Multiplikation von Matrizen

8-E2

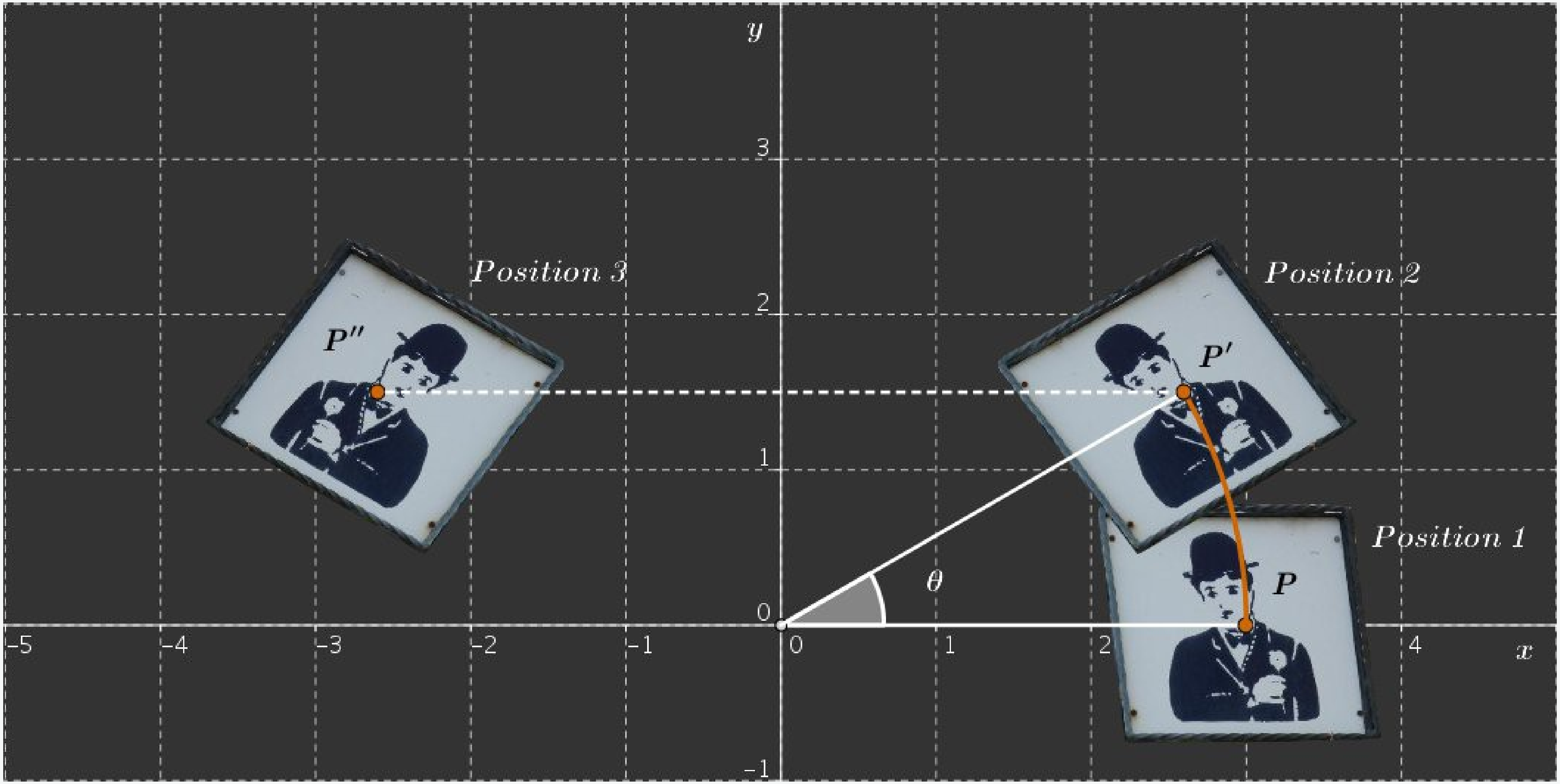

Abb. 1-1: Zwei Transfomationen: Eine Drehung um den Winkel θ und eine Spiegelung an der y-Achse

Im Folgenden beschreiben wir eine Transformation als zwei nacheinander auszuführende Transformationen: Eine Drehung um einen Winkel θ um den Koordinatenursprung O und eine Spiegelung an der y-Achse.

