http://www.flickr.com/photos/sigfrid/314253773/

Im Folgenden wird an einem Geogebra Beispiel die geometri-Sche Bedeutung der Determinante einer Matrix und ihrer inversen erklärt.

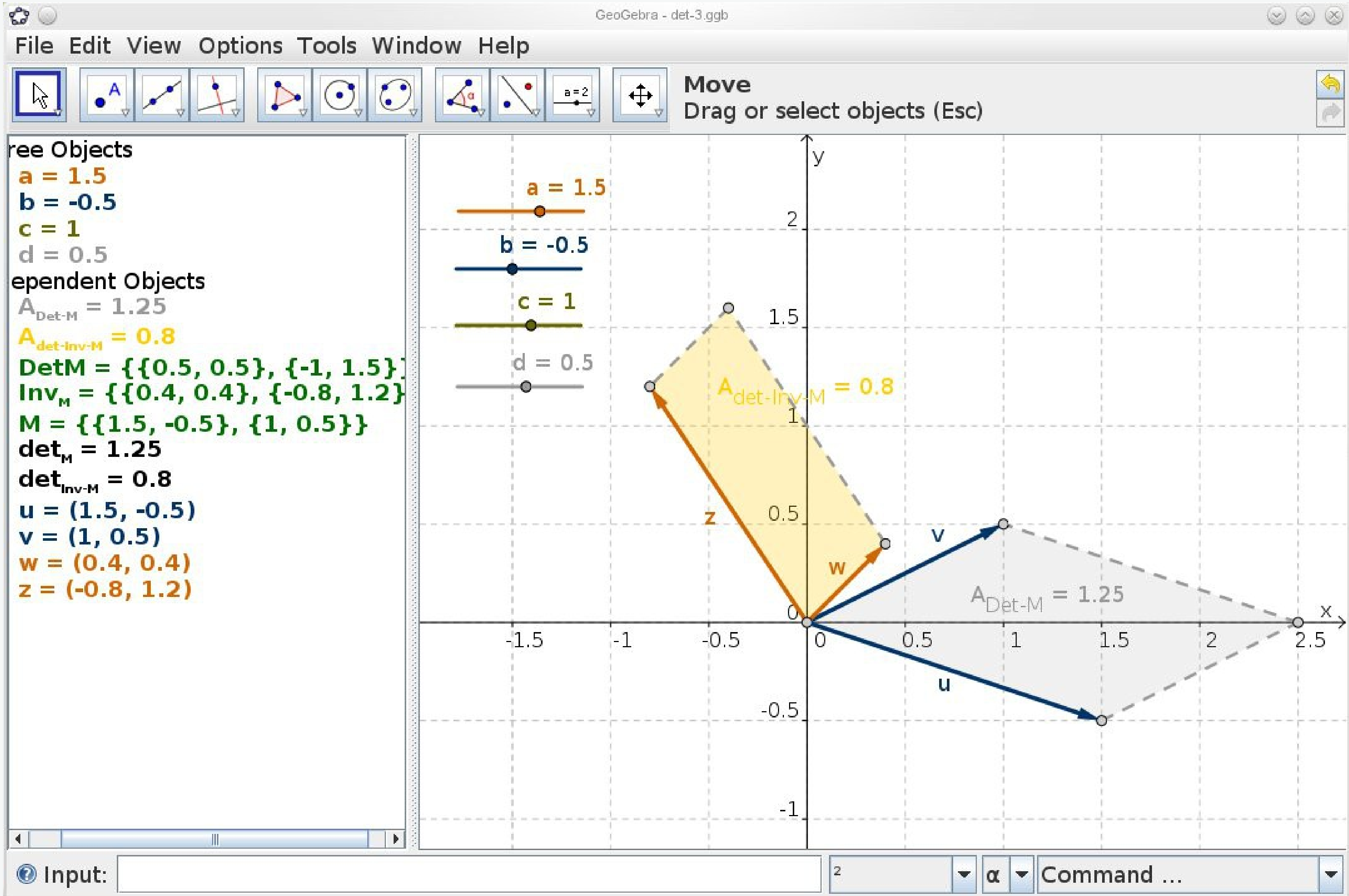
GeoGebra - det-3.ggb
File Edit View Options Tools Window Help
Move
Drag or select objects (Esc)
ree Objects
a = 1.5
b = -0.5
c = 1
d = 0.5
ependent Objects
A_Det-M = 1.25
A_det-Inv-M = 0.8
DetM = {{0.5, 0.5}, {-1, 1.5}}
Inv_M = {{0.4, 0.4}, {-0.8, 1.2}}
M = {{1.5, -0.5}, {1, 0.5}}
det_M = 1.25
det_Inv-M = 0.8
u = (1.5, -0.5)
v = (1, 0.5)
w = (0.4, 0.4)
z = (-0.8, 1.2)
A_det-Inv-M = 0.8
A_Det-M = 1.25
Input:
Command ...

