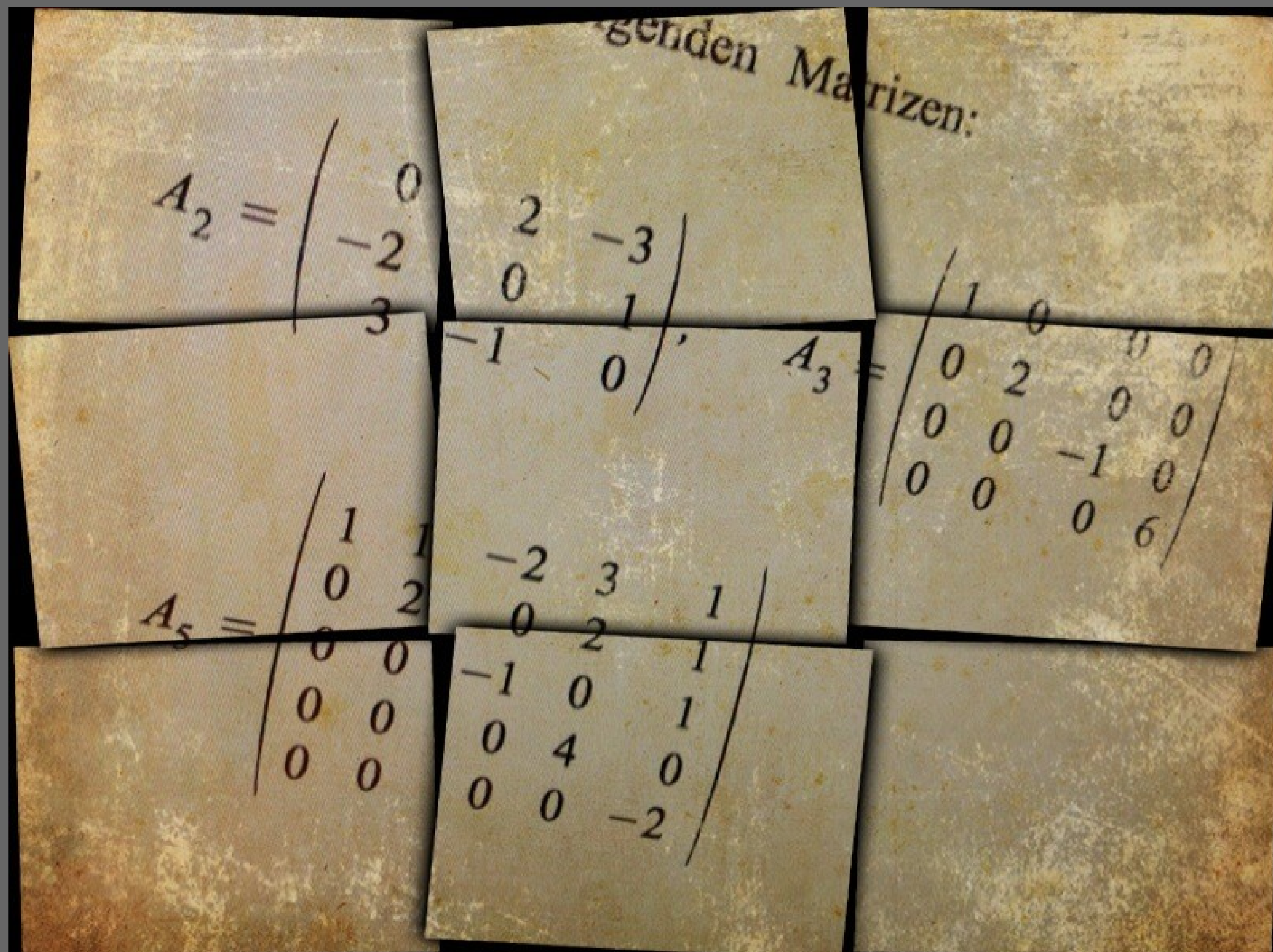

Matrizen: Grundbegriffe

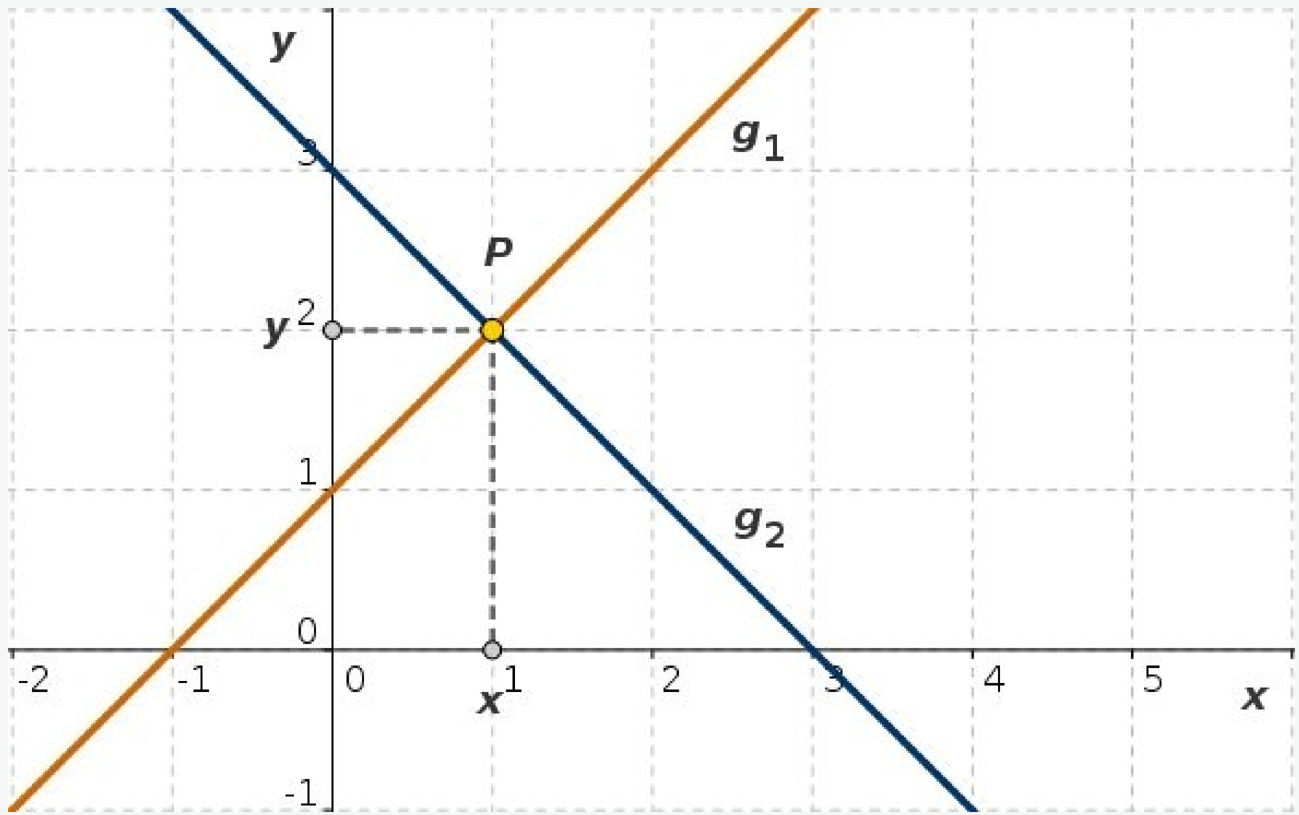

Abb. 1: Der Schnittpunkt P der beiden Geraden ist die graphische Lösung des linearen Gleichungssystem

$$\begin{cases} g_1: \quad y = x + 1, \\ g_2: \quad y = 3 - x, \end{cases} \qquad x = 1, \quad y = 2$$

LGS-1:

$$\begin{cases} g_1: \quad y = x + 1, & -x + y = 1 \\ g_2: \quad y = 3 - x, & x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (-1,\ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \\ x + y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (1,\ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \end{cases}$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass dieses lineare Gleichungssystem in Form einer Matrixgleichung dargestellt werden kann:

LGS-1: $\quad A\,\vec{r} = \vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Lösung dieser Matrizengleichung gibt uns die gesuchten x- und y-Werte.

