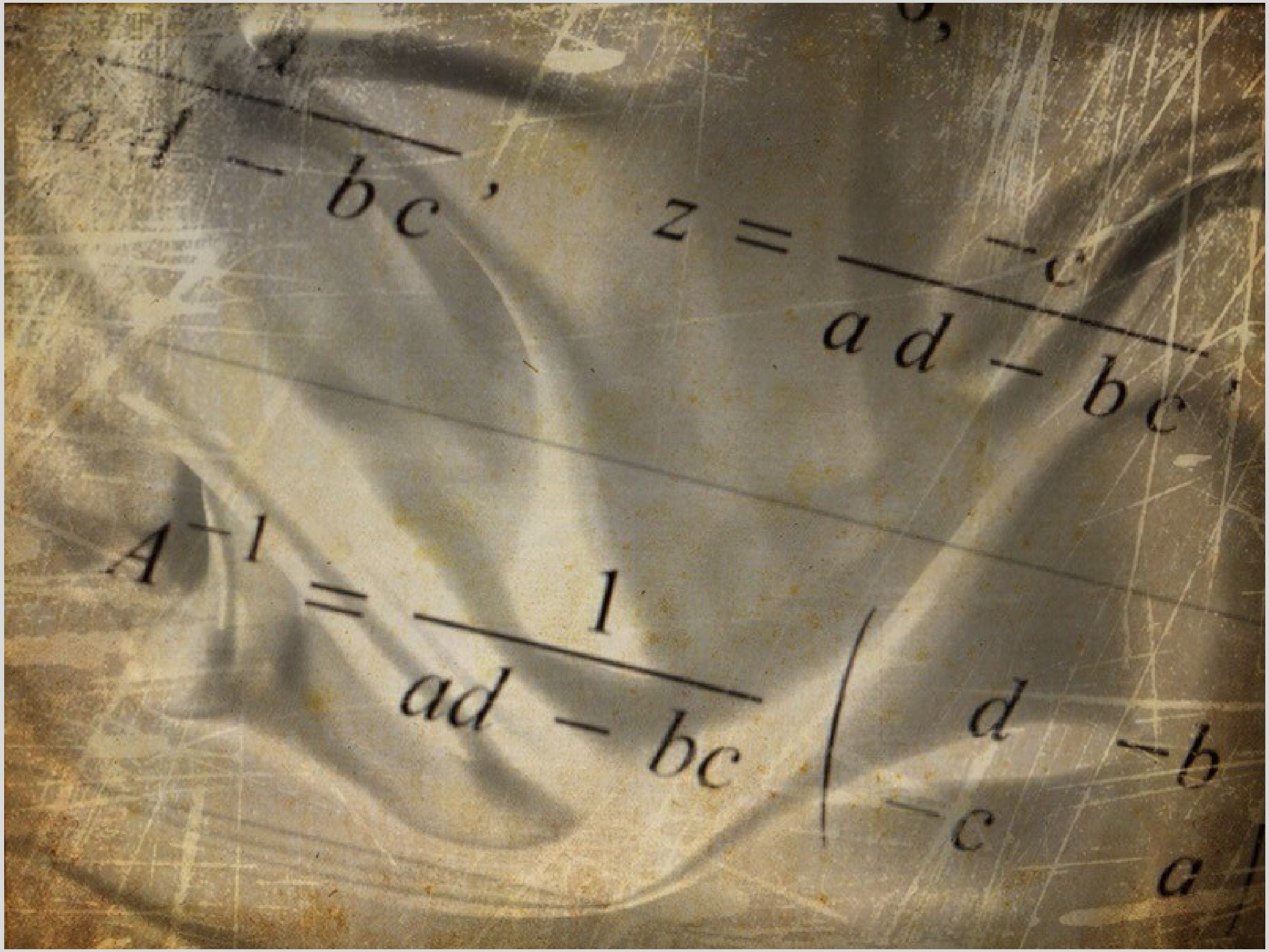

Inverse Matrix

Eine n-reihige, quadratische Matrix heißt regulär, wenn ihre Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Anderenfalls heißt sie singulär.

