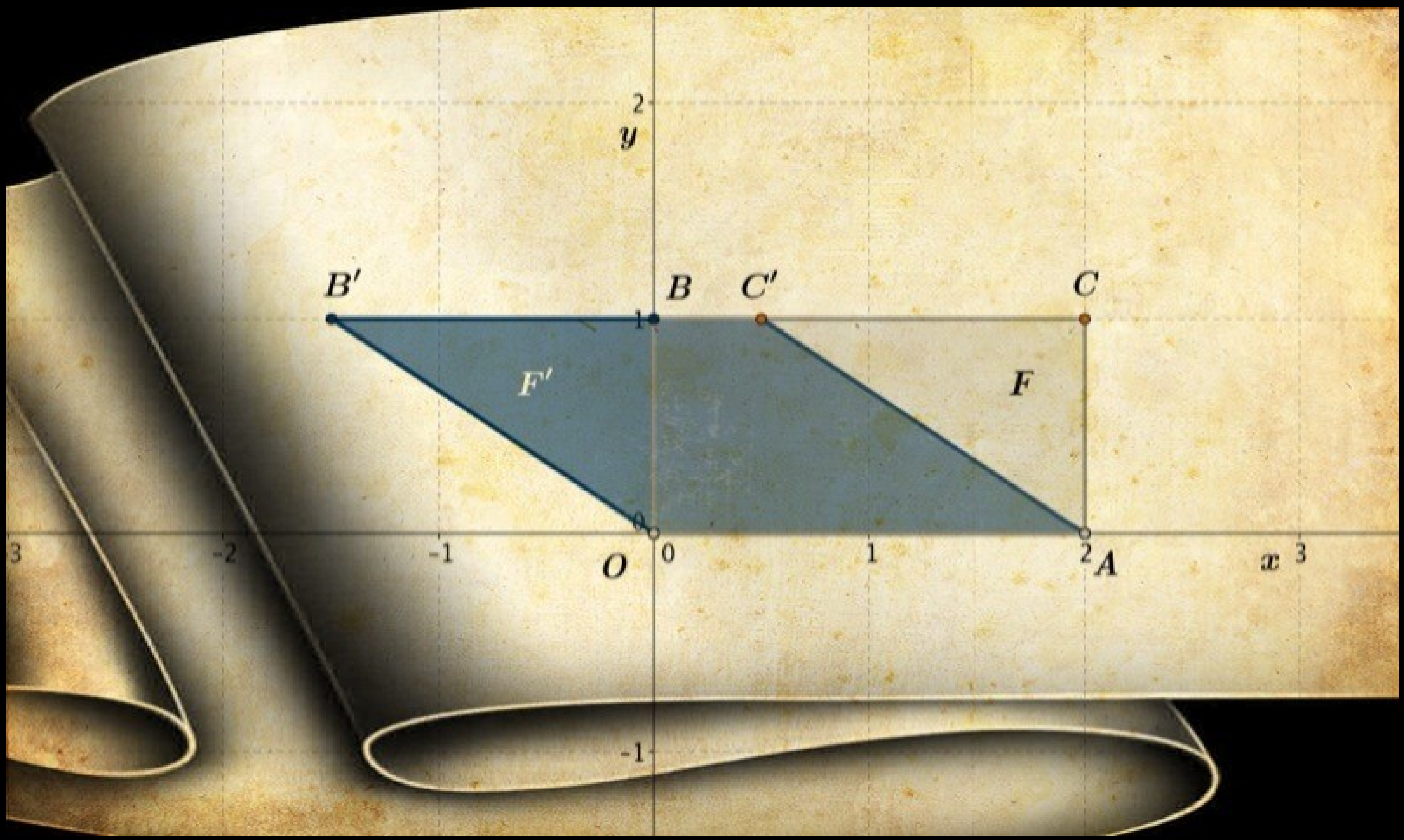


Lineare Transformationen: Aufgaben

Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

Die Vektoren **OA** und **OB** bilden ein Rechteck mit der Fläche F. Beschreiben Sie wie sich diese Fläche durch die Transformation T ändert. Zeichnen Sie die durch die Transformation T entstandene Fläche für gegebene Werte des Parameters m.

$$\overrightarrow{OA} = (2,\ 0), \qquad \overrightarrow{OB} = (0,\ 1)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}$$

