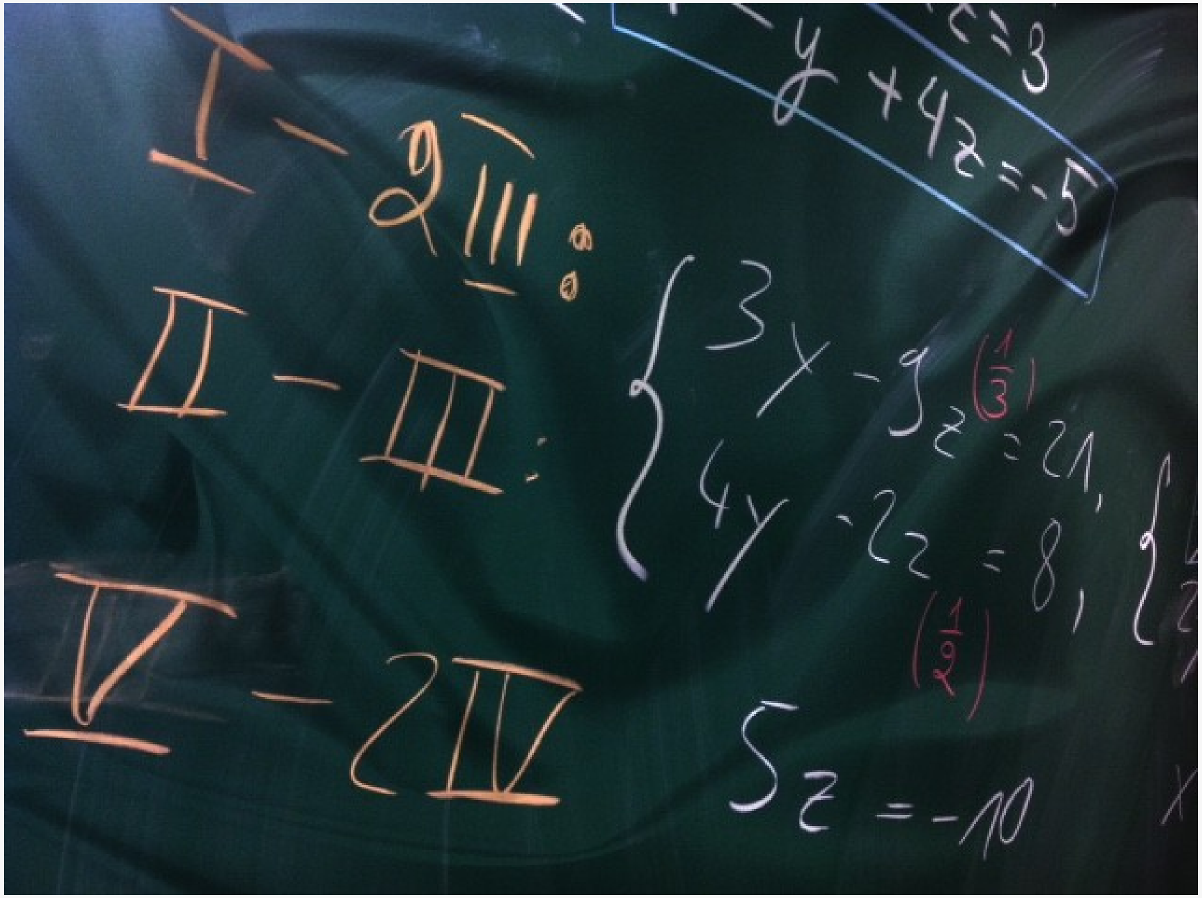


Lineare Gleichungssysteme

$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ – lineare Funktion (Funktion ersten Grades)

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – unabhängige Variablen

y – abhängige Variable

Der Wert für y wird fest vorgegeben, $y = b$:

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b}$$ – lineare Gleichung

Im Unterschied zur linearen Funktion ist die lineare Gleichung nicht mehr für beliebige Belegung der unabhängigen Variablen gültig.

lineares Funktionensystem:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{cases}$$

lineares Gleichungssystem:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = c_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = c_m \end{cases}$$

Inhomogenes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$ − Absolutglieder

Homogenes lineares Gleichungssystem:

$(b_1 = b_2 = \ldots b_m = 0)$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Die Lösung solcher Gleichungssysteme, d.h. die Bestimmung von Zahlenwerten für die unabhängigen Variablen, die das Gleichungssystem erfüllen, ist der wesentlicher Gegenstand der Linearen Algebra.

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Die auf Carl Friedrich Gauß zurückgehende Lösungsstrategie für ein Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten besteht in der äquivalenten Umformung des Gleichungssystems in Gleichungen mit nur einer Unbekannten.

