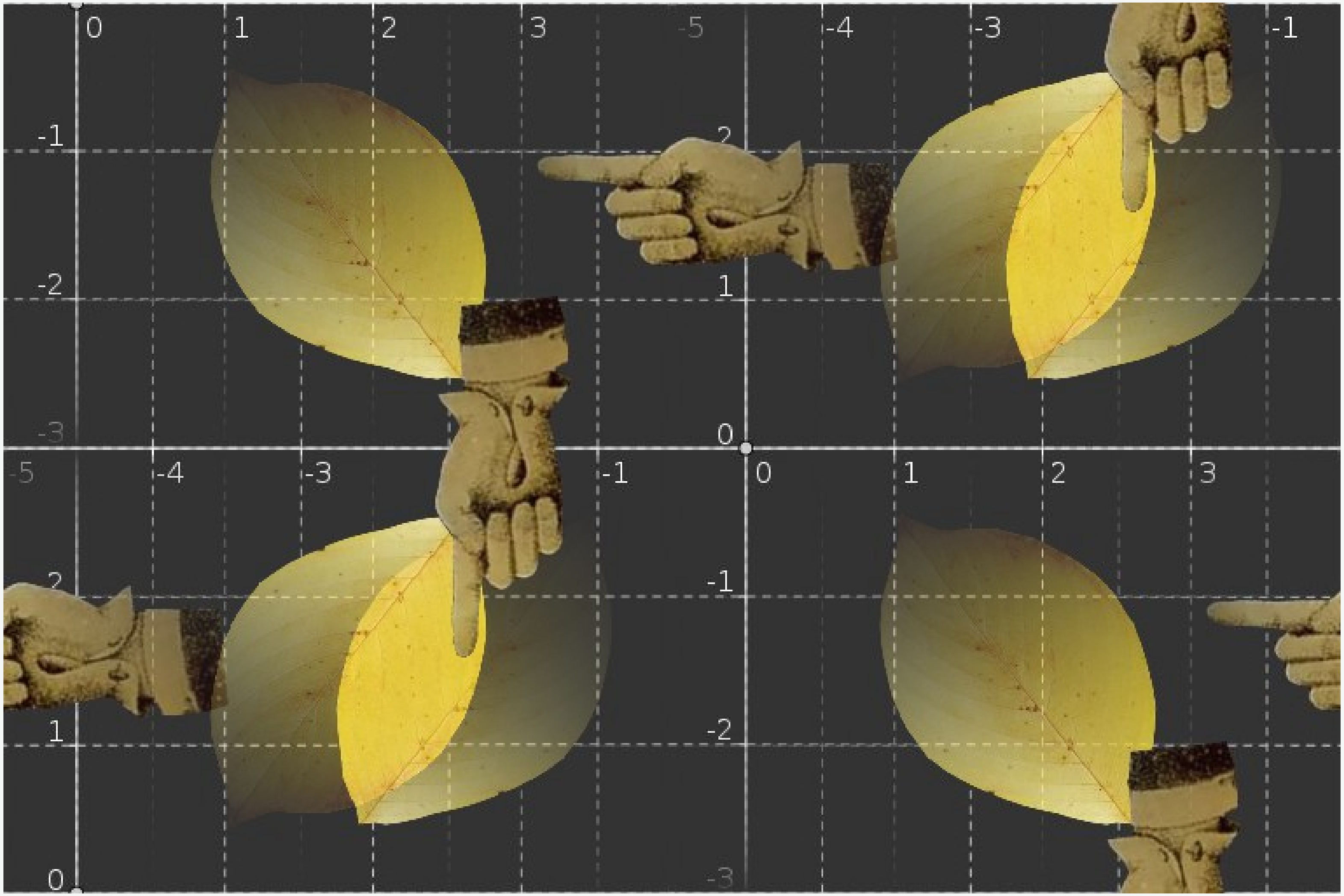