$a)\ \ m = 1, \qquad b)\ \ m = 3, \qquad c)\ \ m = \dfrac{1}{2},$

$d)\ \ m = -1, \qquad e)\ \ m = -2.$

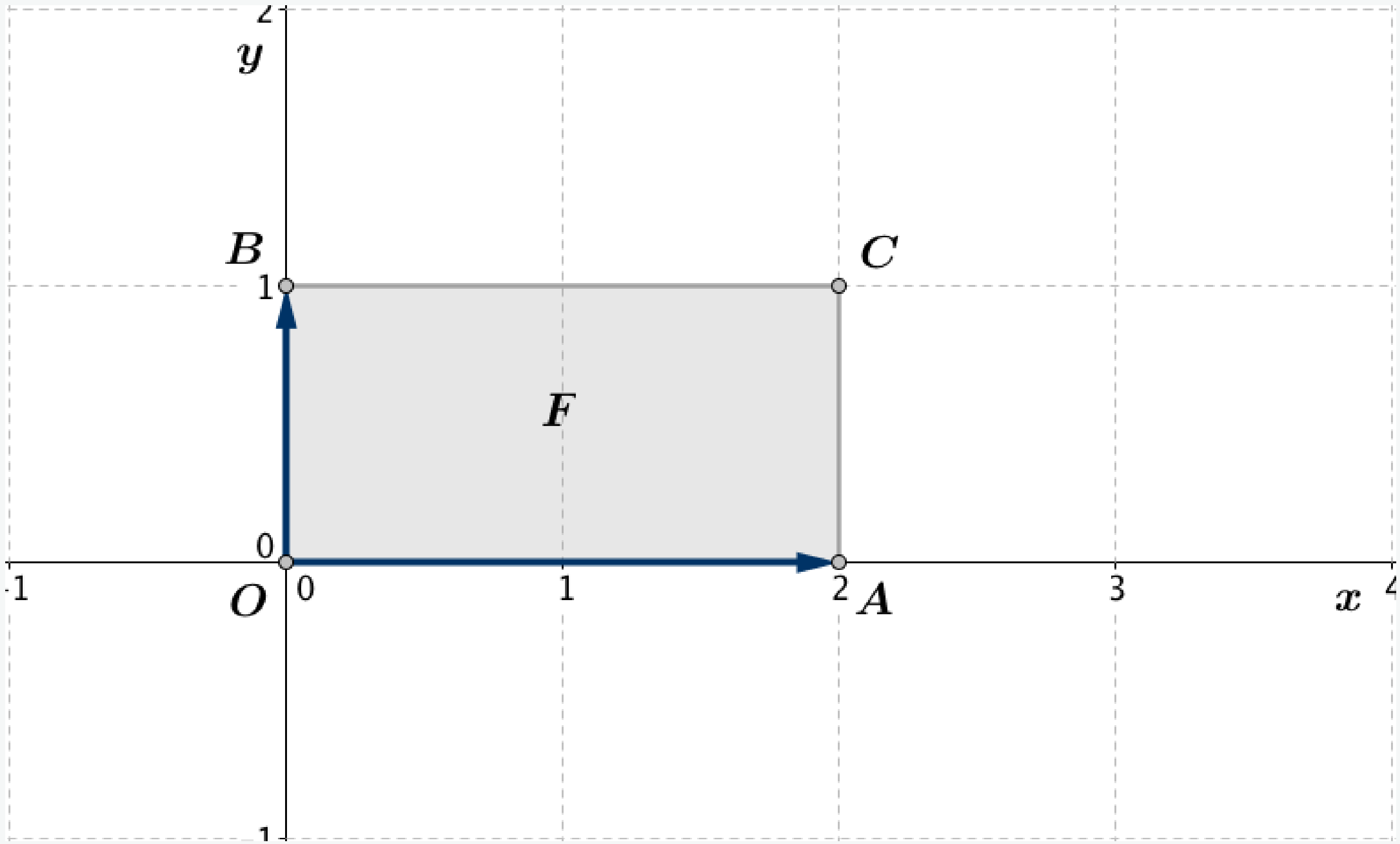


*Abb. 1: Die Fläche, die von den Vektoren **OA** und **OB** aufgespannt wird, ist das Rechteck OACB*

Die Vektoren ***OA*** und ***OB*** bilden ein Rechteck mit der Fläche

$$F = F_{OACB} = \det\left(\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{OB}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ \text{FE}$$