Eine n-reihige, quadratische Matrix heißt invertierbar (umkehrbar), wenn es eine Matrix A^{-1} gibt mit der Eigenschaft

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$$

E ist die n-reihige Einheitsmatrix, z.B. für $n = 2: \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A^{-1} heißt inverse Matrix zu A, oder Kehrmatrix oder Inverse von A.

$$\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \left(\det A\right) \cdot \left(\det A^{-1}\right) = \det E = 1$$

Inverse Matrizen sind beim Lösen von Matrizengleichungen und auch beim Lösen von linearen Gleichungssystemen wertvolle Hilfsmittel.

- Eine Matrix A kann nicht zwei verschiedene inverse Matrizen haben. Stellen wir uns vor, dass $B\,A = E$ und außerdem $A\,C = E$, dann ist $B = C$. Dies ergibt sich aus:

$$B(A\,C) = (B\,A)C \quad \Rightarrow \quad B\,E = E\,C\,, \qquad B = C$$

Das heißt, dass die inverse Matrix von A, die man in der Gleichung

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

mit der Matrix A von links multipliziert und die inverse Matrix, die man von rechts multipliziert, identisch sind.

- Ist die Matrix A invertierbar, dann ist die einzige Lösung der Gleichung $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1} A\,\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{c}$$

Wichtig!

Nehmen wir an, ein Vektor $\boldsymbol{x}$ sei nicht der Nullvektor und er erfülle die Gleichung $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Dann ist die Matrix A nicht invertierbar. Angenommen es gibt eine Inverse A^{-1}, dann ist

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

Im Gegensatz zur Annahme, dass $\boldsymbol{x}$ kein Nullvektor ist. Widerspruch!

- Die Inverse einer transponierten Matrix ist gleich der Transponierten einer Inversen:

$$\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T},$$

weil

$$\left(A \cdot A^{-1}\right) = \left(A \cdot A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{-1}\right)^{T} A^{T} = E$$

- Sind zwei Matrizen gleichen Typs invertiertbar, dann hat auch das Produkt von A und B eine inverse Matrix:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B\ B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1}\ A) \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E$$

Die Regel für die inverse Matrix eines Produkts entspricht einer Grundregel der Mathematik: Inverse treten in umgekehrter Reihenfolge auf. Dies entspricht auch der Alltagserfahrung: wenn ich z.B. zu meinem Auto gehe und einsteige, so mache ich das rückgängig, indem ich zuerst aussteige und dann weggehe.

Die Regel gilt auch für drei und mehr Matrizen:

$$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- Multipliziert man die inverse Matrix mit einem Skalar $c \neq 0$, gilt:

$$(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}, \qquad c \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Die inverse Matrix einer diagonalen Matrix, deren Elemente nicht null sind, ist auch diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} \end{pmatrix}, \qquad A\,A^{-1} = E$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen, ob die Inverse von A existiert $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Wir bestimmen eine *(2, 2)*-Matrix, so dass $A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = E : \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation führt zu vier Gleichungen:

$$\begin{cases} a\,x + b\,z = 1, \\ c\,x + d\,z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a\,y + b\,v = 0 \\ c\,y + d\,v = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{d}{a\,d - b\,c}, \quad z = \frac{-c}{a\,d - b\,c}, \quad y = \frac{-b}{a\,d - b\,c}, \quad v = \frac{a}{a\,d - b\,c}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Regel: Diagonalelemente werden vertauscht, die Elemente der Nebendiagonale werden mit (-1) multipliziert. Die Matrix wird durch det A dividiert.