Unter einer äquivalenten Umformung versteht man jede Umformung, welche die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändert. Für äquivalente Umformungen gelten die folgenden Regeln:

- Eine Gleichung kann mit einer reellen von null verschiedenen Zahl multipliziert werden.
- Gleichungen können miteinander vertauscht werden.
- Zu einer Gleichung kann das Vielfache einer anderen Gleichung addiert werden.

Das Gaußsche Eliminierungsverfahren wird am Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen demonstriert.

1. Schritt:

$$\begin{cases} G_1 & : -x + y + z = 0 \\ G_2 & : x - 3y - 2z = 5 \\ G_3 & : 5x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

Die erste Gleichung ist die Eliminationszeile und bleibt in den weiteren Umformungen unverändert. Diese Gleichung wird mit einem Faktor multipliziert zu den anderen Gleichungen addiert.

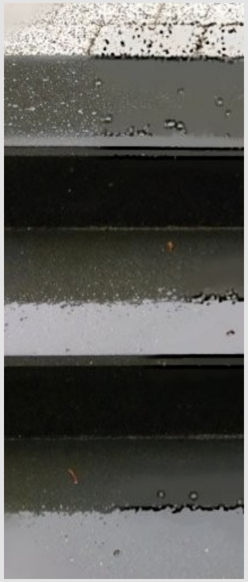
Schritt 2: Elimination von x

$$\begin{cases} G_1 + G_2 = \tilde{G}_1 & : -2y - z = 5 \\ 5G_1 + G_3 = \tilde{G}_2 & : 6y + 9z = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2y - z = 5 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Schritt 3: Elimination von y:

$$\tilde{G}_1 + \frac{1}{3}\tilde{G}_2 = G^* : \quad z = 3$$

Gaußscher Algorithmus



Die beiden Gleichungen, die x und y, bzw. x, nicht enthalten bilden zusammen mit der Eliminationszeile ein gestaffeltes Gleichungssystem, aus dem der Reihe nach von unten nach oben die drei Unbekannten berechnet werden können.

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ -2y - z &= 5 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Einzige Lösung: $x = -1, \quad y = -4, \quad z = 3$

oder als Zahlentripel: $(-1, -4, 3)$

oder als Spaltenvektor : $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Finden Sie die Lösungen dieser Gleichungssysteme:

Gleichungssystem 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Gleichungssystem 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Gleichungssystem 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

Schritt 1: EG $\rightarrow$

3 Gleichungen mit
3 Unbekannten

$$\begin{cases} \boxed{2x_1 + x_2 - x_3 = 11} & (=EG_1) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 & (G_2) \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 & (G_3) \end{cases}$$

EG = Eliminationsgleichung

Die erste Gleichung bleibt erhalten. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit ½ und subtrahieren sie von der zweiten und dritten Gleichung. Danach werden beide Gleichungen mit reellen Konstanten multipliziert:

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = -\frac{5}{2} & (G_2) \quad \times \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{2}x_2 + \frac{9}{2}x_3 = -\frac{21}{2} & (G_3) \quad \times \frac{2}{3} \end{cases}$$

Schritt 2: EG $\rightarrow$

2 Gleichungen mit
2 Unbekannten

$$\begin{cases} \boxed{x_2 + x_3 = -1} & (EG_2) \\ -x_2 + 3x_3 = -7 & (G_3) \end{cases}$$

Die zweite Unbekannte wird eliminiert, indem man beide Gleichungen addiert.

$$4x_3 = -8 \quad (G_3), \qquad x_3 = -2$$

Die Eliminationsgleichungen bilden das gestaffelte Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -2 \end{cases}$$

Das Gleichungssystem 1 besitzt eine einzige Lösung:

$x_1 = 4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 & (G_1) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 & (G_2) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (G_3) \end{cases}$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -8 \qquad (G_2 - G_1)$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \qquad (G_3)$$

Das Gleichungssystem 2 besitzt keine Lösung, weil die dritte Gleichung im Widerspruch zu der Differenz der ersten Gleichungen steht.

Gleichungssystem 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 & (G_1) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 & (G_2) \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8 & (G_3) \end{cases}$$

$$G_1 - G_2 = G_3$$

Da die dritte Gleichung überflüssig ist, haben wir 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Schritt 1: EG $\rightarrow$

2 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\begin{cases} \boxed{2x_1 + x_2 - x_3 = 11} & (G_1) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 & (G_2) \end{cases}$$

$$G_1 - 2G_2: \quad 5x_2 + 5x_3 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 + x_3 = -1$$

Diese Gleichung hat 2 Unbekannte. Setzt man die dritte Unbekannte gleich t, wobei t ein beliebiger Parameter ist, erhält man unendlich viele Lösungen:

$$x_3 = t, \qquad x_2 = -1 - x_3 = -1 - t, \qquad x_1 = \frac{1}{2}\, 11 - x_2 + x_3 = 6 + t$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + t \\ -1 - t \\ t \end{pmatrix}$$

$$t = 0: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{– spezielle Lösung}$$

$$t = 2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{– spezielle Lösung}$$