Da die Determinante der Matrix T gleich 1 ist, ändert sich der Flächeninhalt durch diese Transformation nicht.

$$det\, T = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Die y-Komponente des Vektors ***OA*** ändert sich bei der Transformation T nicht:

$$T \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA}$$

Der Vektor ***OB*** bekommt durch diese Transformation eine von Null verschiedene x-Komponente:

$$T \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\, u_y \\ u_y \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB}\,' = \begin{pmatrix} m\,u_y \\ u_y \end{pmatrix}$$

Das Vorzeichen vom m bestimmt, in welchem Quadrant sich der Vektor $\boldsymbol{OB'}$ befindet. Ist m positiv, so liegt er im ersten Quadrant, ist m negativ liegt er im zweiten.

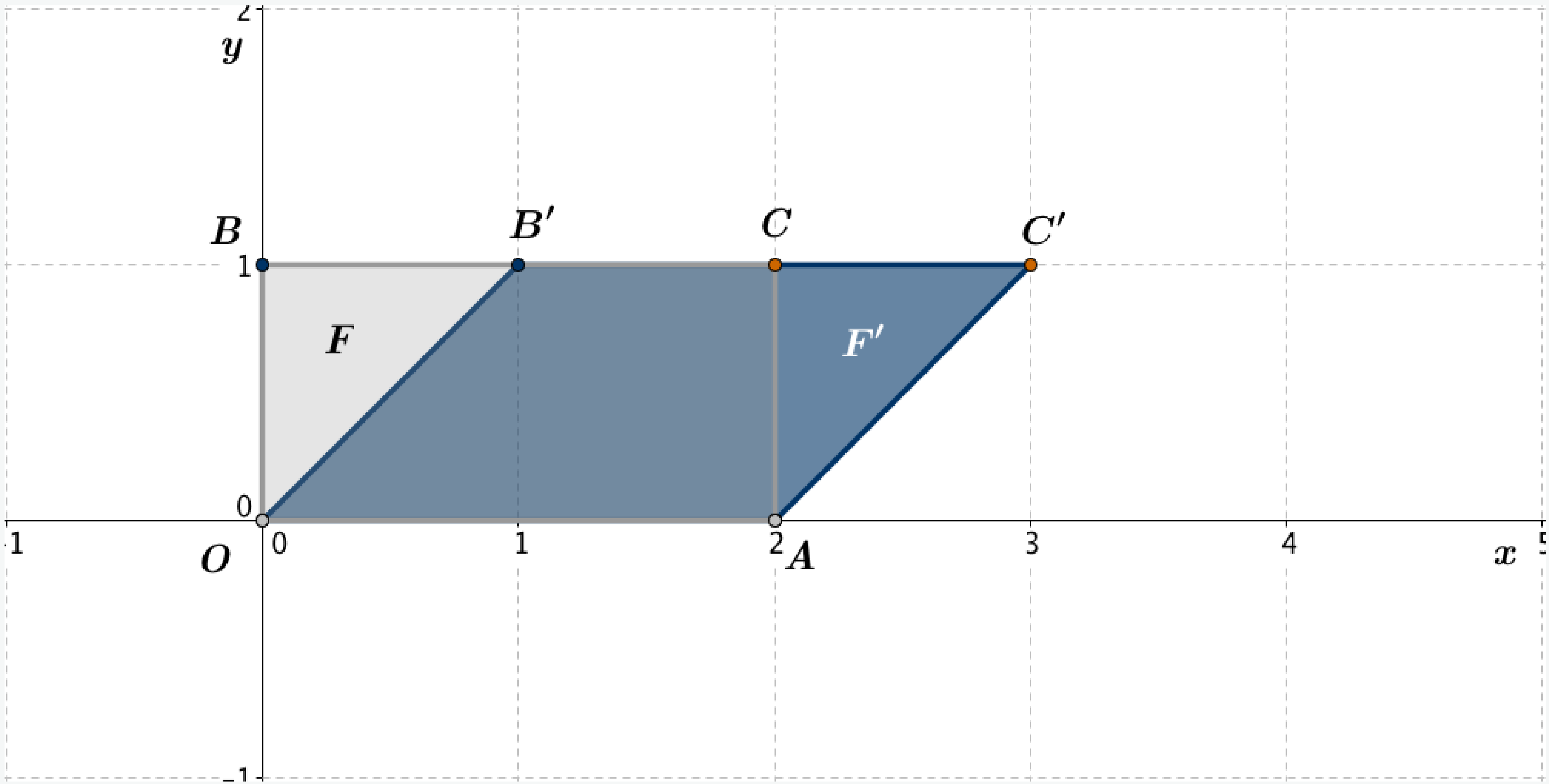


Abb. L1-1: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über. Dabei ändert sich der Flächeninhalt nicht. Die Punkte des Segments OA ändern ihre Position nicht

$$F \overset{T}{\overbrace{\rightarrow}} F\,', \qquad F = F\,', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = 1$$