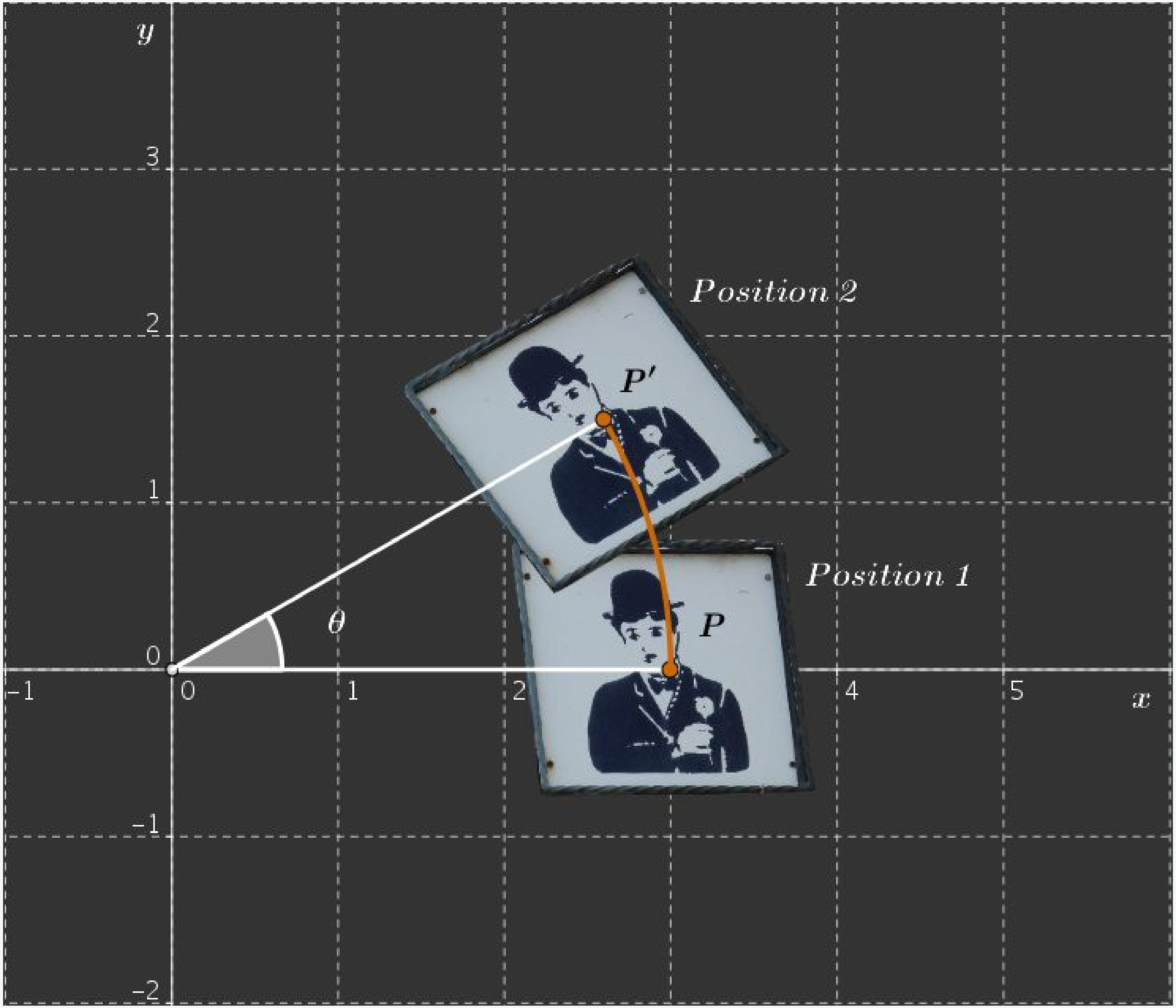

Abb. 1-2: Die Drehung um den Winkel θ um den Koordinatenursprung

Drehung um einen Winkel

$$P \quad \rightarrow \quad P' : \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}\,' = \overrightarrow{OP}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{R_\theta}{\overbrace{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\theta - y \sin\theta \\ x \sin\theta + y \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{r} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{r} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 = (\cos\theta, \; -\sin\theta) \equiv (a_{11}, \; a_{12})$$

$$\vec{a}_2 = (\sin\theta, \; \cos\theta) \equiv (a_{21}, \; a_{22})$$

Aus den Komponenten dieser Vektoren wird eine Matrix gebildet:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dann entspricht die Drehung um den Winkel θ der folgenden Matrixgleichung:

$$\vec{r}\,' = R_\theta \, \vec{r}$$

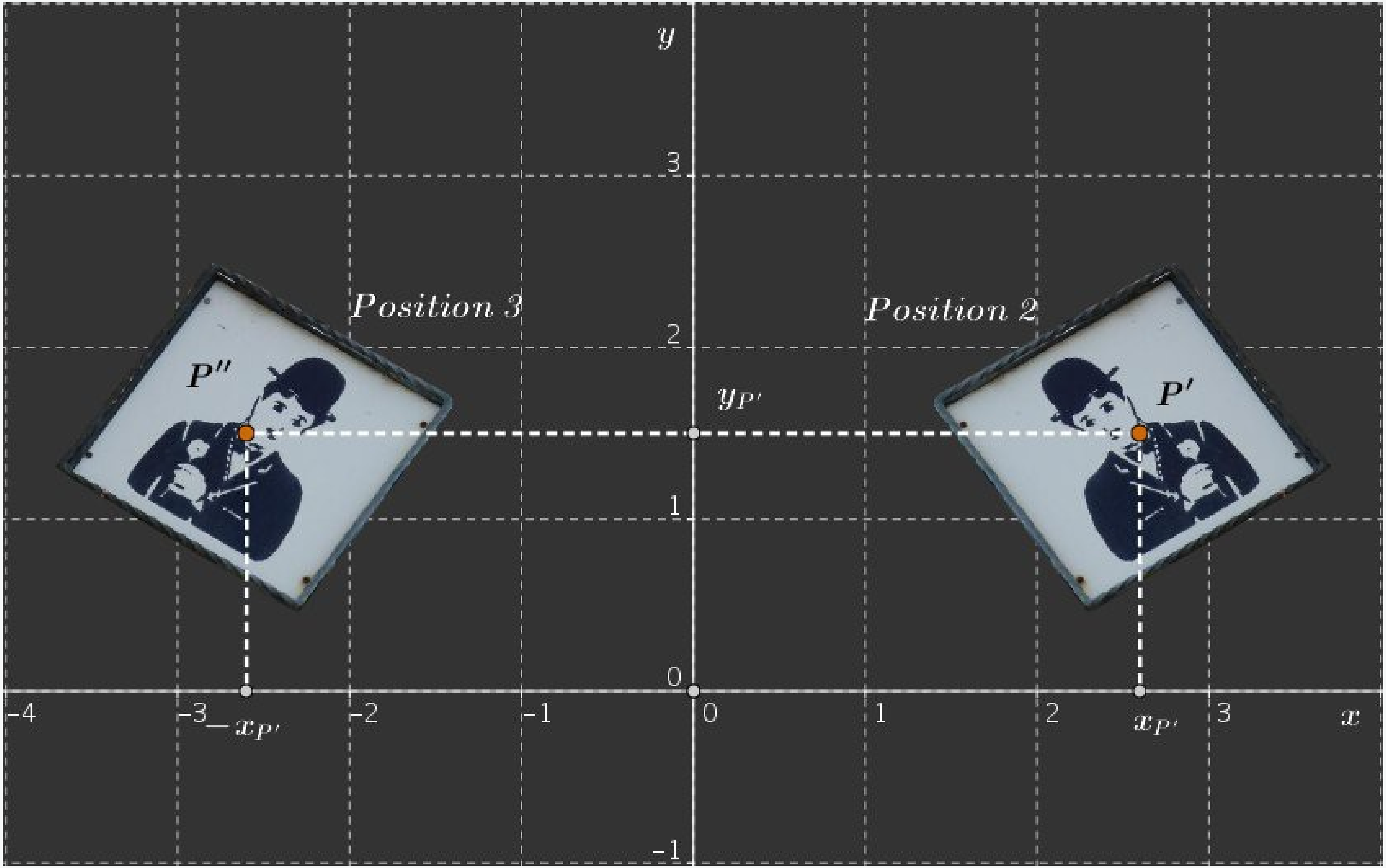

Abb. 1-3: Die Spiegelung an der y-Achse

Spiegelung an der y-Achse

$$P\,' \quad \to \quad P\,'' : \quad \vec{r}\,' = \overrightarrow{OP}\,' = \begin{pmatrix} x\,' \\ y\,' \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}\,'' = \overrightarrow{OP}\,'' = \begin{pmatrix} x\,'' \\ y\,'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\,' \\ y\,' \end{pmatrix} \overbrace{\to}^{S_y} \begin{pmatrix} x\,'' \\ y\,'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\,' \\ y\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \cdot \vec{r}\,' \\ \vec{b}_2 \cdot \vec{r}\,' \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 \, \vec{r}\,' = -x\,' = (-1) \cdot x\,' + 0 \cdot y\,' = (-1,\ 0) \cdot \begin{pmatrix} x\,' \\ y\,' \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 \, \vec{r}\,' = y\,' = 0 \cdot x\,' + 1 \cdot y\,' = (0,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} x\,' \\ y\,' \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 = (-1,\ 0) = (b_{11},\ \ b_{12}), \qquad \vec{b}_2 = (0,\ 1) = (b_{21},\ \ b_{22})$$

$$S_y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Spiegelung an der y-Achse entspricht der folgenden Matrixgleichung:

$$\vec{r}\,'' = S_y \, \vec{r}\,'$$

$$\vec{r} \overset{R_\theta}{\overbrace{\longrightarrow}} \vec{r}\,' \overset{S_y}{\overbrace{\longrightarrow}} \vec{r}\,'': \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{R_\theta}{\overbrace{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \overset{S_y}{\overbrace{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,' = R_\theta\, \vec{r}: \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, x + a_{12}\, y \\ a_{21}\, x + a_{22}\, y \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,'' = S_y\, \vec{r}\,': \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\, x' + b_{12}\, y' \\ b_{21}\, x' + b_{22}\, y' \end{pmatrix}$$

$$x'' = b_{11}\, x' + b_{12}\, y' = b_{11}\, (a_{11}\, x + a_{12}\, y) + b_{12}\, (a_{21}\, x + a_{22}\, y) =$$

$$= (a_{11}\, b_{11} + a_{21}\, b_{12})\, x + (a_{12}\, b_{11} + a_{22}\, b_{12})\, y$$

$$y'' = b_{21}\, x' + b_{22}\, y' = b_{21}\, (a_{11}\, x + a_{12}\, y) + b_{22}\, (a_{21}\, x + a_{22}\, y) =$$