Abbildung 1

Zur Abbildung 1:

- Wir schreiben die Zeilenvektoren einer Matrix M als zwei-Dimensionale Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$:

$$\vec{u} = (a\,,\ b)\,, \qquad \vec{v} = (c\,,\ d)\,, \qquad M = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Die Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ spannen ein Parallelogramm auf. Die Fläche des Parallelogramms entspricht der Determinante der Matrix M. In der Abbildung wird sie als $A_{\text{det-}\,M}$ bezeichnet.

- Die Vektorkomponenten kann man durch Schieben von vier eingezeichneten mit a, b, c und d bezeichneten Stellgrößen ändern.

- Die Vektoren $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{z}$ sind Zeilenvektoren einer zu M inversen Matrix:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\det M}\,(d\,,\ -b)\,, \qquad \vec{z} = \frac{1}{\det M}\,(-c\,,\ a)$$

- Die Vektoeren $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{z}$ spannen ein Parallelogramm auf. Die Fläche des Parallelogramms entspricht der Determinante der inversen Matrix *Inv-M*. In der Abbildung wird sie als $A_{\text{det-inv-}M}$ bezeichnet.

Jetzt erklären wir Abb. 1 am Beispiel bestimmter Werte von a, b, c und d:

$$\vec{u} = (a\,,\ b) = \left(\frac{3}{2}\,,\ -\frac{1}{2}\right), \qquad \vec{v} = (c\,,\ d) = \left(1,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$M = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \det M = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Für die Fläche des Parallelogramms gibt uns Geogebra gerade den Wert der Determinante .

$$\vec{w} = \frac{1}{\det M}\,(d\,,\,-b) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}\,(1,\ 1) = (0.4,\ 0.4)$$

$$\vec{z} = \frac{1}{\det M}\,(-c\,,\ a) = \frac{4}{5}\left(-1\,,\ \frac{3}{2}\right) = (-0.8,\ 1{,}2)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}, \qquad \det M^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 (3 + 2) = \frac{4}{5}$$

Auch dieser Wert gibt uns Geogebra an.

