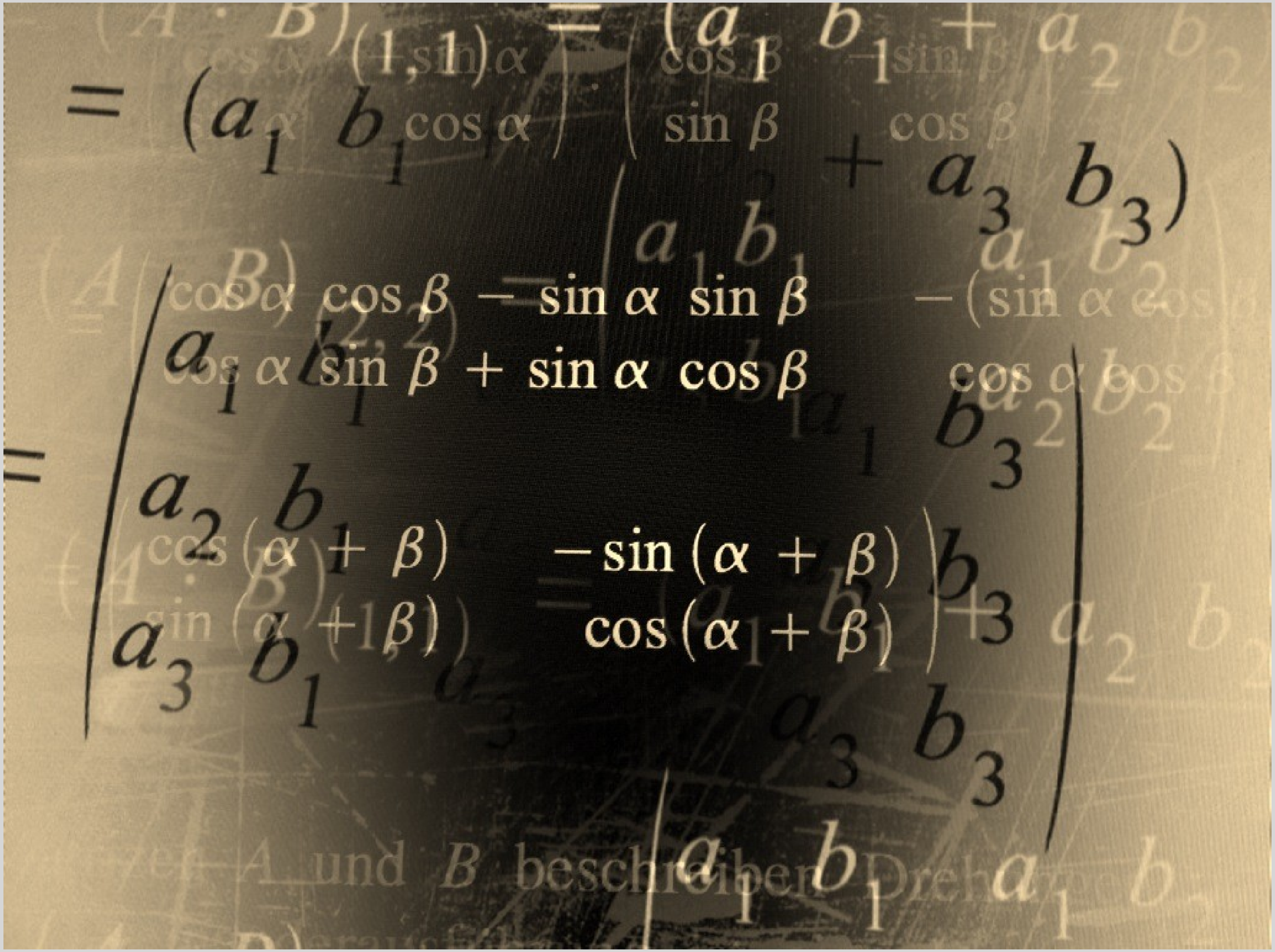
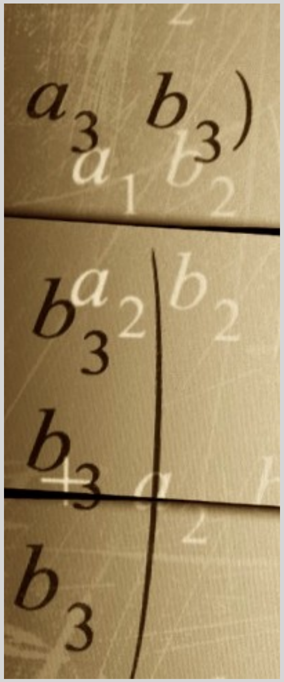


Multiplikation von Matrizen

Aufgaben: Teil 2

Matrizenmultiplikation: *Aufgaben 1, 2*



Aufgabe 1:

Bestimmen Sie das Produkt $A\,B$ der Matrizen A und B und interpretieren Sie das Ergebnis:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Beschreiben Sie die Matrizen folgender Transformationen:

a) Spiegelung an der x-Achse

b) Drehung um den Winkel $\theta = 30°$ und anschließende Spiegelung an der x-Achse

c) Drehung um den Winkel $\theta = - 45°$ und anschließende Spiegelung an der y-Achse

d) Drehung des Punktes $P = (3, 0)$ um den Winkel $\theta = 45°$ und anschließende Spiegelung an der y-Achse

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta) \\ \cos\alpha\ \sin\beta + \sin\alpha\ \cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

Die Matrizen A und B beschreiben Drehungen um den Winkel α und β. Die Hintereinanderausführung ist eine Dreung um den Winkel $(\alpha + \beta)$.

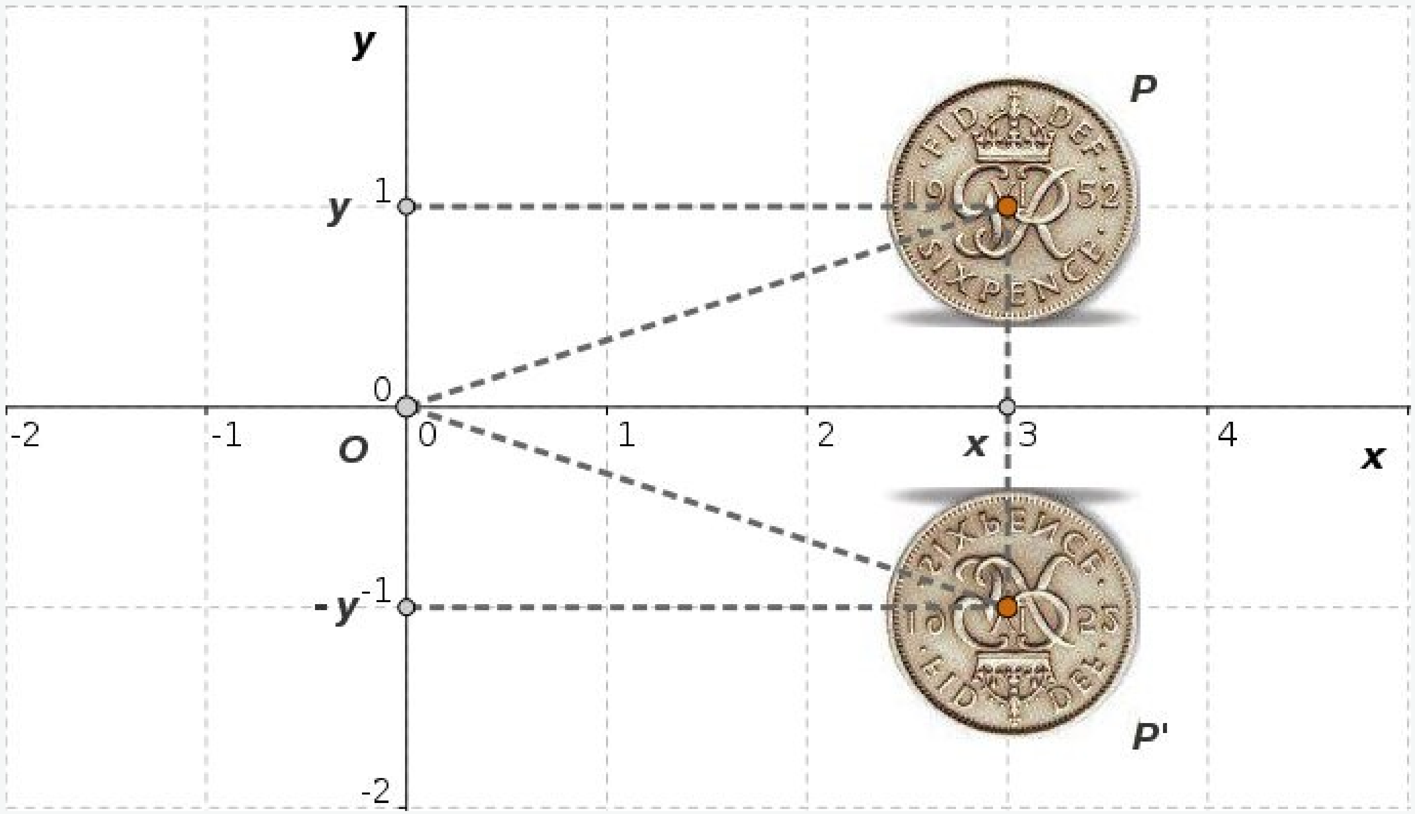


Abb. 3-1: Spiegelung an der x-Achse

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x - 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Drehung um den Winkel θ – $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Die Spiegelung an der x-Achse – $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$T = S_x \cdot R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}: \quad T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die Drehung um den Winkel $-\theta$ – $R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Die Spiegelung an der y-Achse – $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$T = S_y \cdot R_{-\theta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}: \quad T = \begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

