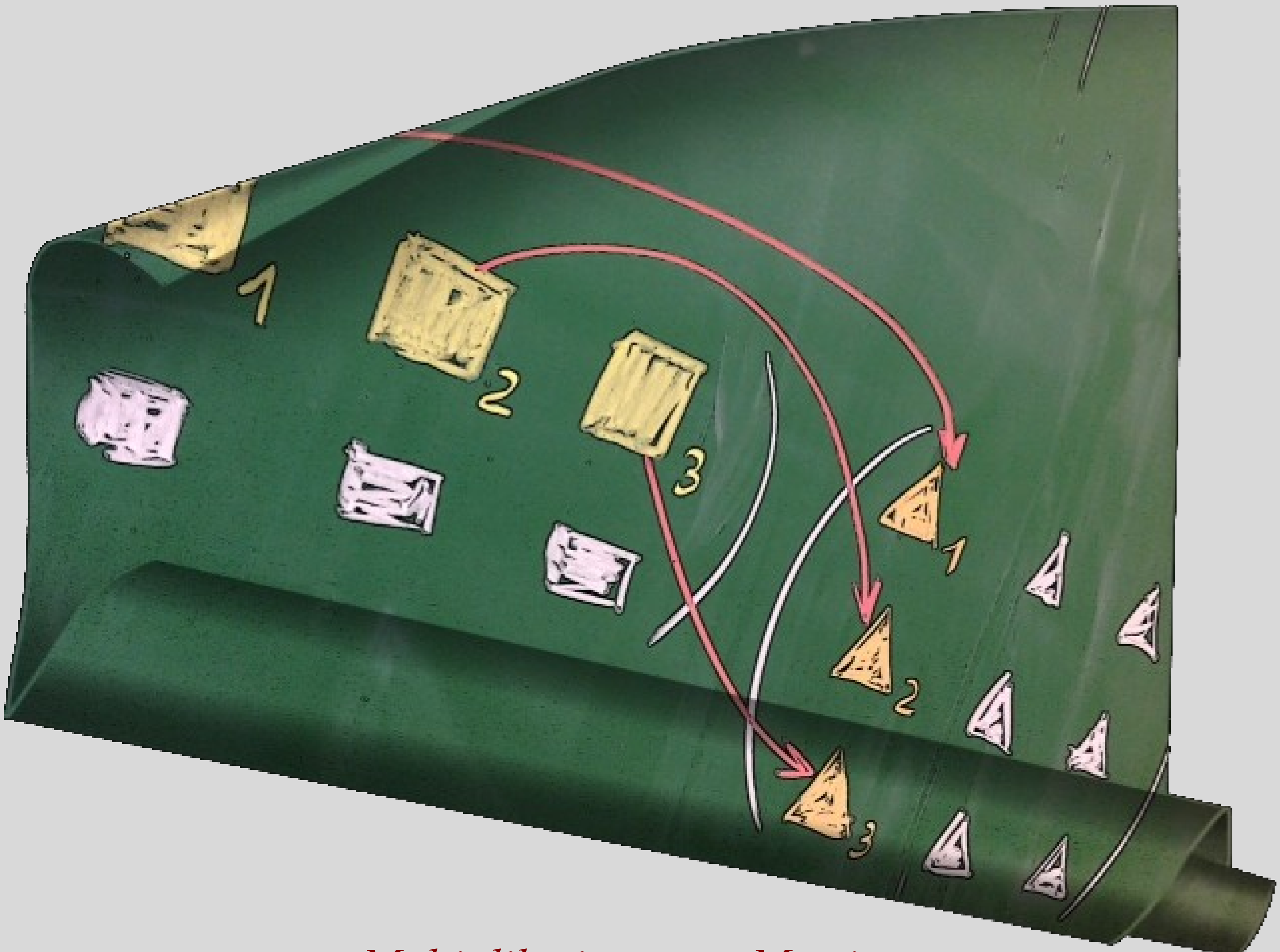


Multiplikation von Matrizen

Die Regeln der Multiplikation von Zahlen können nicht direkt auf die Multiplikation von Matrizen übertragen werden.