Es sei die Inverse der Matrix A gesucht $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Aus dieser Gleichung sind die entsprechenden Elemente der inversen Matrix zu finden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\, x_{11} + 0 \cdot x_{21} = 1 \\ 2\, x_{12} + 0 \cdot x_{22} = 0 \\ 4\, x_{11} + 2 \cdot x_{21} = 0 \\ 4\, x_{12} + 2 \cdot x_{22} = 1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\det A = 4, \qquad \det A^{-1} = \frac{1}{4}, \qquad \det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

Ausgehend von dem Schema $(A \mid E)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

wird mittels der drei Umformungen

1). Vertauschen zweier Zeilen

2). Multiplikation einer Zeilen mit einer von Null verschiedenen Zahl

3). Addition des Vielfachen einer Zeile zum Vielfachen einer anderen Zeile

so lange umgeformt, bis das Schema $(E \mid A^{-1})$ erzeugt ist (Beispiel folgt)

$$(A \mid E) \rightarrow (E \mid A^{-1})$$

Bestimmen Sie die Inverse von A (wenn sie existiert) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Wir schreiben die Matrix A zusammen mit der Einheitsmatrix in eine große Matrix:

$$\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Wir produzieren links unten eine Null: $-\frac{3}{2} \cdot Z_1 + Z_2$

$$-\frac{3}{2} \cdot Z_1: \quad \left(-3 \quad -\frac{3}{2} \quad \Big| \quad -\frac{3}{2} \quad 0\right)$$

$$-\frac{3}{2} \cdot Z_1 + Z_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

3. Wir produzieren eine 1 an der Stelle des Elements *22*, indem wir die zweite Zeile mit *-2* multiplizieren

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Wir wollen in der linken Hälfte der Matrix die Einheitsmatrix haben: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0$

4. Wir produzieren eine *0* an der Stelle des Elements *1,2* , indem wir die zweite Zeile von der ersten abziehen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

5. Wir dividieren die erste Zeile durch *2*:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

6. Jetzt steht die inverse Matrix in der rechten Hälfte und das bedeutet:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Dieses Ergebnis kann man mit dem anderen Ergebnis für A^{-1} vergleichen :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad a = 2, \quad b = 1, \quad c = 3, \quad d = 1$$

Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen jeweils die inverse Matrix. Zeichnen sie die Flächen, die von den Zeilenvektoren jeder Matrix und ihrer inversen Matrix aufgespannt werden.

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c)\quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad d)\quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Abbildung L1a:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{4}{7}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u}\,' \\ \vec{v}\,' \end{pmatrix}$$

$$\det A = F_{OACB} = \frac{7}{4}, \qquad \det A^{-1} = F_{OA'C'B'} = \frac{4}{7}$$

Abbildung L1b:

$$b)\quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u}\,' \\ \vec{v}\,' \end{pmatrix}$$

$$\det B = F_{OACB} = \frac{5}{4}, \qquad \det B^{-1} = F_{OA'C'B'} = \frac{4}{5}$$