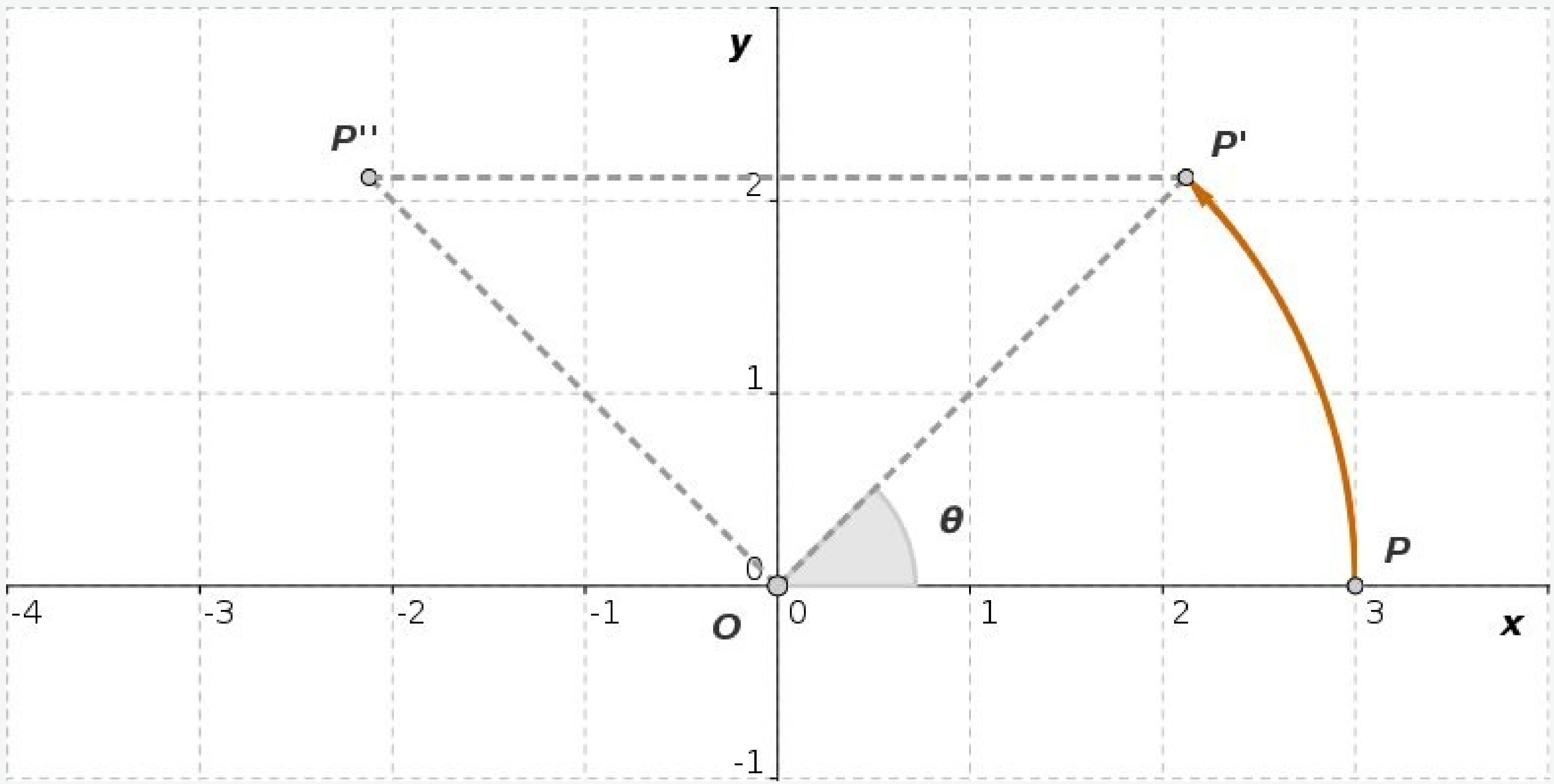


Abb. 3-2: Zwei Transfomationen: Drehung des Punktes P um den Winkel $\theta = 45°$ und anschließende Spiegelung an der y-Achse

$$P = (3,\ 0)$$

Die Drehung um den Winkel θ – $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Die Spiegelung an der y-Achse – $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$T = S_y \cdot R_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}: \quad T = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Spiegelung an der x-Achse ist eine lineare Abbildung mit Matrix

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Spiegelung an der y-Achse ist eine lineare Abbildung mit Matrix

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Scherung um den Faktor a am Ursprung ist eine lineare Abbildung mit der Matrix

$$S_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Die Rotation um den Winkel θ am Ursprung gegen den Uhrzeigersinn

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$