$$= (a_{11}\, b_{21} + a_{21}\, b_{22})\, x + (a_{12}\, b_{21} + a_{22}\, b_{22})\, y$$

Drehung um einen Winkel und Spiegelung an der y-Achse

$$\vec{r}\,' = R_\theta\,\vec{r}\,, \qquad \vec{r}\,'' = S_y\,\vec{r}\,' = S_y(R_\theta\,\vec{r}) = T\,\vec{r}\,, \qquad T = S_y\,R_\theta$$

$$S_y(R_\theta\vec{r}) = \begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{21}\,b_{12} & a_{12}\,b_{11} + a_{22}\,b_{12} \\ a_{11}\,b_{21} + a_{21}\,b_{22} & a_{12}\,b_{21} + a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\,\vec{r}$$

$$T = S_y\,R_\theta = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

$$t_{11} = a_{11}\,b_{11} + a_{21}\,b_{12} = (b_{11},\ b_{12})\cdot\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$t_{12} = a_{12}\,b_{11} + a_{22}\,b_{12} = (b_{11},\ b_{12})\cdot\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$t_{21} = a_{11}\,b_{21} + a_{21}\,b_{22} = (b_{21},\ b_{22})\cdot\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$t_{22} = a_{12}\,b_{21} + a_{22}\,b_{22} = (b_{21},\ b_{22})\cdot\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Drehung um einen Winkel und Spiegelung an der y-Achse

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\theta = 30^\circ$, $\quad R_{\theta=30^\circ} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$a_{11} = a_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad a_{21} = -a_{12} = \frac{1}{2}$$

$$S_y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_{22} = -b_{11} = 1, \qquad b_{12} = b_{21} = 0$$

$$t_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{21}\, b_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad t_{12} = a_{12}\, b_{11} + a_{22}\, b_{12} = \frac{1}{2}$$

$$t_{21} = a_{11}\, b_{21} + a_{21}\, b_{22} = \frac{1}{2} \qquad t_{22} = a_{12}\, b_{21} + a_{22}\, b_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Drehung um einen Winkel und Spiegelung an der y-Achse

$$T = S_y \, R_{\theta = 30^\circ} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,'' = T\,\vec{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Das ist die Matrixgleichung, die zwei nacheinander ausgeführte Transformationen beschreibt: Die Drehung um einen Winkel $\theta = 30^\circ$ um den Koordinatenursprung O und die Spiegelung an der y-Achse.