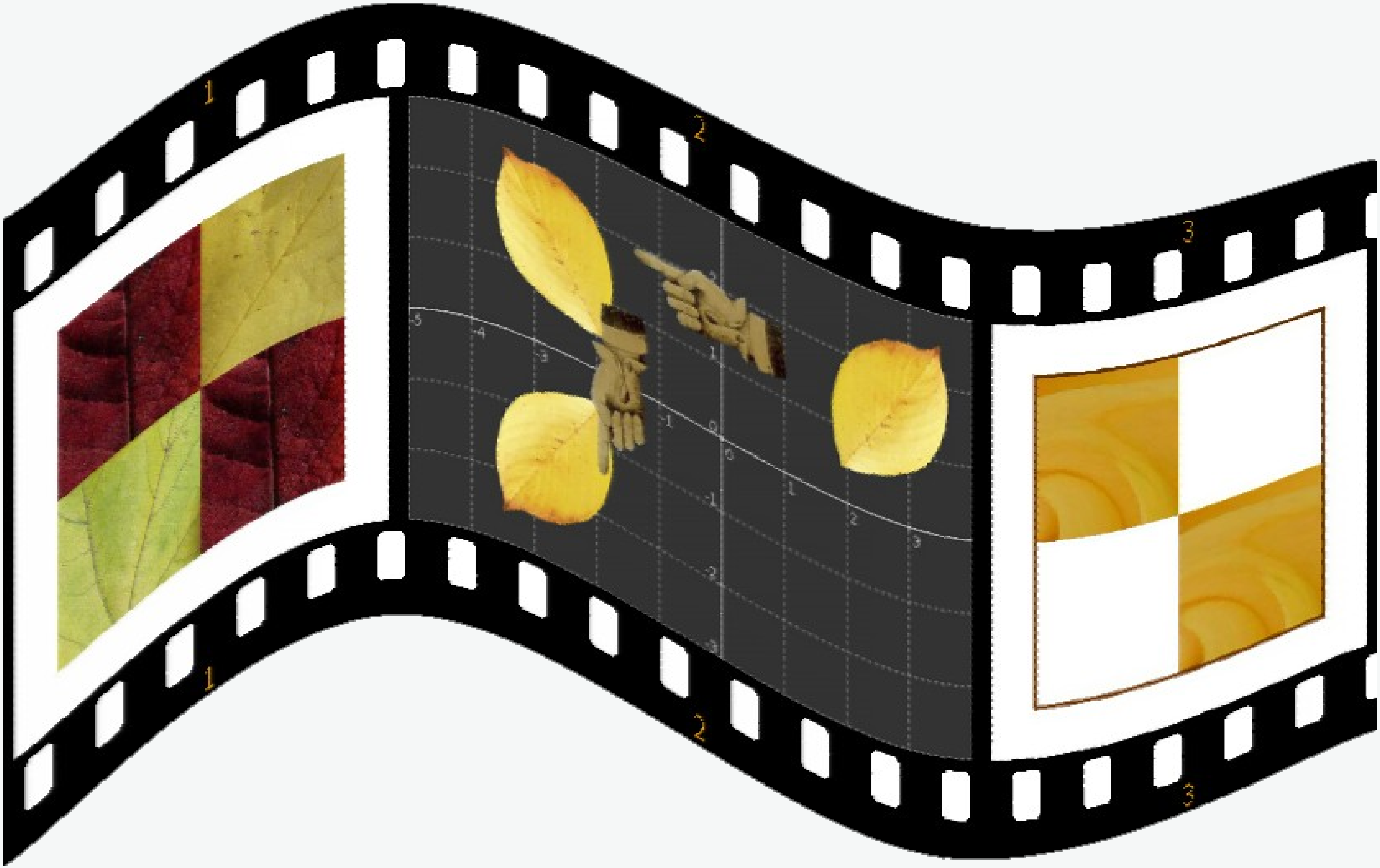


