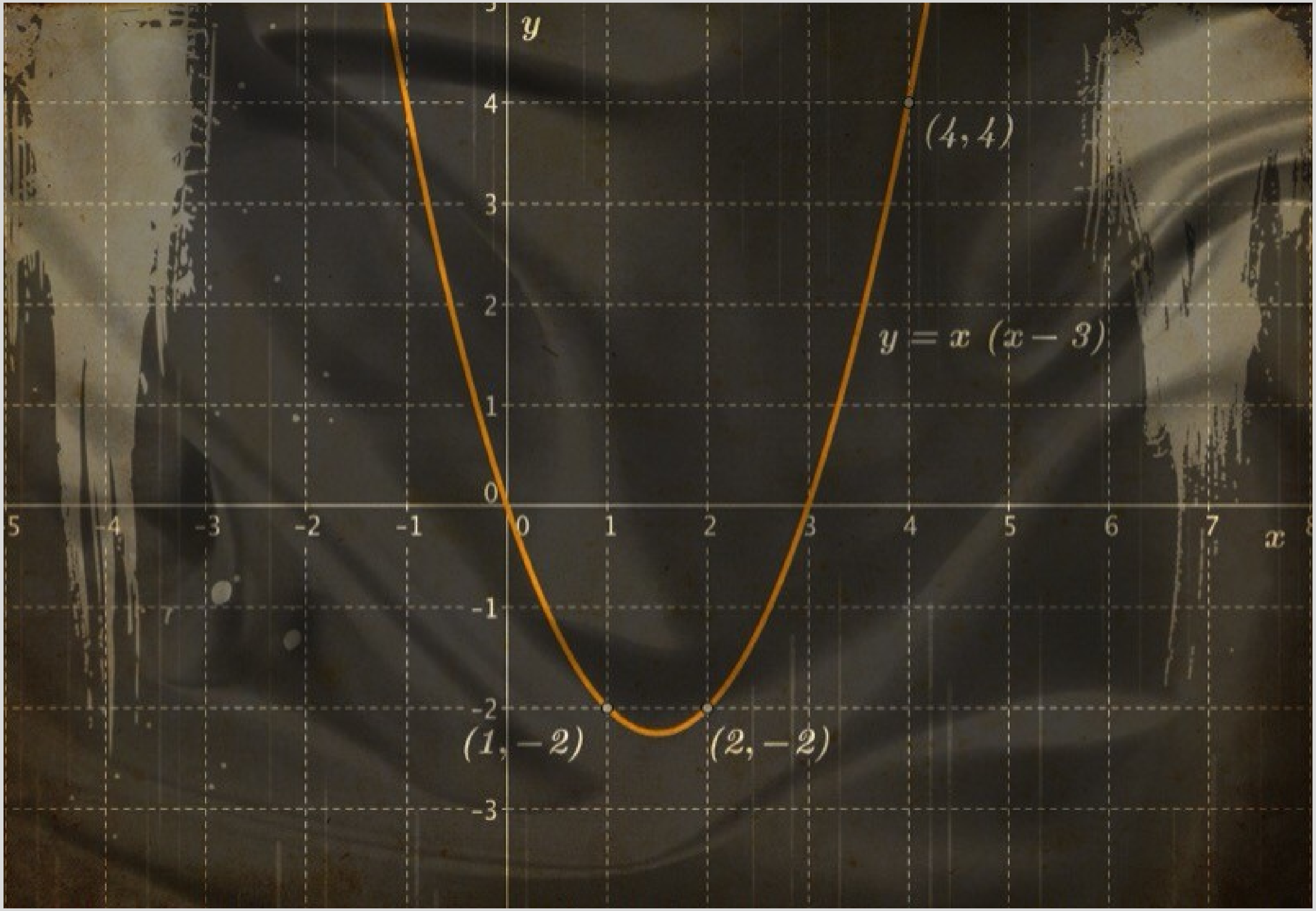

Lineare Gleichungssysteme: Aufgaben

Teil 1

Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

Aufgabe 1: Finden Sie die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a^3} - \dfrac{y}{a^2} + \dfrac{z}{a} = 1 \\[2ex] \dfrac{x}{b^3} - \dfrac{y}{b^2} + \dfrac{z}{b} = 1 \\[2ex] \dfrac{x}{c^3} - \dfrac{y}{c^2} + \dfrac{z}{c} = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 2: *Beschreibung von Messwerten durch eine Kurve*

