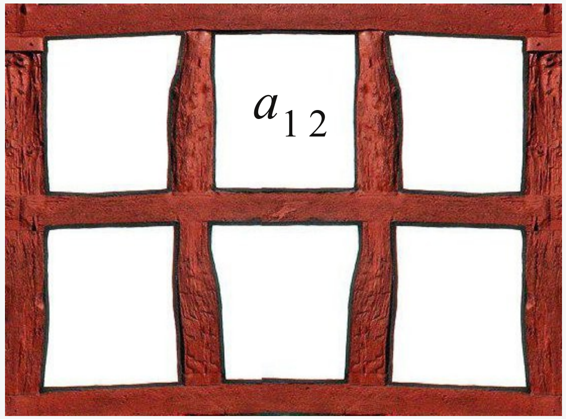
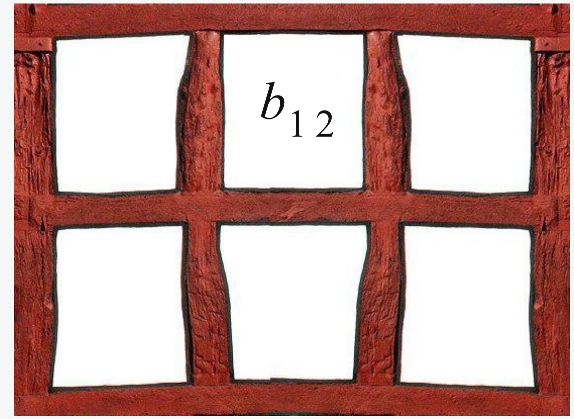
Matrizenaddition

A



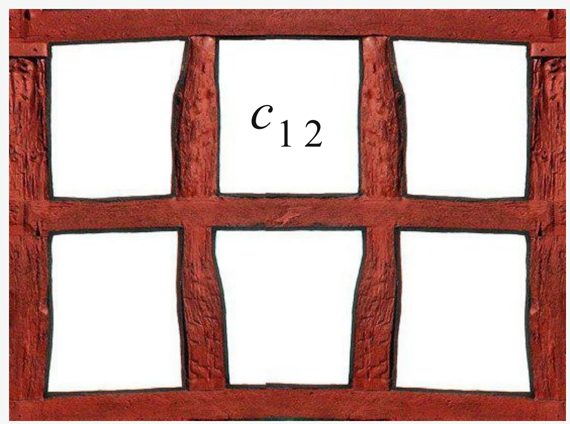
$+$

B



$=$

C



$$c_{12} = a_{12} + b_{12}$$

$$C = A + B, \qquad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

Die Matrizen A und B haben die gleiche Dimension.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+3 \\ 4+4 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Differenz $A - B$.

Für die Addition und Subtraktion von Matrizen gelten:

$A + B = B + A$	Kommutativgesetz
$(A + B) + C = A + (B + C)$	Assoziativgesetz
$A + 0 = A$	Addition der Nullmatrix
$A - A = A + (-A) = 0$	Addition der entgegengesetzten Matrix
$(A + B)^T = A^T + B^T$	Addition transponierter Matrizen

Man multipliziert eine Matrix mit einer Zahl, indem man jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert. Die Zahl kann reell, imaginär oder komplex sein.

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \ldots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \ldots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \ldots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2\,A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

$C = A + i\,B$ – komplexe Matrix, A – Realteil, B – Imaginärteil

$C^* = A - i\,B$ – konjugiert komplexe Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 2 & 3+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ 2 & 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik})$$

Für die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl gilt:

$\lambda A = A \lambda$	Kommutativgesetz
$\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$	Assoziativgesetz
$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$	Distributivgesetze
$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$	
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$	Multiplikation einer transponierten Matrix

Matrizenaddition: Aufgabe 2

Berechnen Sie mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a)\ A + B, \qquad b)\ A - 2B, \qquad c)\ A - B + C$

$d)\ A - 4B + G, \qquad e)\ C - B + 2F, \qquad f)\ G - F$

$g)\ F + 2G, \qquad h)\ G + \dfrac{1}{2} F$

Matrizenaddition: Lösung 2

$$a)\quad A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad A - 2B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad A - B + C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f)\quad G - F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g)\quad F + 2G = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$h)\quad G + \frac{1}{2}F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Folgende Ausdrücke sind nicht bestimmt

$$d)\quad A - 4B + G, \qquad e)\quad C - B + 2F$$

Berechnen Sie mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$a)\ A + 2B, \quad b)\ 3A - B, \quad c)\ 2A - B + C$

$d)\ A - C + F, \quad e)\ G + F, \quad f)\ 3G - F$

$g)\ F + 2G - A, \quad h)\ G + 3F - 7B$

Matrizenaddition: *Lösung 3*

$$a)\quad A + 2B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 8 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad 3A - B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 9 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad 2A - B + C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad G + F = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f)\quad 3G - F = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 9 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Ausdrücke für *d), g)* und *h)* sind nicht bestimmt.

Satz:

Jede quadratische Matrix A ist darstellbar als Summe einer symmetrischen Matrix und einer antisymmetrischen Matrix. Es gilt:

$$A_s = \frac{1}{2}\,(A + A^T) \quad \text{– symmetrische Matrix}$$

$$A_a = \frac{1}{2}\,(A - A^T) \quad \text{– antisymmetrische Matrix}$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Zerlegung der Matrix in die Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad d)\quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizenaddition: Lösung 4a

$$A_s = \frac{1}{2}\,(A + A^T), \qquad A_a = \frac{1}{2}\,(A - A^T)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_s = \frac{1}{2}\,(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_a = \frac{1}{2}\,(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -8 & -6 \\ 8 & 0 & 8 \\ 6 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{A_s} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}}_{A_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizenaddition: Lösung 4b

$$B_s = \frac{1}{2}\,(B + B^T), \qquad B_a = \frac{1}{2}\,(B - B^T)$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_s = \frac{1}{2}\,(B + B^T) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_a = \frac{1}{2}\,(B - B^T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $C_s = \frac{1}{2}\left(C + C^T\right), \qquad C_a = \frac{1}{2}\left(C - C^T\right)$

$$C_s = \frac{1}{2}\left(C + C^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C_a = \frac{1}{2}\left(C - C^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $G_s = \frac{1}{2}\left(G + G^T\right), \qquad G_a = \frac{1}{2}\left(G - G^T\right)$

$$G_s = \frac{1}{2}\left(G + G^T\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G_a = \frac{1}{2}\left(G - G^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$