Finden Sie die Lösung folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

EG = Eliminationsgleichung

Schritt 1: EG $\to$

4 Gleichungen mit 4 Unbekannten

$$\begin{cases} \boxed{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7} & (= G_1) \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10 & (-G_1) \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = -2 & (-2G_1) \\ 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 - x_4 = 4 & (-2G_1) \end{cases}$$

Schritt 2: EG $\to$

3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\begin{cases} \boxed{-3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3} & (= G_2) \\ -3x_2 + x_3 - x_4 = -16 & (-G_2) \\ 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -10 & (+G_2) \end{cases}$$

Schritt 3: EG $\to$

2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

$$\begin{cases} \boxed{3x_3 + x_4 = -19} & (= G_3) \\ 2x_3 - 5x_4 = -7 & (+5G_3) \end{cases}$$

Die Eliminationsgleichungen bilden das gesuchte gestaffelte Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
G_1: &\quad x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 = 7 \\
G_2: &\quad -3\,x_2 - 2\,x_3 - 2\,x_4 = 3 \\
G_3: &\quad 3\,x_3 + x_4 = -19 \\
G_4: &\quad x_3 = -6
\end{aligned}
$$

Lösung: $x_1 = \dfrac{56}{3}, \quad x_2 = \dfrac{11}{3}, \quad x_3 = -6, \quad x_4 = -1$

Linearer Vektorraum:

(x_1, x_2)	$P = (x_1, x_2)$	$\vec{X} = (x_1, x_2)$
(x_1, x_2, x_3)	$P = (x_1, x_2, x_3)$	$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Diese Äquivalenz ermöglicht, die Lösung eines linearen Gleichungssystems als Punkt oder als Vektor in einem Raum der entsprechenden Dimension anzusehen.

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem: 3 Gleichung mit 3 Unbekannten:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = c_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = c_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = c_3 \end{cases}$$

In Matrizenform wird das Gleichungssystem so aufgeschrieben:

$$A\,\vec{x} = \vec{c}: \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A \mid \boldsymbol{c})$ deutet darauf hin, ob das System eine eindeutige, unendlich viele oder keine Lösung hat:

$$(A \mid \vec{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right)$$

$Rg\,(A)$ − der Rang der Matrix A,

$Rg\,(A \mid \mathbf{c})$ − der Rang der erweiterten Matrix $(A \mid \mathbf{c})$,

n − die Anzahl der Unbekannten des linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem besitzt:

1) Eine eindeutige Lösung, wenn $Rg\,(A) = Rg\,(A \mid \mathbf{c}) = n$.

2) Unendlich viele Lösungen, wenn $Rg\,(A) = Rg\,(A \mid \mathbf{c}) < n$.

3) Keine Lösung, wenn $Rg\,(A) \neq Rg\,(A \mid \mathbf{c})$.

Das werden wir an der schon diskutierten Aufgabe 1 zeigen.

Gleichungssystem 1 von Aufgabe 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases} \qquad (A \mid \vec{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{2Z - \frac{1}{2}\,1Z} \\ \xrightarrow{3Z - \frac{1}{2}\,1Z} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{21}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (\cdot\, 2/5) \\ (\cdot\, 2/3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{3Z + 2Z} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$$

$$4x_3 = -8, \qquad x_3 = -2$$

$$x_2 + x_3 = -1, \qquad x_2 = -1 - x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 11, \qquad 2x_1 = 11 - x_2 + x_3 = 8, \qquad x_1 = 4$$

Gleichungssystem 2 von Aufgabe 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \qquad (A \mid \vec{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{2Z - \frac{1}{2}\,1Z} \\ \xrightarrow{3Z + \frac{1}{2}\,1Z} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} (\cdot\ 2/5) \\ (\cdot\ -2/5) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -\frac{13}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{3Z + 2Z} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{18}{5} \end{array}\right)$$

Keine Lösung: $Rg\,(A) \neq Rg\,(A \mid \boldsymbol{c})$.

Gleichungssystem 3 von Aufgabe 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

$$(A\,|\,\vec{c}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 11 \\ 1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 1 & -2 & -3 & | & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 11 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Unendlich viele Lösungen, wenn $Rg\,(A) = Rg\,(A\,|\,\boldsymbol{c}) = 2,\ 2 < n\ \ (n = 3)$.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 6+t \\ -1-t \\ t \end{pmatrix}, \qquad x_3 = t$$

Die Matrix M sei eine n-reihige Matrix und ihre Determinante sei nicht null. Dann gilt:

- $Rg\,(M) = n$,
- M ist regulär und invertierbar,
- Das LGS $M\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ ist eindeutig lösbar,
- Die Zeilen- und Spaltenvektoren von M sind linear unabhängig.