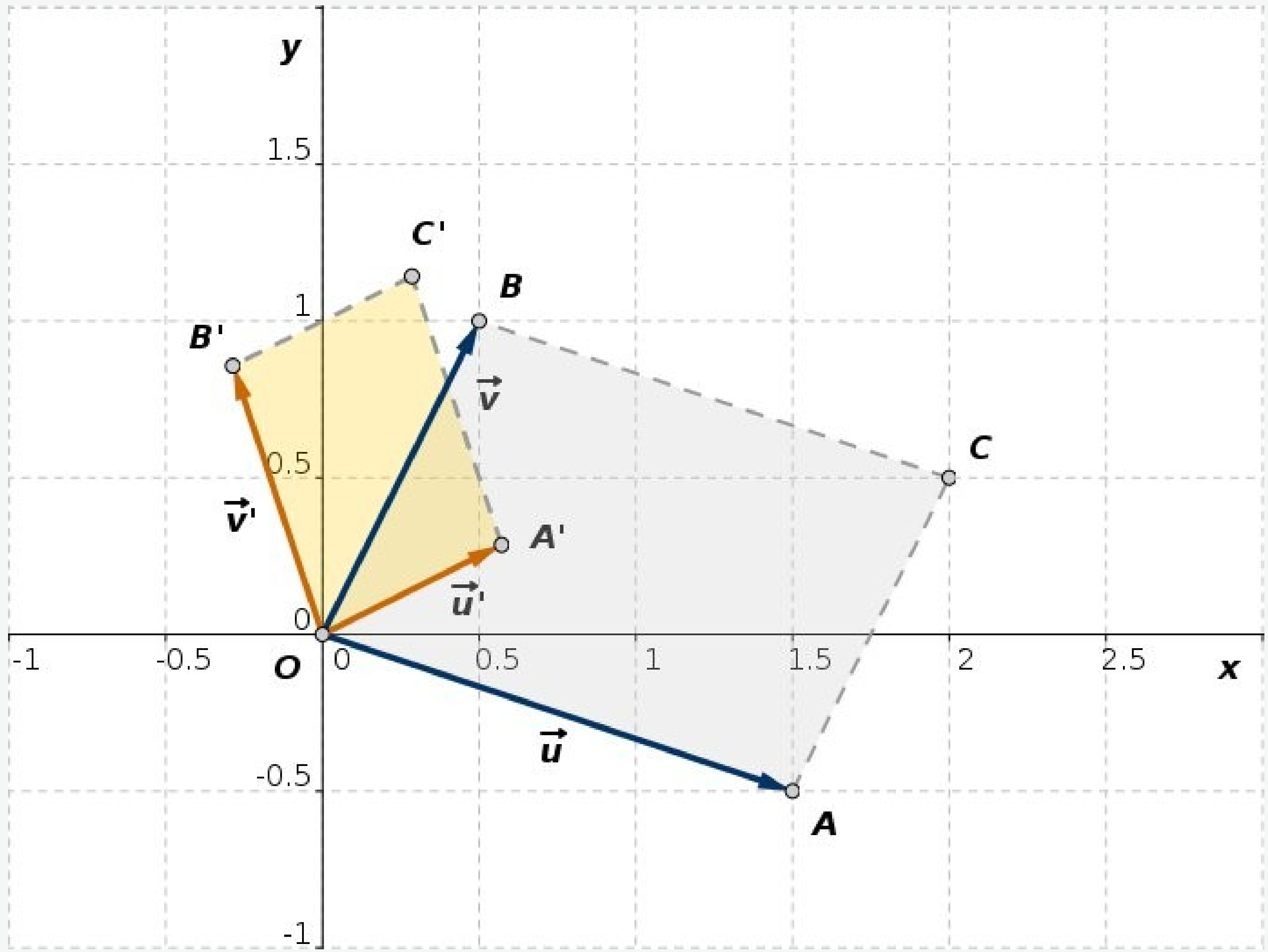

Abb. L1a: Geometrische Lösung der Aufgabe 1a. Die von den Vektoren ***u*** *und* ***v****, bzw.* ***u'*** *und* ***v'****, aufgespannte Fläche ist gleich der Determinante einer Matrix, deren Zeilen oder Spalten die Komponenten der Vektoren* ***u*** *und* ***v****, bzw.* ***u'*** *und* ***v'****, sind*

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right), \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{2},\ 1\right), \qquad \vec{u}\,' = \frac{4}{7}\left(1,\ \frac{1}{2}\right), \quad \vec{v}\,' = \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

