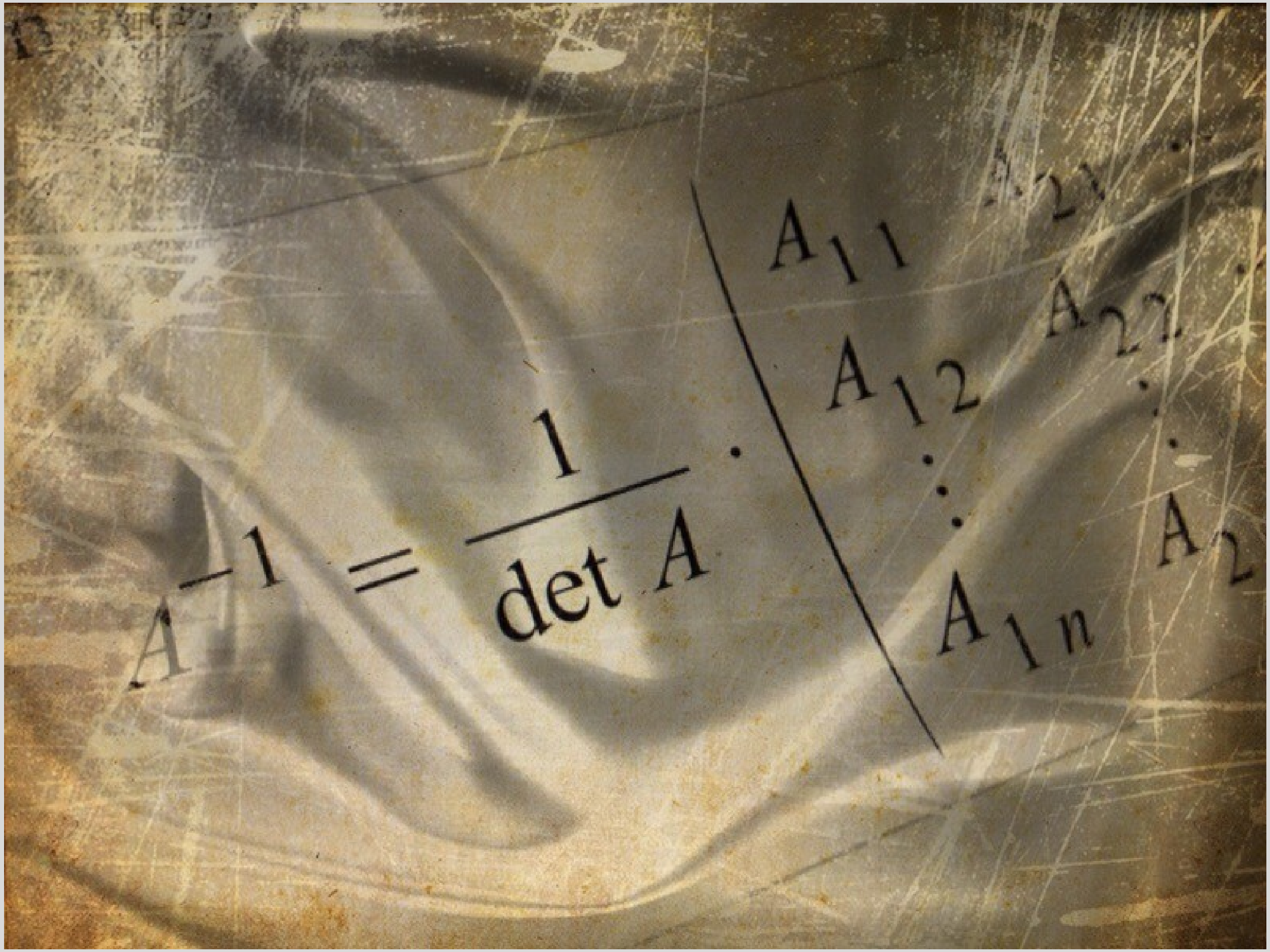


*Inverse Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Um die inverse der Matrix $A$ mit Gauß-Jordan-Algorithmus zu bestimmen, wird eine Folge von elementaren Zeilenoperationen durchgeführt. Aus der Matrix $A$ und der Einheitsmatrix $E$ wird eine sog. Blockmatrix $(A \mid E)$ gebildet

$$\begin{array}{r} 1\,\mathrm{Z} \to \\ 2\,\mathrm{Z} \to \\ 3\,\mathrm{Z} \to \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die linke Seite der Blockmatrix, die Matrix $A$, wird durch eine Folge von elementaren Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix umgeformt.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array}\right)$$