Multiplikation von Matrizen

Das Produkt zweier Matrizen A und B ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist

- D.h, wenn A eine (m,k)-Matrix ist, so muss B eine (k, n)-Matrix sein.

- Die Produktmatrix $C = A \cdot B$ ist dann eine (m, n)-Matrix.

- Zur Berechnung des (i, k)-Elements der Produktmatrix wird die i-te Zeile der ersten Matrix mit der k-ten Spalte der zweiten Matrix multipliziert. Dabei ist das (i, k)-Element der Produktmatrix das skalare Produkt aus dem i-ten Zeilenvektor und dem k-ten Spaltenvektor.

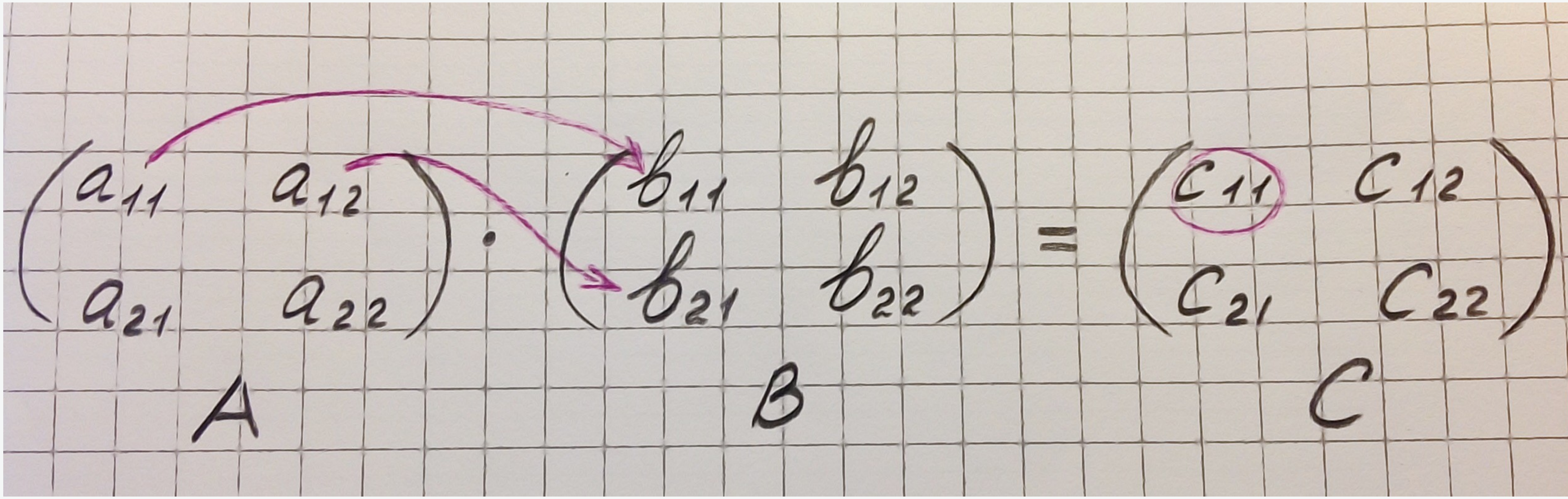


Abb. 1-1: Zum Begriff der Multiplikation von Matrizen

$$A \cdot B = C \,, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

1. Zeilenvektor von A mit dem 1. Spaltenvektor von B

$$c_{11} = 1\, Z_A \cdot 1\, S_B \,, \qquad c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21}$$

2. Zeilenvektor von A mit dem 2. Spaltenvektor von B

$$c_{12} = 1\, Z_A \cdot 2\, S_B \,, \qquad c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = A \cdot B$$

2 x *2*-Matrix *2* x *3*-Matrix

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ 1Z_A \rightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \\ & & \begin{array}{l} \uparrow \\ 1S_B \end{array} & \end{array}$$

c_{11} ist ein Skalarprodukt aus dem 1. Zeilenvektor von A und dem 1. Spaltenvektor von B

$$c_{11} = 1Z_A \cdot 1S_B = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

Die Skalarproduktbildung ist nur dann möglich, wenn beide Vektoren von gleicher Dimension sind.