Multiplikation von Matrizen: Aufgaben



1-E3

Eine orthogonale Matrix ist in der linearen Algebra eine quadratische, reelle Matrix, deren Zeilen- und Spaltenvektoren paarweise orthonormal zueinander sind. Sie stellen Spiegelungen und Drehungen dar. Eine quadratische orthogonale Matrix erfüllt folgende Eigenschaft

$$O^T \cdot O = O \cdot O^T = E$$

Eine *2*x*2*-Matrix *D*, die die Drehungen um den Winkel θ im zweidimensionalen Raum beschreibt

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix.

$$D_\theta \cdot D_\theta^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Abb. 1: Darstellung einer orthogonalen Matrix, die die Drehung um den Winkel θ beschreibt. Diagonale Elemente sind gleich und werden durch gleiche Quadrate dargestellt. Elemente der Nebendiagonale sind unterschiedlich

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det D = 1$$

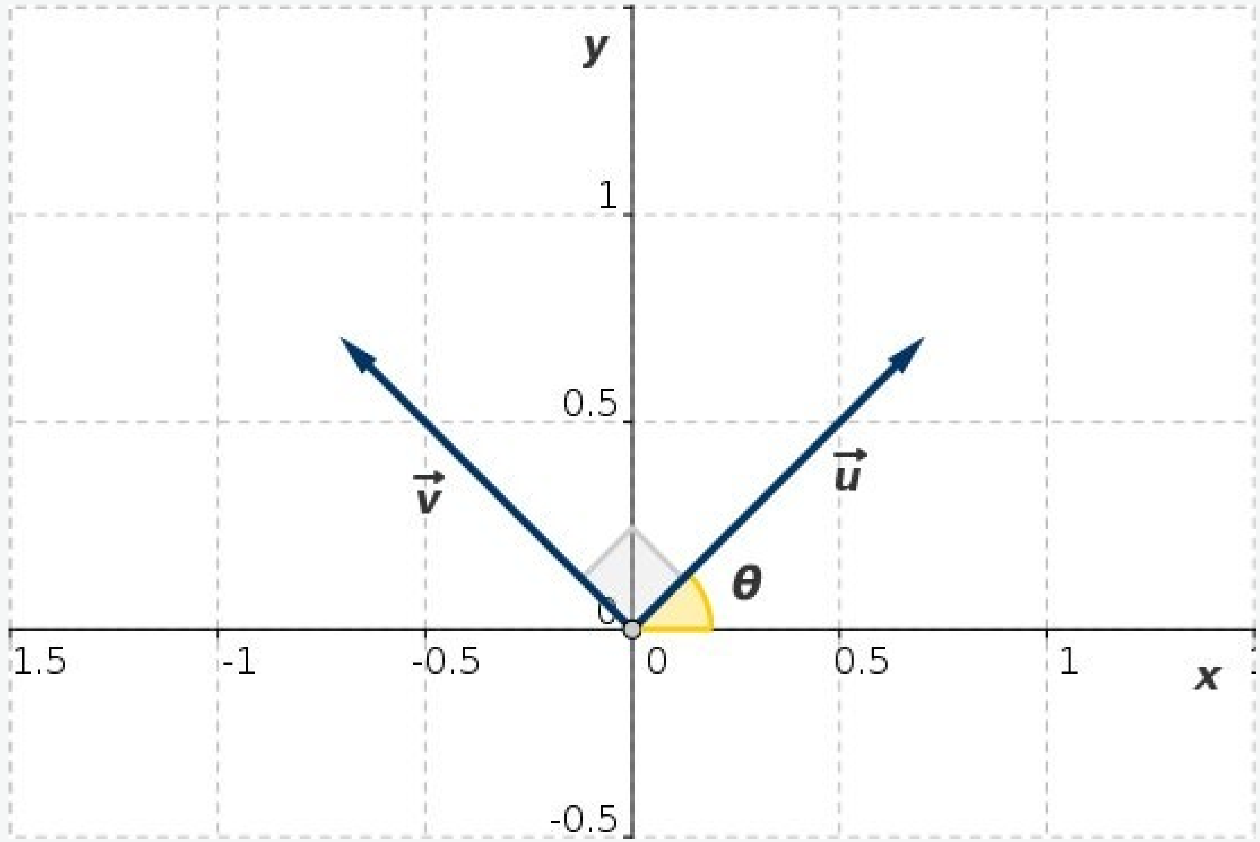


Abb. 2-1: Die Vektoren ***u*** *und* ***v*** *sind orthogonale Vektoren,* ***u • v = 0***

$$\vec{u} = (\cos\theta\,,\ \sin\theta)\,, \qquad \vec{v} = (-\sin\theta\,,\ \cos\theta)\,, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1,\ 1)$$