Bestimmen Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion $y = a\,x^2 + b\,x + c$ deren Graph durch die Punkte (1, -2), (2, -2) und (4, 4) verläuft.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a^3} - \dfrac{y}{a^2} + \dfrac{z}{a} = 1, \\[2mm] \dfrac{x}{b^3} - \dfrac{y}{b^2} + \dfrac{z}{b} = 1, \\[2mm] \dfrac{x}{c^3} - \dfrac{y}{c^2} + \dfrac{z}{c} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - a\,y + a^2 z = a^3, \\ x - b\,y + b^2 z = b^3, \\ x - c\,y + c^2 z = c^3, \end{cases}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid \boldsymbol{c})$ hat die Form:

$$(A \mid \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & | & a^3 \\ 1 & -b & b^2 & | & b^3 \\ 1 & -c & c^2 & | & c^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{2Z-1Z} \\ \xrightarrow{3Z-1Z} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & | & a^3 \\ 0 & a-b & b^2-a^2 & | & b^3-a^3 \\ 0 & a-c & c^2-a^2 & | & c^3-a^3 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y), \qquad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + x\,y + y^2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & | & a^3 \\ 0 & -1 & a+b & | & a^2 + a\,b + b^2 \\ 0 & -1 & c+b & | & c^2 + c\,b + b^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3Z-2Z} \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & -a & a^2 & a^3 \\ 0 & -1 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ 0 & 0 & c-a & c^2-a^2+b(c-a) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & -a & a^2 & a^3 \\ 0 & -1 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ 0 & 0 & c-a & c^2-a^2+b(c-a) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & -a & a^2 & a^3 \\ 0 & -1 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ 0 & 0 & c-a & (c-a)(a+b+c) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & -a & a^2 & a^3 \\ 0 & -1 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \end{array}\right)$$

$$z = a+b+c, \qquad y = ab+ac+bc, \qquad x = abc$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} abc \\ ab+ac+bc \\ a+b+c \end{pmatrix}$$

Wir haben 3 Punkte und können 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten aufstellen:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

$P_1 = (1,-2)$: $\quad -2 = a + b + c$

$P_2 = (2,-2)$: $\quad -2 = 4\,a + 2\,b + c$

$P_3 = (4,4)$: $\quad 4 = 16\,a + 4\,b + c$

$$(A\,|\,\vec{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 16 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$3\,c = 0, \qquad -2\,b - 3\,c = 6, \qquad a + b + c = -2$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = a\,x^2 + b\,x + c = x^2 - 3\,x = x(x-3)$$