Multiplikation von Matrizen: Beispiel

$$\begin{array}{ll} 1\,Z_A \to \\ 2\,Z_A \to \end{array} \overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{array}{c} \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1\,S_B & 2\,S_B & 3\,S_B \end{array} \end{array} = \overset{C}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,2} \cdot B_{2,3} = C_{2,3}$$

$$c_{11} = 1\,Z_A \cdot 1\,S_B = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

$$c_{12} = 1\,Z_A \cdot 2\,S_B = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4$$

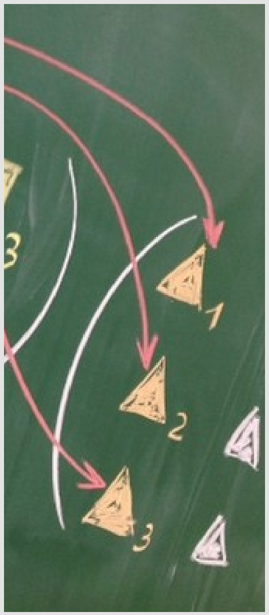
$$c_{13} = 1\,Z_A \cdot 3\,S_B = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 6$$

$$c_{21} = 2\,Z_A \cdot 1\,S_B = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$$

$$c_{22} = 2\,Z_A \cdot 2\,S_B = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 6$$

$$c_{23} = 2\,Z_A \cdot 3\,S_B = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 10$$

Multiplikation von Matrizen



$$A \cdot B = C \qquad : A_{m\,,\,k} \cdot B_{k\,,\,n} = C_{m\,,\,n}$$

$A_{m\,,\,k} \equiv$ m-ter Zeilenvektor, $\quad B_{k\,,\,n} \equiv$ n-ter Spaltenvektor

(m, k)-Matrix A, $\quad (k, n)$-Matrix B, $\quad (m, n)$-Matrix C

$$c_{i\,k} = a_{i\,1}\, b_{1\,k} + a_{i\,2}\, b_{2\,k} + \ldots + a_{i\,n}\, b_{n\,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\, b_{j\,k}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m; \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

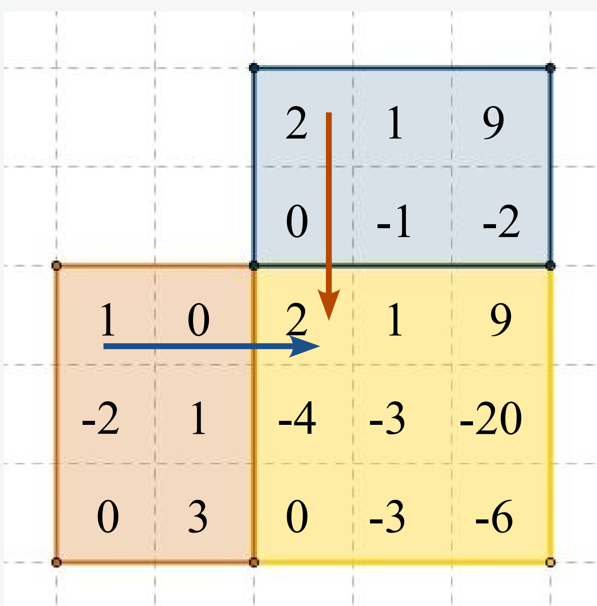
Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B