Um die Transformation zu beschreiben, d.h. um die Koordinaten des Punktes P'' zu ermitteln, müssen wir die Koordinaten des Punktes P in diese Matrixgleichung einsetzen.

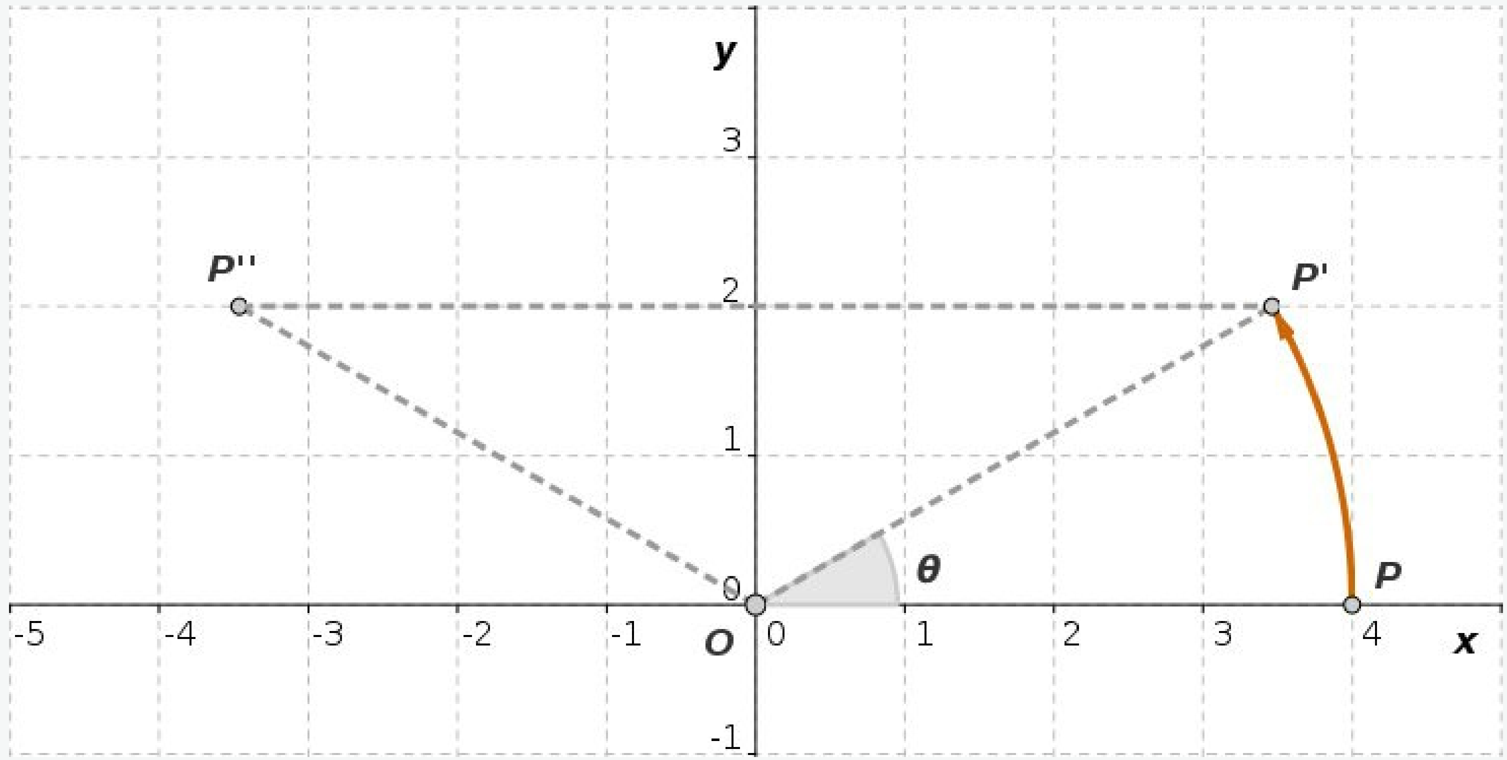

Abb. 1-4: Zwei Transfomationen: Die Drehung des Punktes P (4, 0) um den Winkel $\theta = 30°$ und die anschließende Spiegelung an der y-Achse

$$\vec{r}\,'' = T\ \vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -3.46 \\ 2 \end{pmatrix}$$