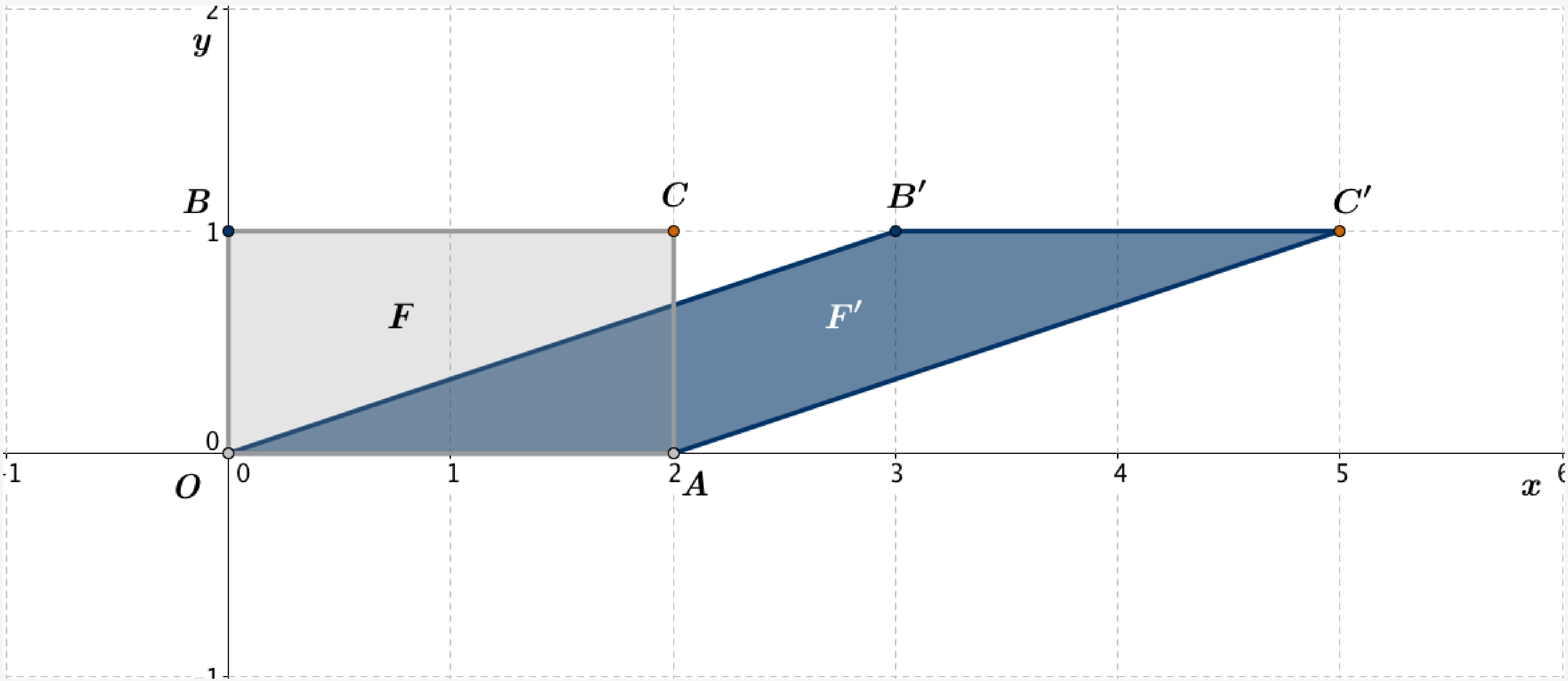


Abb. L1-2: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über

$$F \overset{T}{\overbrace{\rightarrow}} F\,', \qquad F = F\,', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = 3$$