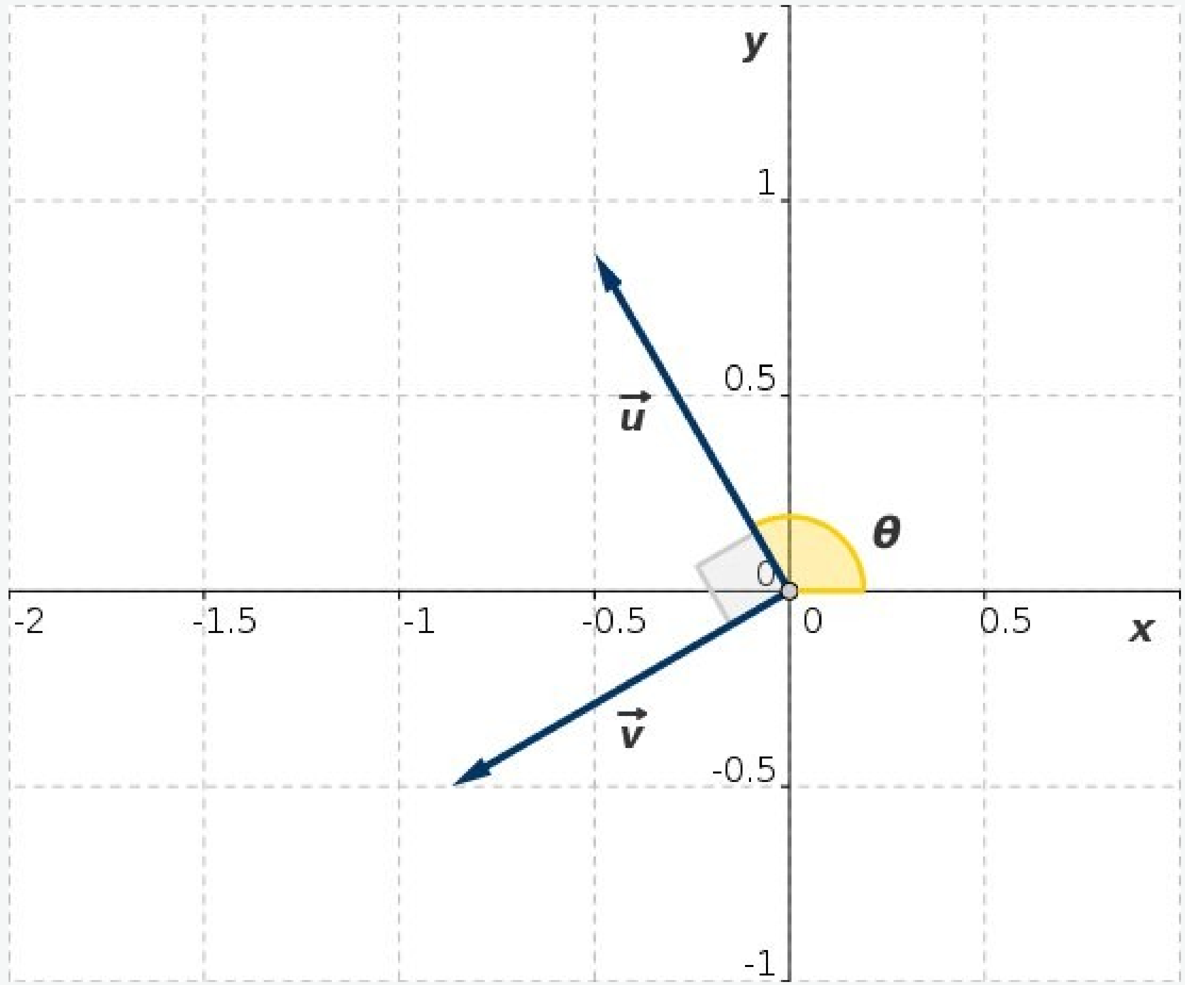


Abb. 2-2: Die Vektoren $\boldsymbol{u}$ *und* $\boldsymbol{v}$ *sind orthogonale Vektoren,* $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$$\vec{u} = (\cos\theta\,,\ \sin\theta)\,, \qquad \vec{v} = (-\sin\theta\,,\ \cos\theta)\,, \qquad \theta = \frac{2}{3}\,\pi$$

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\,(-1,\ \sqrt{3})\,, \qquad \vec{v} = \frac{1}{2}\,(-\sqrt{3}\,,\ -1)$$