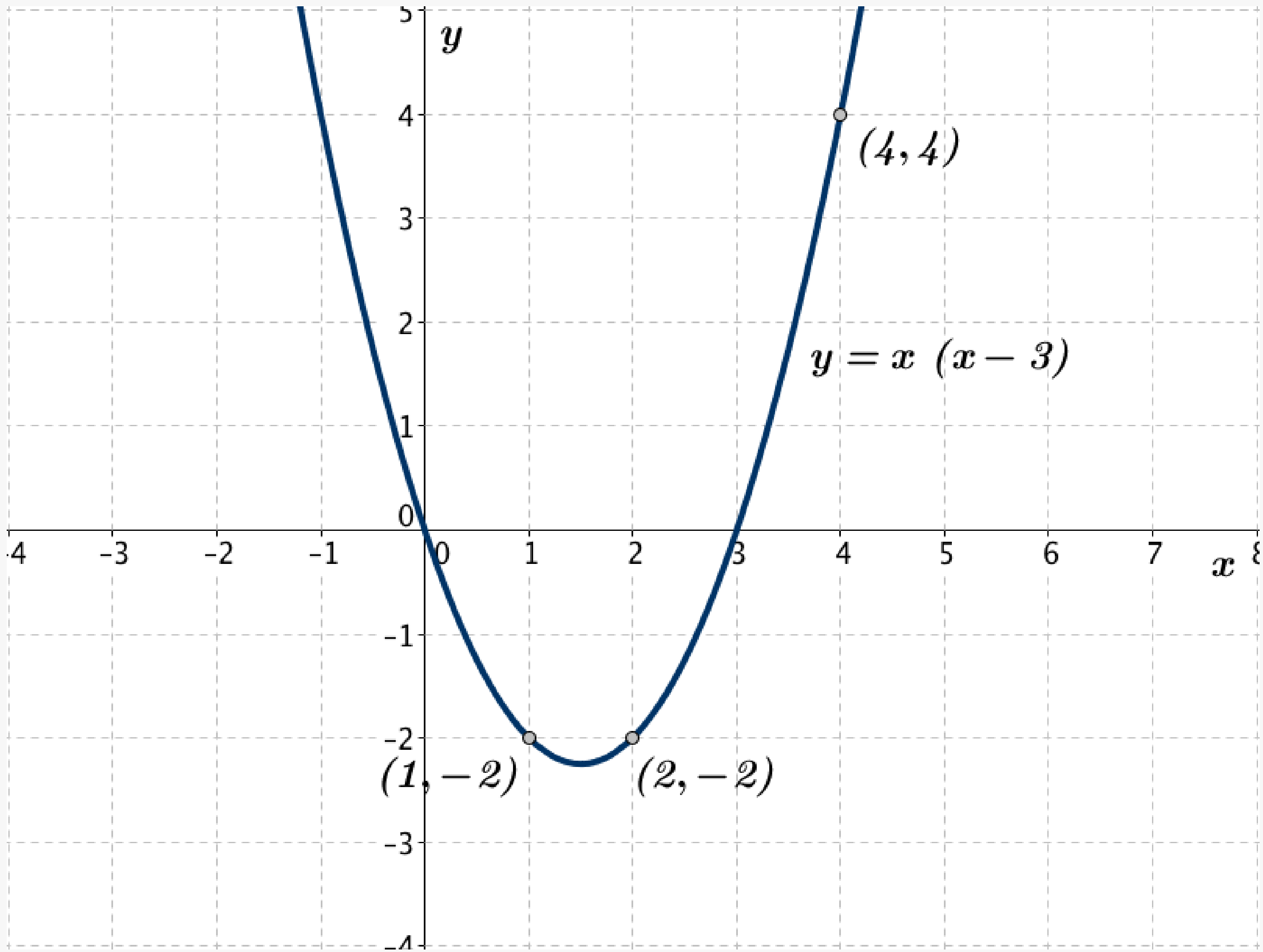

Abb. L2: Graph der quadratischen Funktion der Aufgabe

Wie Sie sich wahrscheinlich erinnern, kann die Höhe $s\,(t)$ eines Gegenstandes entsprechend den Fallgesetzen bei konstanter Beschleunigung g durch folgende Formel beschrieben werden:

$$s(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + s_0$$

Dabei ist t die Zeit, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und s_0 der Ort zur Zeit $t = 0$. Folgende Werte wurden gemessen:

$t_1 = 1\,\text{s}$: $\quad s_1 = 15{,}1\,m$

$t_2 = 2\,\text{s}$: $\quad s_2 = 20{,}38\,m$

$t_3 = 3\,\text{s}$: $\quad s_3 = 15{,}86\,m$

Bestimmen Sie die Werte von g, v_0 und s_0.

Durch Einsetzen der 3 Messwerte in die Gleichung für $s\,(t)$ ergeben sich 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Lineare Gleichungssysteme: Lösung 3

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}g + v_0 + s_0 = 15.1, \\ -2g + 2v_0 + s_0 = 20.38, \\ -\dfrac{9}{2}g + 3v_0 + s_0 = 15.86, \end{cases}$$

$$A\vec{X} = \vec{C}: \qquad \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -\dfrac{9}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ v_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 20.38 \\ 15.86 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1}\vec{C}: \qquad \begin{pmatrix} g \\ v_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15.1 \\ 20.38 \\ 15.86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.8 \\ 20.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $g = 9.8\, m/s^2, \qquad v_0 = 20.0\, m/s, \qquad s_0 = 0\, m$

Finden Sie die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} 4x - 3y - iz = 1 - 4i\,, \\ -x + 2y + 2z = 3 - 3i\,, \\ -2x + y + z = -3i. \end{cases} \qquad x,\ y,\ z \in \mathbb{C}$$

$$x = 1 + i\,, \qquad y = 2i\,, \qquad z = 2 - 3i$$