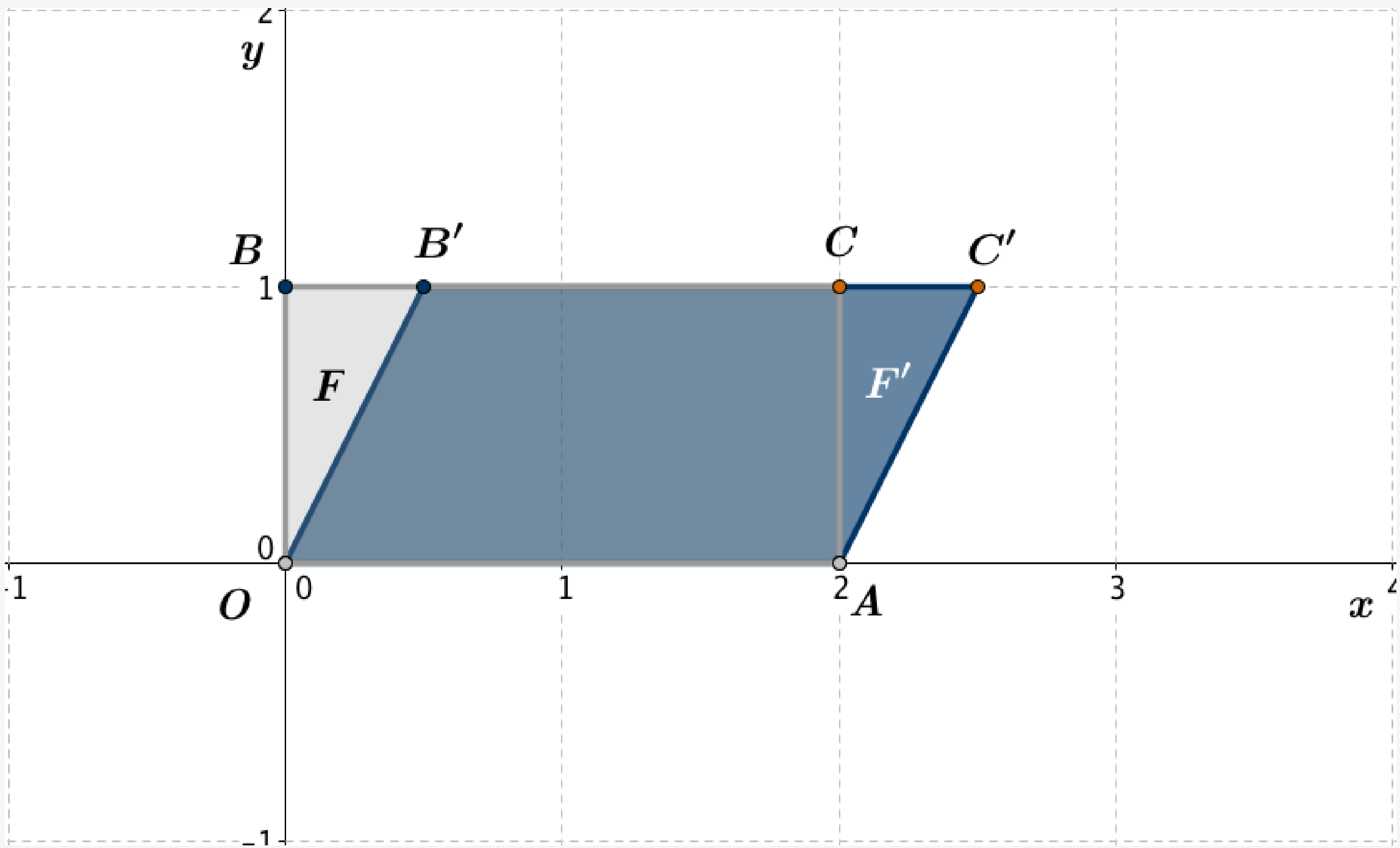


Abb. L1-3: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über

$$F \overset{T}{\rightarrow} F', \qquad F = F', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = \frac{1}{2}$$