1) Erzeugung der Nullen der 1. Spalte: für die Null der 2. Zeile addieren wir die 1. und die 2. Zeile, die Null der 3. Zeile erhalten wir durch Abziehen der 1. von der 3. Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2) 2. und 3. Zeilen werden vertauscht (für die 1 beim Element 2,2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

3) Von der 3. Zeile wird das 3-fache der 2. Zeile abgezogen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

4) Die 3. Zeile wird durch 5 geteilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 1/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

5) Zur 2. Zeile wird die 3. Zeile addiert, und von der 1. Zeile wird das 2-fache der 3. Zeile abgezogen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & -2/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 1/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

# Inverse Matrix: Allgemeine Formel

Zu jeder regulären *(n, n)*-Matrix gibt es genau eine inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_{ik}$ ist das Algebraische Komplement von $a_{ik}$ in $A$:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot U_{ik}$$

Dabei ist $U_{ik}$ die Unterdeterminante $(n-1)$-ter Ordnung.

Die Verwendung von Determinanten eröffnet eine weitere Möglichkeit, für eine gebene Matrix die zugehörige inverse Matrix zu berechnen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\, U_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\, U_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\, U_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\, U_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\, U_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\, U_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\, U_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\, U_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\, U_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

In diesem Beispiel wird die Inverse der Matrix $A$ bestimmt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\, U_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\, U_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\, U_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = -37$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\, U_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{13} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\, U_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\, U_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\, U_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\, U_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\, U_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 17$$

$$\det A = 10, \qquad A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 19 & -37 \\ 0 & -2 & 6 \\ 5 & -9 & 17 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die inverse Matrix folgender Matrizen:

Aufgabe 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 1, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det B = 1, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det C = -6, \qquad C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \det D = a\,b\,c\,, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a_{33}} \end{pmatrix}$$

Hier kann man die Form der inversen Matrix gut verstehen. Bestimmt man, z.B., die inverse Matrix mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus, so wird jede Zeile der Matrix $(A \mid E)$ durch das entsprechende Diagonalelement dividiert.

Noch direkter sieht man natürlich, dass das Matrixprodukt der beiden obigen Matrizen die Einheitsmatrix ergibt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 6, \qquad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ -14 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det B = 3, \qquad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det C = 2, \qquad C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det D = 0 \qquad (1Z = 2Z)$$

Die Inverse der Matrix $D$ existiert nicht, die Zeilen sind nicht linear unabhängig, $\det D = 0$.

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det F = 2, \qquad F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det G = 32, \qquad G^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Für welche reelle $a$ ist Matrix $M$ singulär?

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & a \end{pmatrix}, \qquad b)\ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ -1 & a & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c)\ M = \begin{pmatrix} a & 0 & -2a \\ 0 & -a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Bestimmen Sie die inverse Matrix folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & a \end{pmatrix}, \qquad \det M = 2a + 22, \qquad \det M \,\big|_{a=-11} = 0$$

$$\det M = 0: \quad 2(a + 11) = 0, \qquad a = -11$$

Die Matrix $M$ singulär für $a$ = -11.

$$b)\ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ -1 & a & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det M = -4a(a-2), \qquad \det M = 0:$$

$$\det M = 0: \quad a(a-2) = 0, \qquad a_1 = 0, \quad a_2 = 2$$

Die Matrix $M$ singulär für $a = 0$ und $a = 2$.

$$c)\ M = \begin{pmatrix} a & 0 & -2a \\ 0 & -a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad \det M = a(-a^2 + 2a - 1) = -a(a-1)^2$$

$$\det M = 0: \quad -a(a-1)^2 = 0, \qquad a_1 = 0, \quad a_2 = 1$$

Die Matrix $M$ singulär für $a = 0$ und $a = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 8, \qquad A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -7 \\ -3 & -2 & 12 & -21 \\ 4 & 0 & -8 & 12 \\ -3 & -2 & 12 & -13 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det B = -4, \qquad B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -2 & 6 \\ -2 & 16 & 3 & -7 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -20 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$