Multiplikation von Matrizen

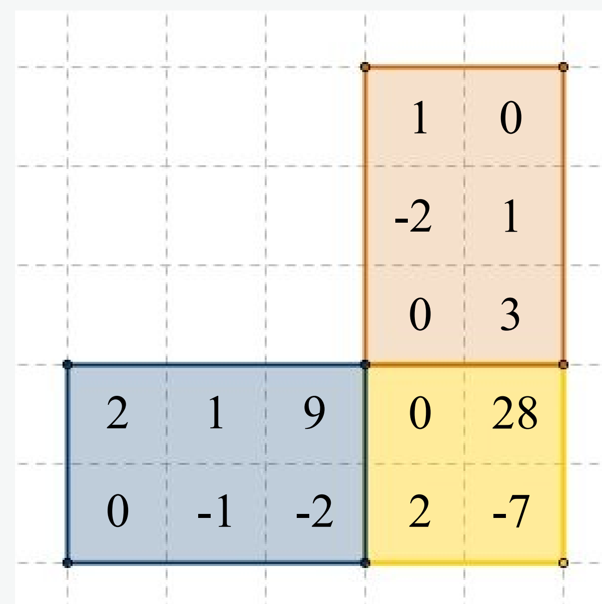
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot B = ? \quad B \cdot A = ?$$

$$A_{m,k} \cdot B_{k,n} = C_{m,n}$$

$$A_{3,2} \cdot B_{2,3} = C_{3,3}, \qquad B_{2,3} \cdot A_{3,2} = D_{2,2}$$

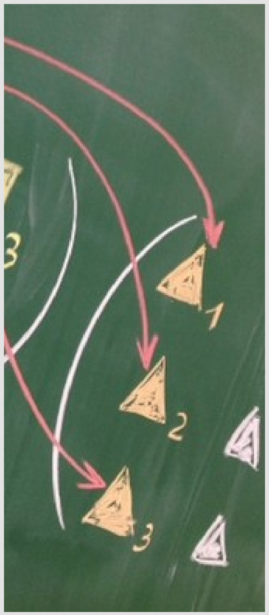


$C = A \bullet B$



$D = B \bullet A$

Multiplikation von Matrizen: Aufgaben 1, 2



Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ der Matrizen A und B:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3\,i & 0 & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & 2 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot B = ?$$

Lösung 1:

$$a)\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot B \neq B \cdot A$$

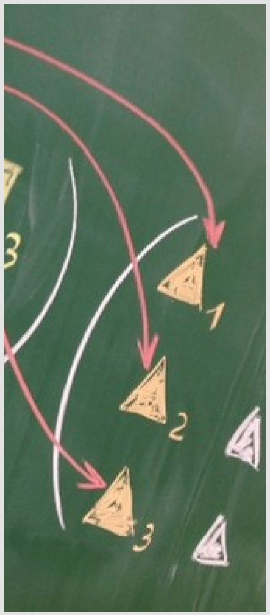
$$b)\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c)\ B \cdot A = \begin{pmatrix} i+4 & 5i & 3i & 2i \\ i & -i & 3i & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 2:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A \neq 0, \qquad B \neq 0$$

anders als bei der Multiplikation zweier reeller Zahlen !



Berechnen Sie das Produkt $A \cdot X$

a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$a)\ A\ X = \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A\ X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad A\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 5 - i \end{pmatrix}$$

$$c)\ A\ X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\ X_2 = \begin{pmatrix} -2 + 2i \\ -2i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 + i \\ -i \end{pmatrix}$$

$$d)\ A\ X = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\ X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 \end{pmatrix} = Y}$$

Berechnen Sie die zweite, dritte und weitere Potenzen folgender Matrizen

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad d)\quad G = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad H = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen: Aufgabe 4 a), b)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{2n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n-1}\right) \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad C^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^5 = \begin{pmatrix} i & -5 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad C^6 = \begin{pmatrix} -1 & -6i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^7 = \begin{pmatrix} -i & 7 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad C^8 = \begin{pmatrix} 1 & 8i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^9 = \begin{pmatrix} i & -9 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$C^{10} = \begin{pmatrix} -1 & -10i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C^{11} = \begin{pmatrix} -i & 11 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad C^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 12i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad C^5 = \begin{pmatrix} i & -5 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad C^9 = \begin{pmatrix} i & -9 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad C^{13} = \begin{pmatrix} i & -13 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$C^{1+4n} = \begin{pmatrix} i & -(1+4n) \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$C^{2} = \begin{pmatrix} -1 & -2\,i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C^{6} = \begin{pmatrix} -1 & -6\,i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C^{10} = \begin{pmatrix} -1 & -10\,i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{2+4n} = \begin{pmatrix} -1 & -(2+4n)\,i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$C^{3} = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad C^{7} = \begin{pmatrix} -i & 7 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad C^{11} = \begin{pmatrix} -i & 11 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$C^{3+4n} = \begin{pmatrix} -i & 3+4n \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$C^{4} = \begin{pmatrix} 1 & 4\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{8} = \begin{pmatrix} 1 & 8\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 12\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{4+4n} = \begin{pmatrix} 1 & (4+4n)\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$C = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G^3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G^5 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad G^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^{1+2n} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad G^{2n+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N}$$