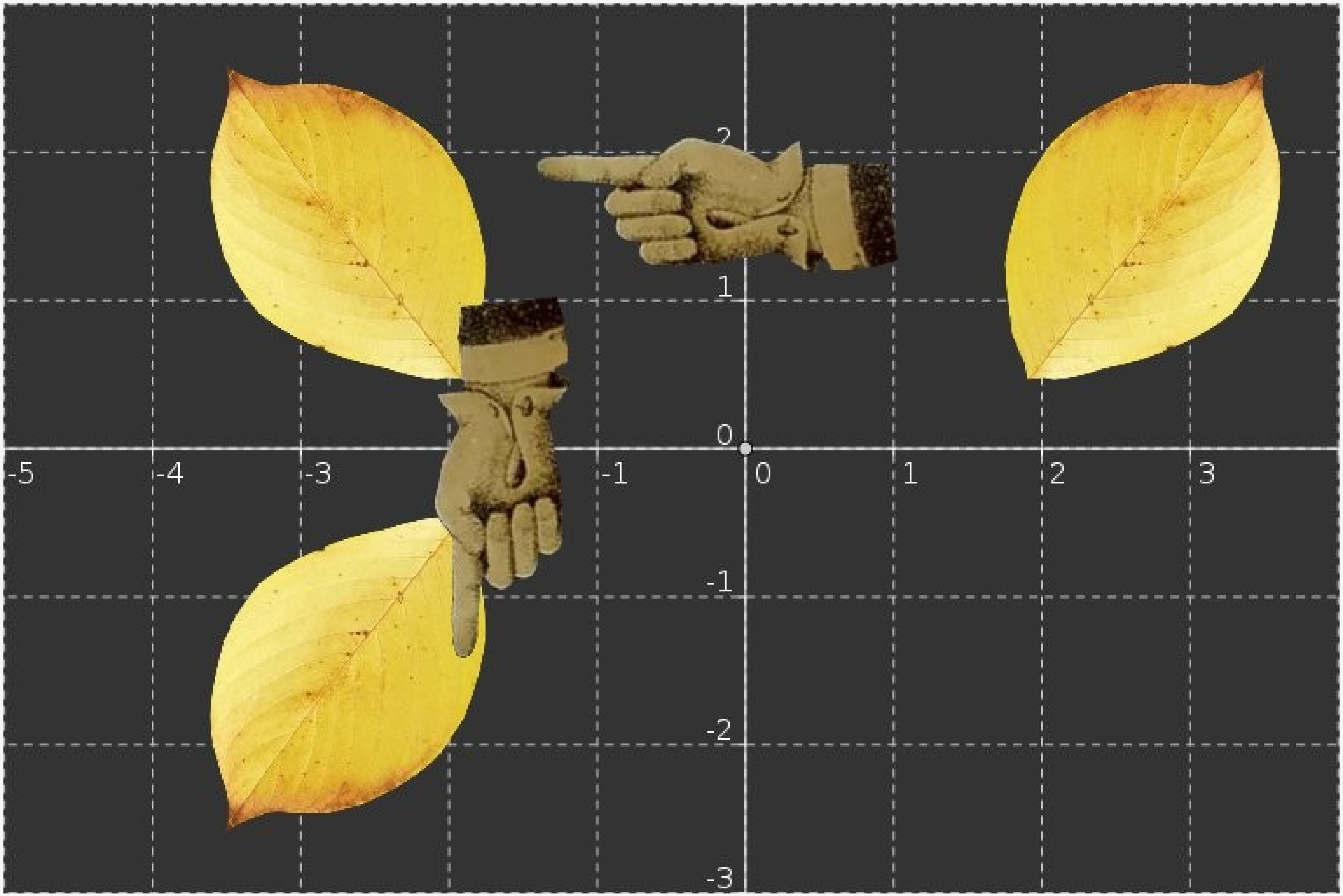


Abb. 3-1: Aufeinander folgende Spiegelungen an x- und y-Achse

Beschreiben Sie mit einer Matrix die nacheinander ausgeführten Spiegelungen an den x- und y-Achsen.