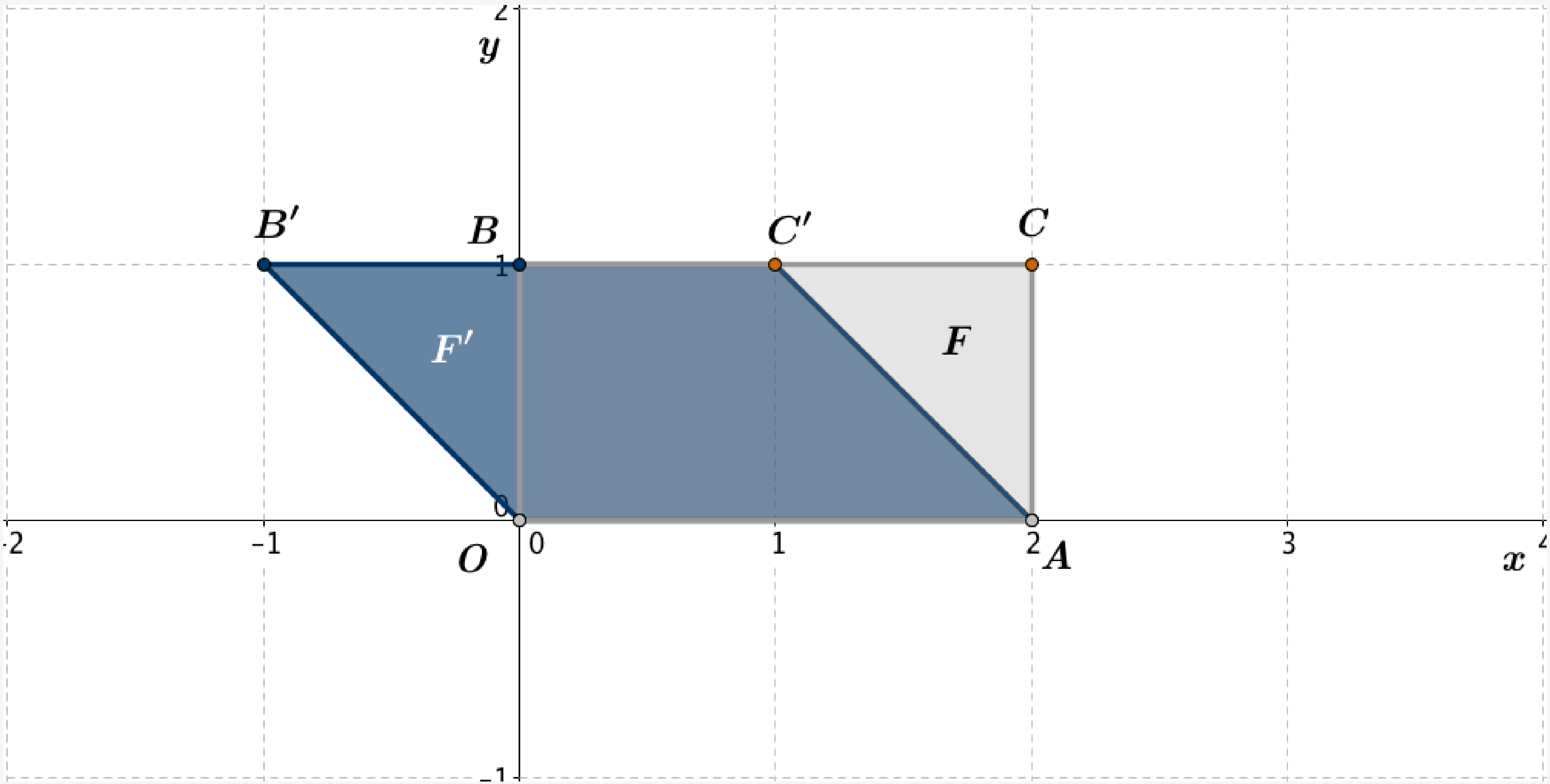


Abb. L1-4: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über

$$F \overset{T}{\rightarrow} F\,', \qquad F = F\,', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = -1$$