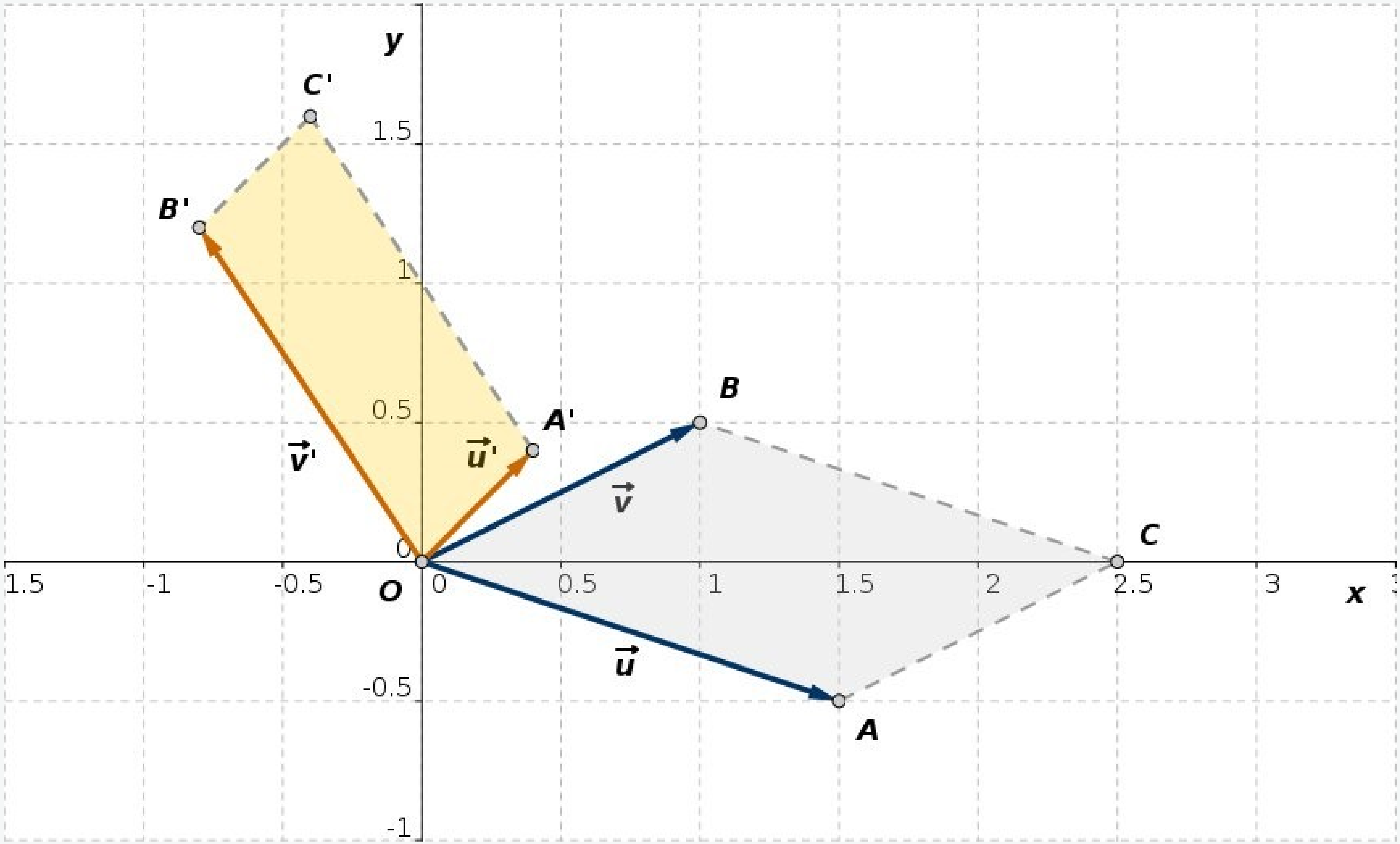

*Abb. L1b: Geometrische Lösung der Aufgabe 1a. Die von den Vektoren **u** und **v**, bzw. **u'** und **v'**, aufgespannte Fläche ist gleich der Determinante einer Matrix, deren Zeilen oder Spalten die Komponenten der Vektoren **u** und **v**, bzw. **u'** und **v'**, sind*

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right), \quad \vec{v} = \left(1,\ \frac{1}{2}\right), \qquad \vec{u}\,' = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \quad \vec{v}\,' = \frac{4}{5}\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$$

Abbildung L1c:

$$c)\quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u}\,' \\ \vec{v}\,' \end{pmatrix}$$

$$\det C = \frac{5}{4}, \qquad \det C^{-1} = \frac{4}{5}$$

Abbildung L1d:

$$d)\quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \qquad F^{-1} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u}\,' \\ \vec{v}\,' \end{pmatrix}$$