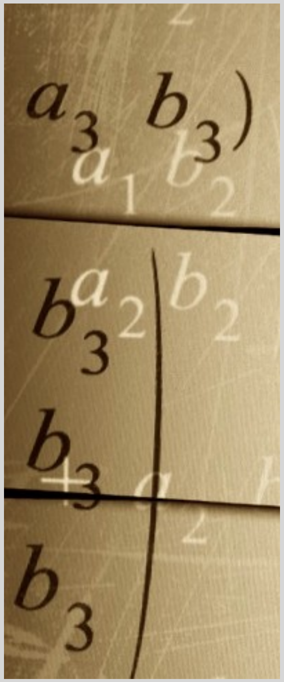
$$G^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2}\left(1+(-1)^{n-1}\right) \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H^{2} = \begin{pmatrix} 1 & -2\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H^{3} = \begin{pmatrix} 1 & -3\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H^{4} = \begin{pmatrix} 1 & -4\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H^{5} = \begin{pmatrix} 1 & -5\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H^{6} = \begin{pmatrix} 1 & -6\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H^{n} = \begin{pmatrix} 1 & -n\,i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Matrizenmultiplikation: Aufgabe 5



Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ der Matrizen A und B:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

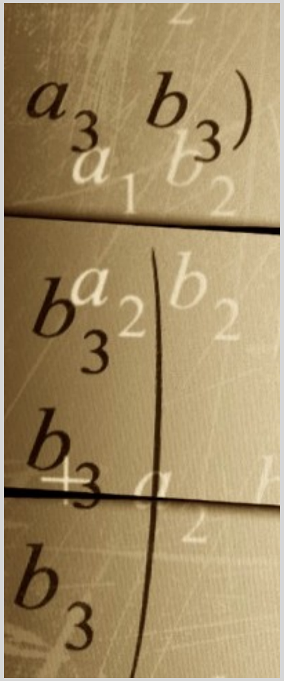
$$b)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 13 \\ 1 & 21 & 18 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -12 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad A = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 6 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -3 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation: Aufgabe 5



$$f)\quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$g)\quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$h)\quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$a)\quad A_{(3,3)} \cdot B_{(3,2)} = (A \cdot B)_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ -3 & -11 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$b)\quad A_{(3,3)} \cdot B_{(2,3)}$ – Das Produkt kann nicht gebildet werden.

$$c)\quad A_{(2,2)} \cdot B_{(2,2)} = A_{(2,2)} \cdot E_{(2,2)} = A$$

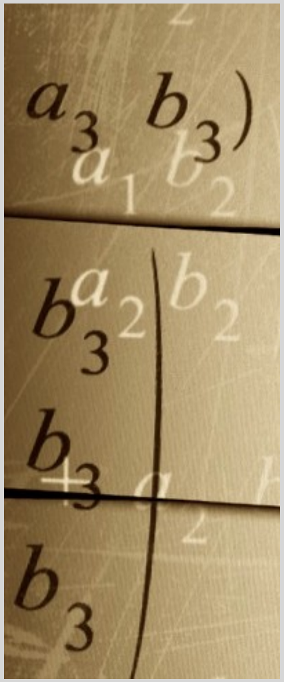
$$d)\quad A_{(3,3)} \cdot B_{(3,6)} = E_{(3,3)} \cdot B_{(3,6)} = B$$

$$e)\quad A_{(1,2)} \cdot B_{(2,1)} = (A \cdot B)_{(1,1)} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$$