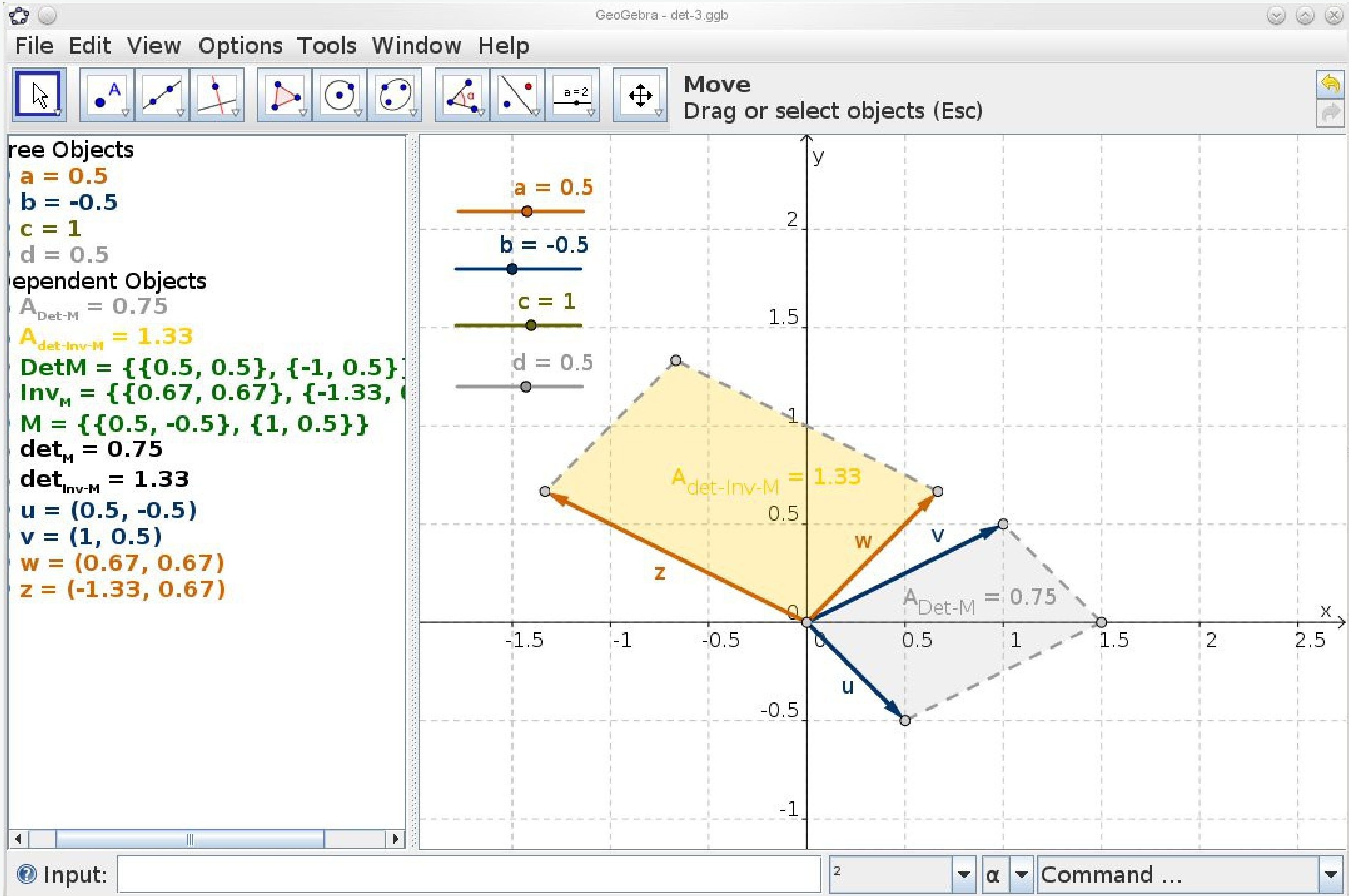
GeoGebra - det-3.ggb
File Edit View Options Tools Window Help
Move
Drag or select objects (Esc)
ree Objects
a = 0.5
b = -0.5
c = 1
d = 0.5
ependent Objects
A_Det-M = 0.75
A_det-Inv-M = 1.33
DetM = {{0.5, 0.5}, {-1, 0.5}
Inv_M = {{0.67, 0.67}, {-1.33,
M = {{0.5, -0.5}, {1, 0.5}}
det_M = 0.75
det_Inv-M = 1.33
u = (0.5, -0.5)
v = (1, 0.5)
w = (0.67, 0.67)
z = (-1.33, 0.67)
a = 0.5
b = -0.5
c = 1
d = 0.5
A_det-Inv-M = 1.33
A_Det-M = 0.75
u
v
w
z
x
y
Input:
Command ...