LGS-2:

$$\begin{cases} g_1: & -x + y + z = 0 \\ g_2: & x - 3y - 2z = 5 \\ g_3: & 5x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$g_1: \quad -x + y + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1,\ 1,\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$g_2: \quad x - 3y - 2z = 5 \quad \Leftrightarrow \quad (1,\ -3,\ -2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5$$

$$g_3: \quad 5x + y + 4z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (5,\ 1,\ 4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$$

LGS-2: $A\,\vec{r} = \vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A\ \vec{x} = \vec{c}}$$

reelle Matrix (Koeffizientenmatrix)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Spaltenvektors:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reelle (m, n)-Matrix

$$
\begin{array}{cl}
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix} & \longrightarrow \ i\text{-te Zeile} \\
\downarrow \ k\text{-te Spalte} &
\end{array}
$$

a_{ij} – Matrixelemente

$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$

i – Zeilenindex, j – Spaltenindex

Der Platz des Matrixelementes ist eindeutig festgelegt.

Reelle (m, n)-Matrix
- ist ein geordnetes Zahlenschema;
- besteht aus m Zeilen und n Spalten;
- besitzt keinen Zahlenwert.

Die Anzahl der Zeilen und Spalten wird auch als Dimension einer Matrix bezeichnet.

Eine *(m,n)*-Matrix enthält genau m Zeilenvektoren und n Spaltenvektoren.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Der Spaltenvektor besitzt m Komponenten, ist ein Vektor aus dem m-dimensionalen Raum.

Der Zeilenvektor besitzt n Komponenten, ist ein Vektor aus dem n-dimensionalen Raum.

Nullmatrix

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2,4)-Matrix

Zeilenmatrix
(Zeilenvektor)

$$A_{(1,\,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Spaltenmatrix
(Spaltenvektor)

$$A_{(m\,,\,1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1:

Wie lauten Elemente $a_{1\,2}$, $a_{1\,3}$, $a_{2\,1}$, $a_{2\,4}$ der Matrix A ?

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Die (2,3)-Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a^1 = (1,\ 3,\ 5), \qquad a^2 = (7,\ 12,\ 4)$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Spaltenvektoren und Dimensionen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_A = 2, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad d_B = 3, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad d_C = 5$$

3. Zeilenvektoren und Dimensionen:

$$A = (2,\ 0,\ 6,\ -1), \quad d_A = 4, \qquad B = (2,\ 1,\ 4,\ -1,\ -3), \quad d_B = 5$$

$A \to A^T$: man vertauscht Zeilen und Spalten miteinander

erste Zeile von A $\to$ erste Spalte von A^T

zweite Zeile von A $\to$ zweite Spalte von A^T

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m \times n)-$Matrix A

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$(n \times m)-$Matrix A^T

Vertauschen der beiden Indizes: $a_{ik}^T = a_{ki}$

Durch 2-maliges Transponieren erhält man wieder die Ausgangsmatrix:

$$(A^T)^T = A$$

Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 12 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die transponieren Matrizen:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 12 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 12 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C^T = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

Eine quadratische Matrix ist eine Matrix, bei der die Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten übereinstimmt.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix:

n-reihige, quadratische Matrix mit

$a_{ik} = 0 \quad$ für $i \neq k \quad (i\,,\; k\,, = 1,\; 2,\; \dots\,,\; n)$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

Sonderfall der Diagonalmatrix

$a_{ii} = 1, \quad a_{ik} = 0 \qquad$ für $i \neq k \quad (i\,,\; k\,, = 1,\; 2,\; \dots\,,\; n)$

Spezielle quadratische Matrizen

Dreiecksmatrizen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix

$a_{ik} = 0$ für $i < k$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix

$a_{ik} = 0$ für $i > k$

Symmetrische Matrix:

$a_{ik} = a_{ki} \qquad A^T = A$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Antisymmetrische Matrix:

$a_{ik} = -a_{ki} \qquad A^T = -A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{ii} = 0$$

Zwei Matrizen A und B sind gleich, $A = B$, wenn für alle i, k gilt:

$$a_{ik} = b_{ik}$$

Welche Eigenschaften besitzen die folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$