$$f)\quad A_{(2,1)} \cdot B_{(1,2)} = (A \cdot B)_{(2,2)} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

$$g)\quad A_{(1,3)} \cdot B_{(3,1)} = (A \cdot B)_{(1,1)} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$$

$$h)\quad A_{(3,1)} \cdot B_{(1,3)} = (A \cdot B)_{(3,3)} = \begin{pmatrix} a_1\, b_1 & a_1\, b_2 & a_1\, b_3 \\ a_2\, b_1 & a_2\, b_2 & a_2\, b_3 \\ a_3\, b_1 & a_3\, b_2 & a_3\, b_3 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 6:

Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Welche der Matrizenpaare sind vertauschbar ?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -i & -i \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7:

Mit den Matrizen A, B und C sollen die Produkte $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$ berechnet werden. Prüfen Sie, ob die Multiplikation dreier Matrizen assoziativ ist, d.h.:
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -i & -i \end{pmatrix}, \qquad A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad A = \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot B \neq B \cdot A$$

Alle Multiplikationen lassen sich ausführen:

$$(A \cdot B) \cdot C = \underbrace{(A_{(2,3)} \cdot B_{(3,3)})}_{D} \cdot C_{(3,2)} = D_{(2,3)} \cdot C_{(3,2)} = M_{(2,2)}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = A_{(2,3)} \cdot \underbrace{(B_{(3,3)} \cdot C_{(3,2)})}_{F} = A_{(2,3)} \cdot F_{(3,2)} = N_{(2,2)}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -29 & -3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$$

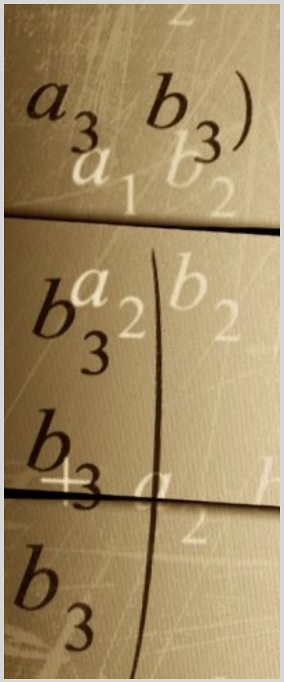
$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -12 & 8 \\ -4 & -7 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} -29 & -3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$$

Die Multiplikation ist assoziativ !

In dem Produkt $A \cdot B \cdot C$ kann man zuerst die Operation $B \cdot C$ ausführen und danach A mit dem entstandenen Produkt multiplizieren.

Die Reihenfolge der Faktoren darf nicht vertauscht werden!



Das Produkt $F \cdot G \cdot V$ soll berechnet werden

a) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $F = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -a \\ a & 0 & 0 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(F \cdot G) \cdot V$

1) $F \cdot G = F_{(2,4)} \cdot G_{(4,3)} = (F \cdot G)_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$(F \cdot G) \cdot V = (F \cdot G)_{(2,3)} \cdot V_{(3,1)} = ((F \cdot G) \cdot V)_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix}$

30 Multiplikationen und 22 Additionen

$F \cdot (G \cdot V)$

2) $G \cdot V = G_{(4,3)} \cdot V_{(3,1)} = (G \cdot V)_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Matrix-Vektor-Multiplikation

$F_{(2,4)} \cdot (G \cdot V)_{(4,1)} = \left(F \cdot (G \cdot V)\right)_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix}$