Abbildung 2

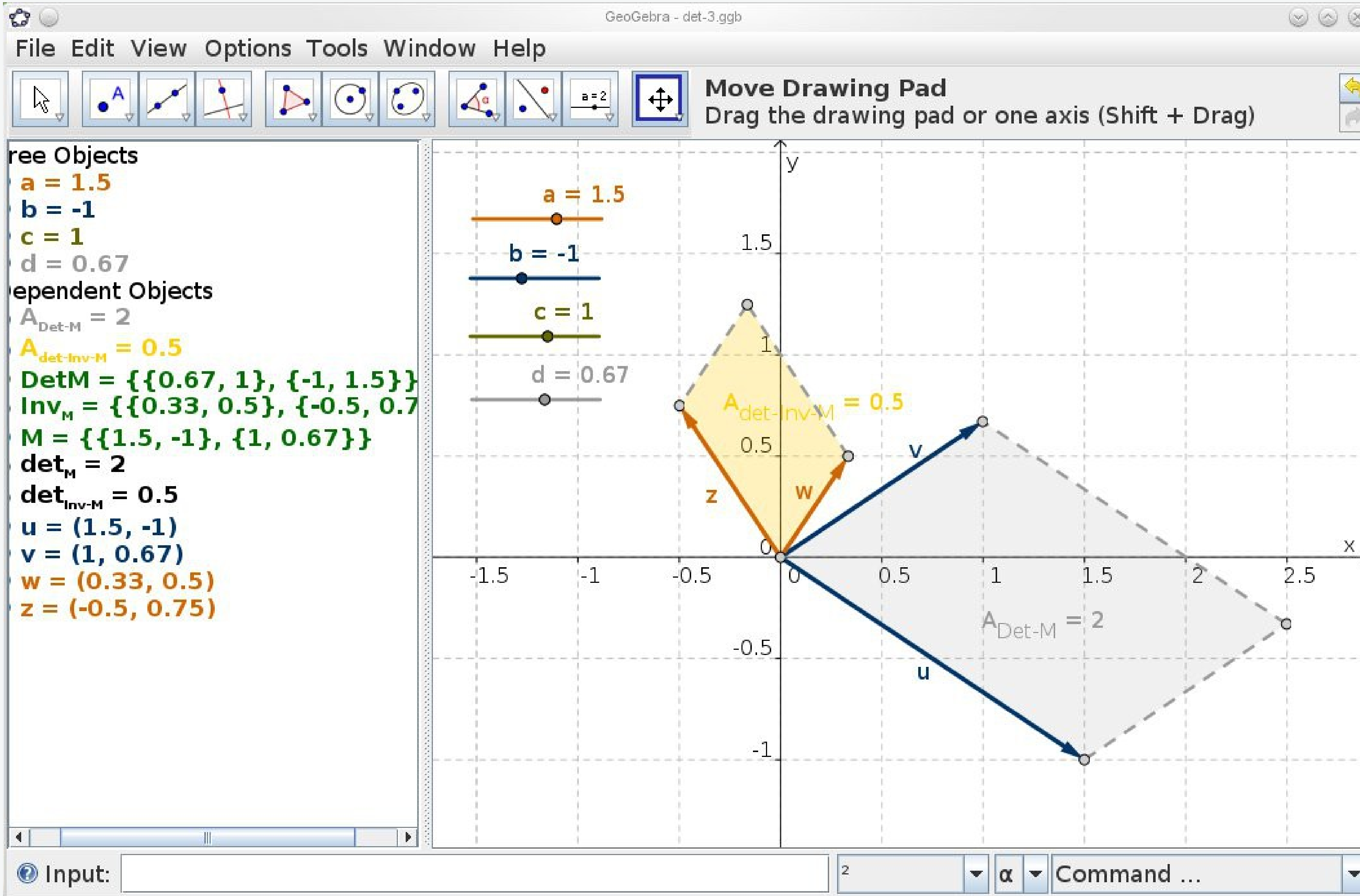
GeoGebra - det-3.ggb
File Edit View Options Tools Window Help
Move Drawing Pad
Drag the drawing pad or one axis (Shift + Drag)
ree Objects
a = 1.5
b = -1
c = 1
d = 0.67
ependent Objects
A_Det-M = 2
A_det-Inv-M = 0.5
DetM = {{0.67, 1}, {-1, 1.5}}
Inv_M = {{0.33, 0.5}, {-0.5, 0.7
M = {{1.5, -1}, {1, 0.67}}
det_M = 2
det_Inv-M = 0.5
u = (1.5, -1)
v = (1, 0.67)
w = (0.33, 0.5)
z = (-0.5, 0.75)
a = 1.5
b = -1
c = 1
d = 0.67
A_det-Inv-M = 0.5
A_Det-M = 2
u
v
w
z
Input:
Command ...

Abbildung 3