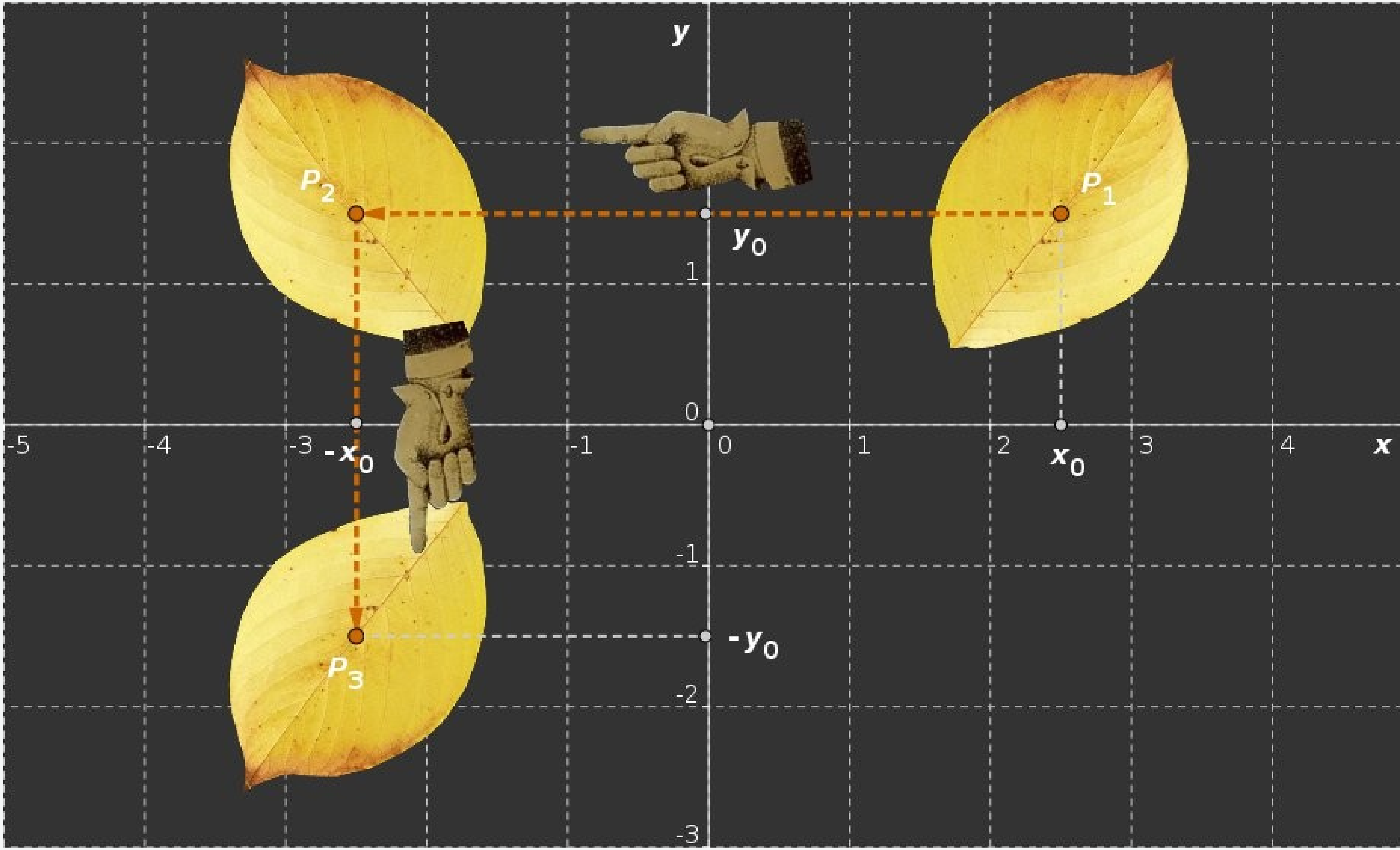


Abb. 3-2: Aufeinander folgende Spiegelungen an y- und x-Achse

$$T = S_x \cdot S_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

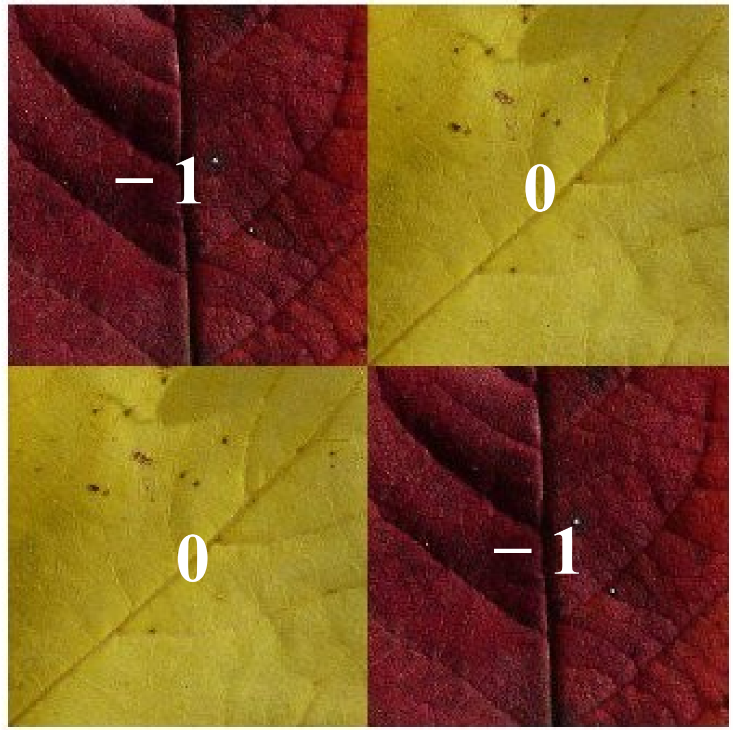


Abb. 3-3: Darstellung einer Matrix, die zwei aufeinander folgenden Spiegelungen an y- und x-Achse entspricht

$$T = S_x \cdot S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D_T = a_{11} \cdot a_{22} = 1$$