$$\det F = \frac{3}{4}, \qquad \det F^{-1} = \frac{4}{3}$$

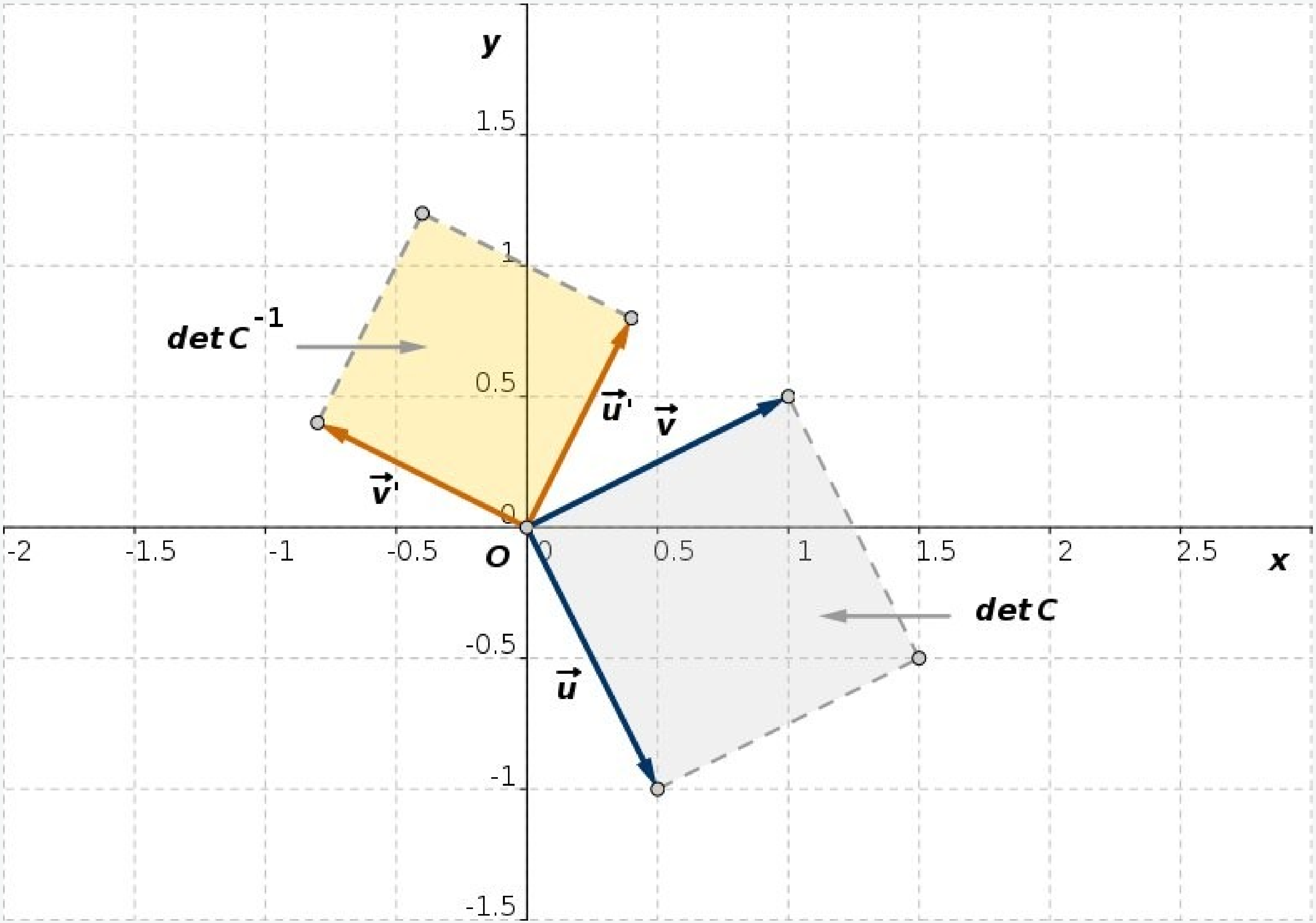

Abb. L1c: Geometrische Lösung der Aufgabe 1c

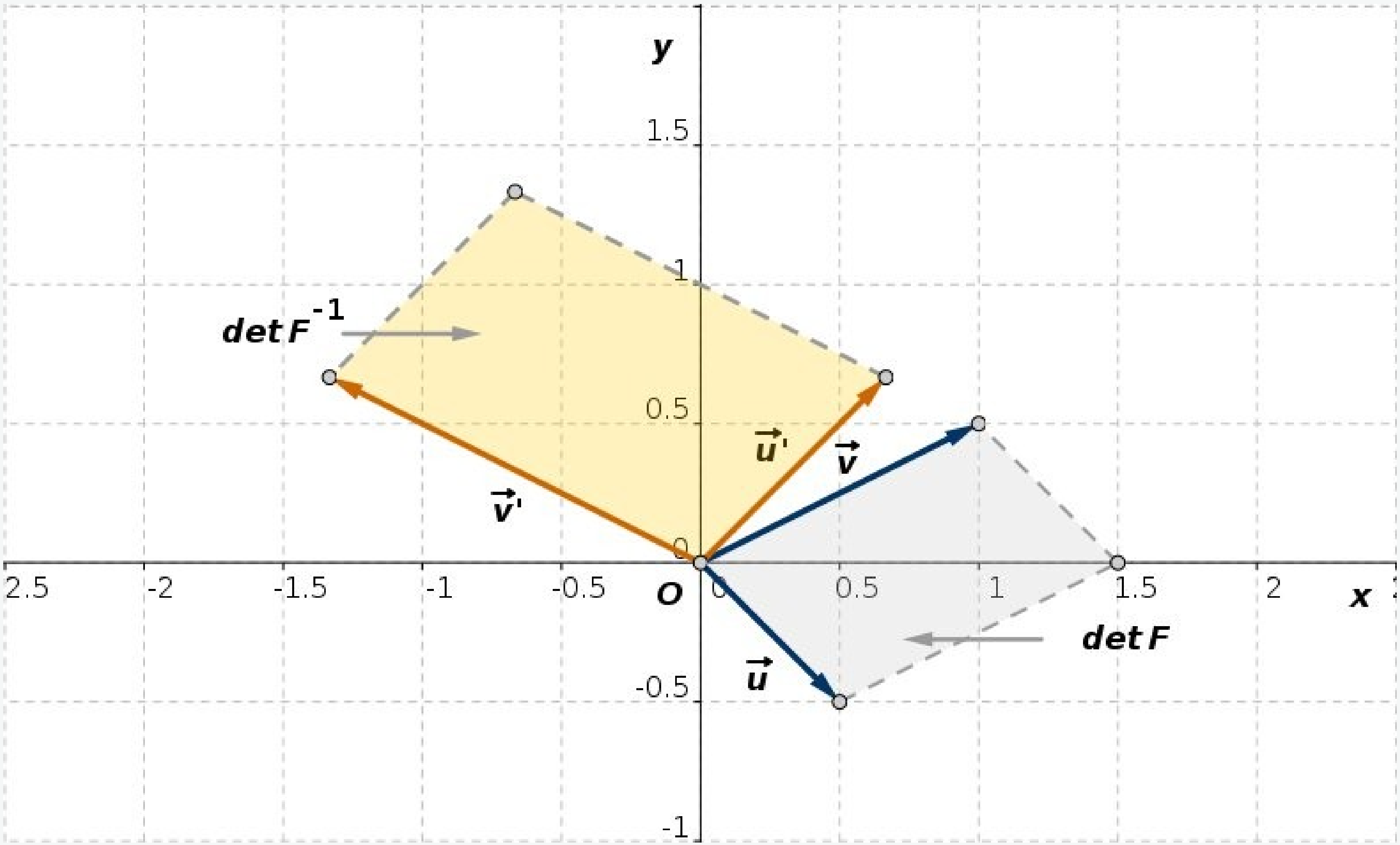

Abb. L1d: Geometrische Lösung der Aufgabe 1d

Aufgabe 2:

Welche der vier Matrizen A, B, C und D ist die Inverse der Matrix M:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Prüfen Sie am Beispiel der Matrizen A und B die folgende Eigenschaft von inversen Matrizen:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Inverse der Matrix M wird so bestimmt:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Diagonalelemente a und d werden vertauscht, die Elemente der Nebendiagonale b und c werden mit (-1) multipliziert. Die Matrix wird durch $\det M$ dividiert.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det M = 1, \quad a = 2, \quad d = 3, \quad b = 5, \quad c = 1$$

Die Inverse der Matrix M ist die Matrix A:

$$M^{-1} = A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 4, \qquad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det B = 8, \qquad B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \det(A \cdot B) = 32, \qquad (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$$