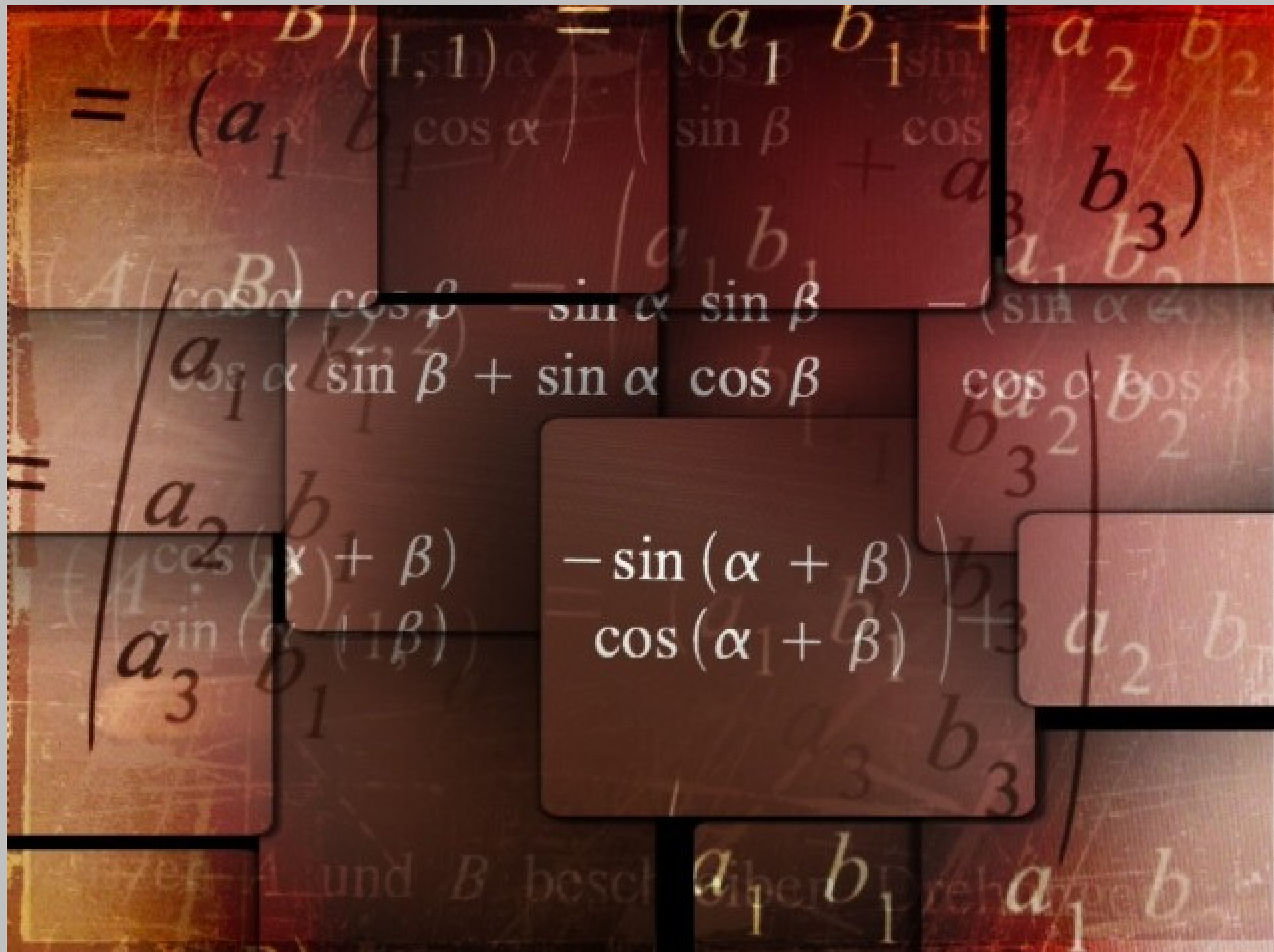
20 Multiplikationen und 14 Additionen

Die Matrix-Vektor-Operation sollte vor der Matrix-Matrix-Multiplikation ausgeführt werden !

$$b)\quad F\cdot G\cdot V=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\0&1&-1\\-3&0&0\\-3&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\0&-1&1&1\\1&-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}=$$

$$=F_{(4,3)}\cdot G_{(3,4)}\cdot V_{(4,1)}=\left(F\cdot G\cdot V\right)_{(4,1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$$c)\quad F\cdot G\cdot V=\left(1+a,\ 0,\ -1-a,\ a,\ -1+a\right)$$


$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
$\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$
$-\sin(\alpha + \beta)$
$\cos(\alpha + \beta)$
$= (a_1 b_1$
$a_3 b_3)$