$$Sp\, T = a_{11} + a_{22} = -2$$

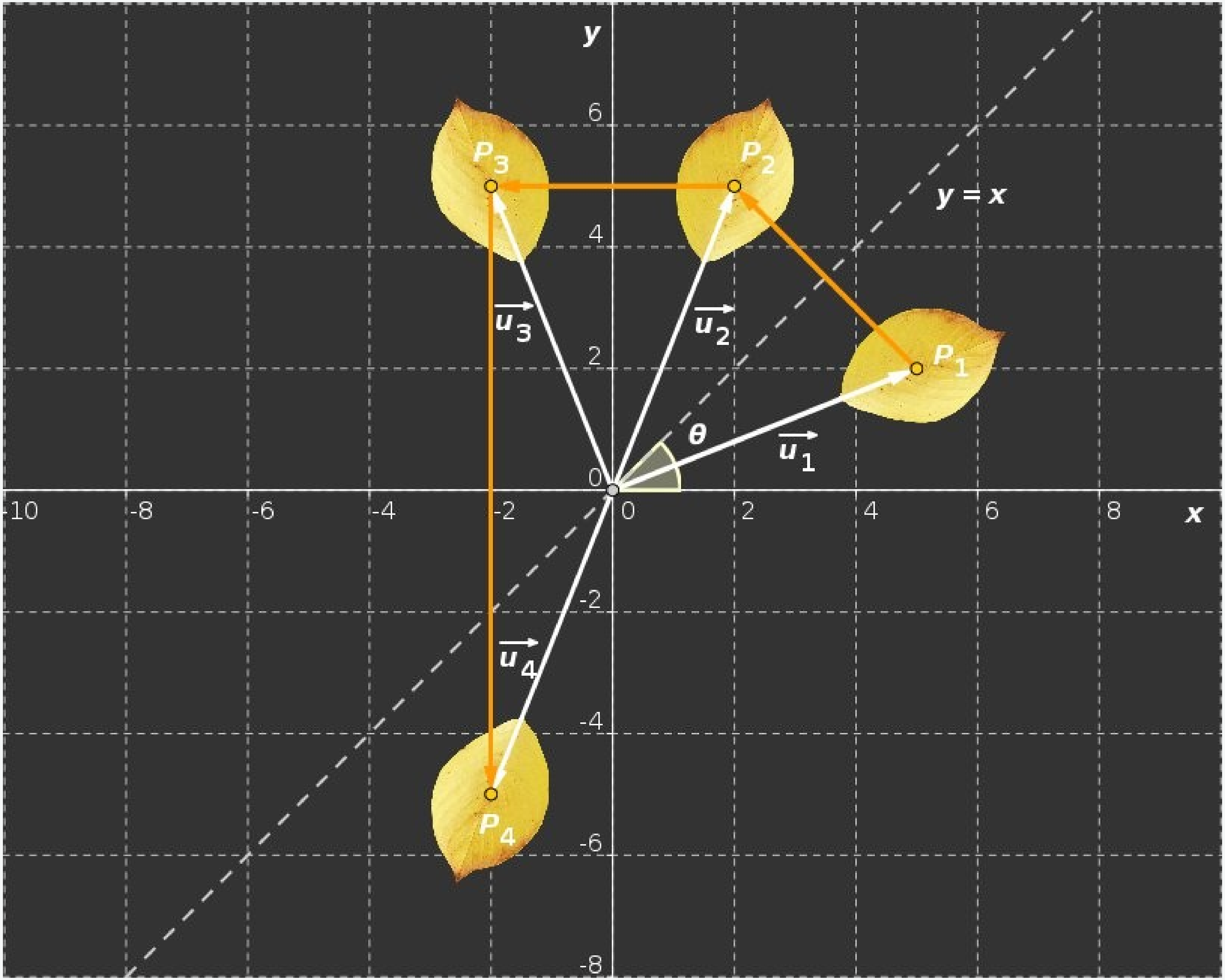


Abb. 4-1: Die Transformation der Aufgabe 2a, θ = 45°

Position 1: Gegeben ist der Punkt (x, y).

$$\vec{u}_1 = \vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Position 2: Dieser Punkt wird an der Ursprungsgeraden $y = x$ gespiegelt.

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{OP}_2 = D_\theta \, \vec{u}_1$$

Position 3: Der Punkt wird dann an der y-Achse gespiegelt.

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = S_y \, \vec{u}_2 = S_y \, D_\theta \, \vec{u}_1$$

Position 4: Der Punkt wird dann an der x-Achse gespiegelt.

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_4 = S_x \, \vec{u}_3 = S_x \, S_y \, \vec{u}_2 = S_x \, S_y \, D_\theta \, \vec{u}_1$$

Matrizenmultiplikation: Aufgabe 2a

$$T = S_x \, S_y \, D_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$T = S_x \, S_y \, D_{\theta = \pi/4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \, \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

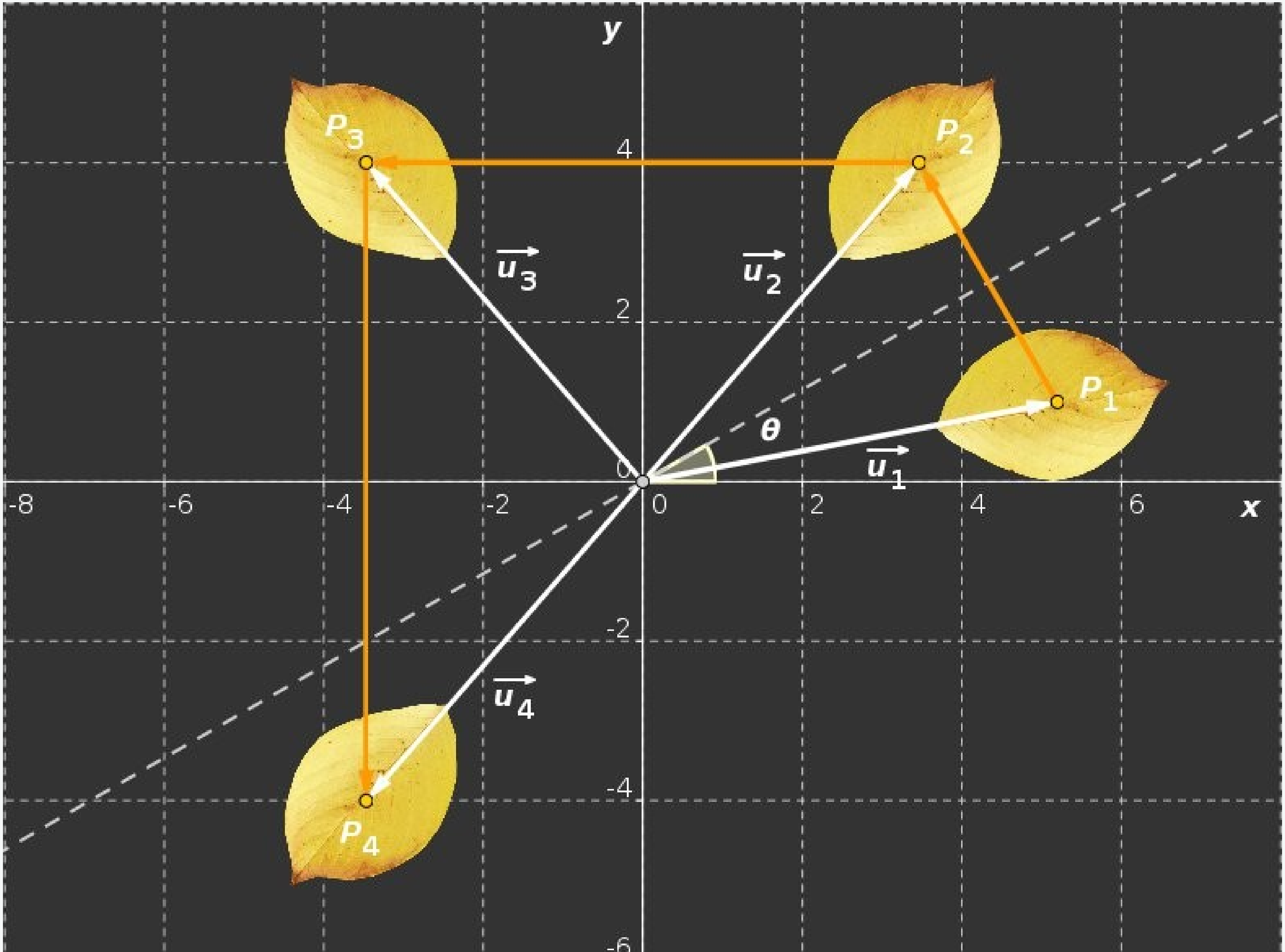


Abb. 4-2: Transformation der Aufgabe 2b, $\theta = 30°$

Position 1: Gegeben ist der Punkt *(x, y)*.

$$\vec{u}_1 = \vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Position 2: Dieser Punkt wird an der Ursprungsgeraden $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$ gespiegelt.

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}, \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{OP}_2 = D_\theta \, \vec{u}_1$$

Position 3: Der Punkt wird dann an der *y*-Achse gespiegelt.

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = S_y \, \vec{u}_2 = S_y \, D_\theta \, \vec{u}_1$$

Position 4: Der Punkt wird dann an der *x*-Achse gespiegelt.

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_4 = S_x \, \vec{u}_3 = S_x \, S_y \, \vec{u}_2 = S_x \, S_y \, D_\theta \, \vec{u}_1$$

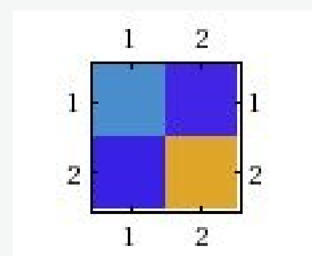
Matrizenmultiplikation: Aufgabe 2b

$$T = S_x \; S_y \; D_{\theta = \pi/6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & \sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & -\cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Darstellung der Matrix:



T ist eine symmetrische, orthogonale Matrix.

$\det T = -1, \qquad Sp\; T = 0$