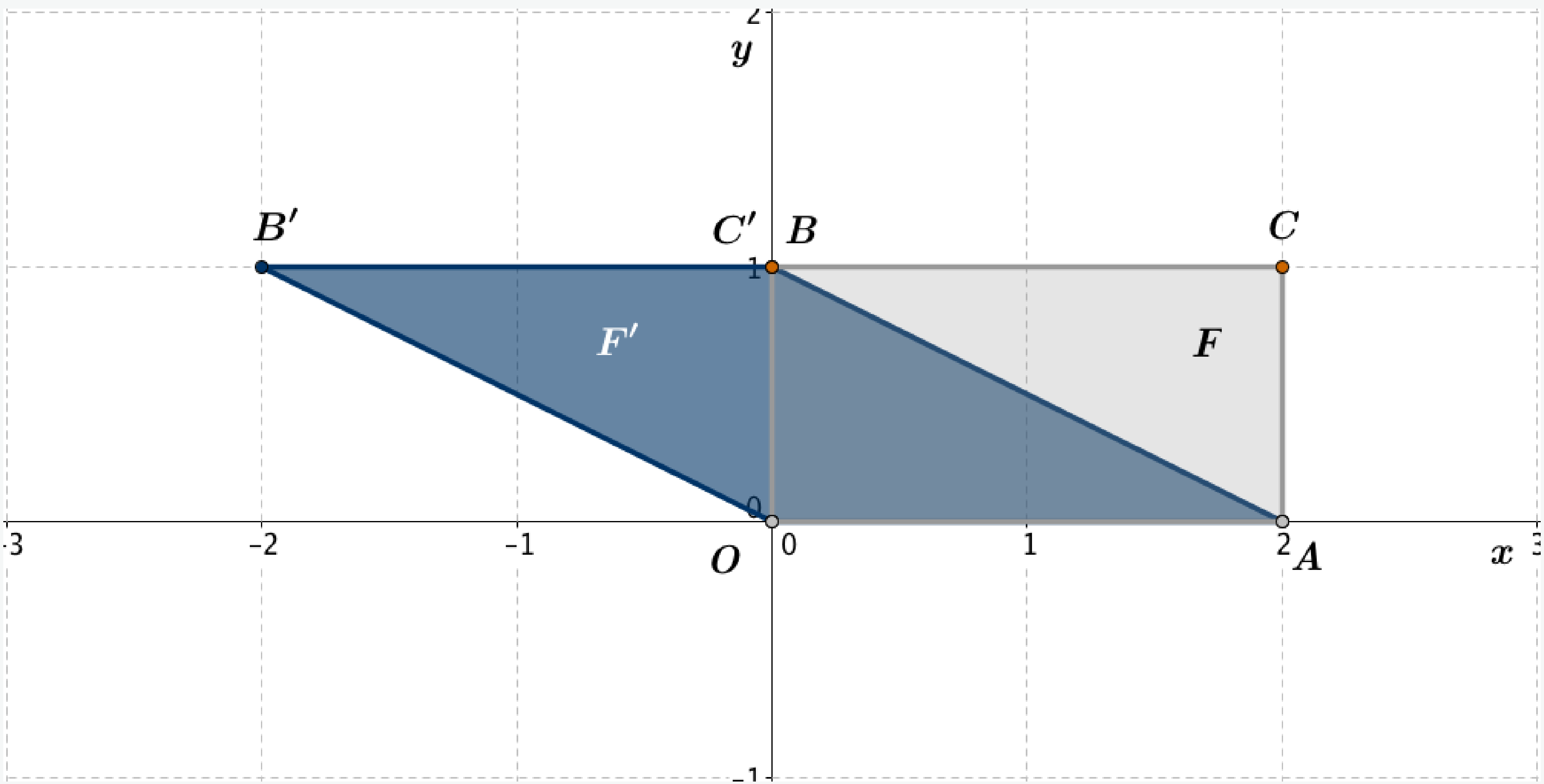


Abb. L1-5: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über

$$F \overset{T}{\rightarrow} F', \qquad F = F', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = -2$$

Die Vektoren $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ bilden ein Rechteck mit der Fläche F. Beschreiben Sie wie sich diese Fläche durch die Transformation T ändert. Zeichnen Sie die durch die Transformation T entstandene Fläche für gegebene Werte des Parameters m.

$$\overrightarrow{OA} = (2,\ 0)\,, \qquad \overrightarrow{OB} = (0,\ 1)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}$$

$$a)\ \ m = \frac{1}{2}\,, \qquad b)\ \ m = 1.1, \qquad c)\ \ m = -1$$

Die Vektoren ***OA*** und ***OB*** bilden ein Rechteck mit der Fläche

$$F = F_{OACB} = \det\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ \text{FE}$$

Da die Determinante der Matrix T gleich 1 ist, ändert sich der Flächeninhalt durch diese Transformation nicht.

$$det\ T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Die x-Komponente des Vektors ***OA*** ändert sich bei der Transformation T nicht, der transformierte Vektor hat aber eine von Null verschiedene y-Komponente:

$$T \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ m\,u_x \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{OA}$$

Der Vektor ***OB***, dessen x-Komponente gleich Null ist, ändert sich bei der Transformation T nicht:

$$T \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB}$$

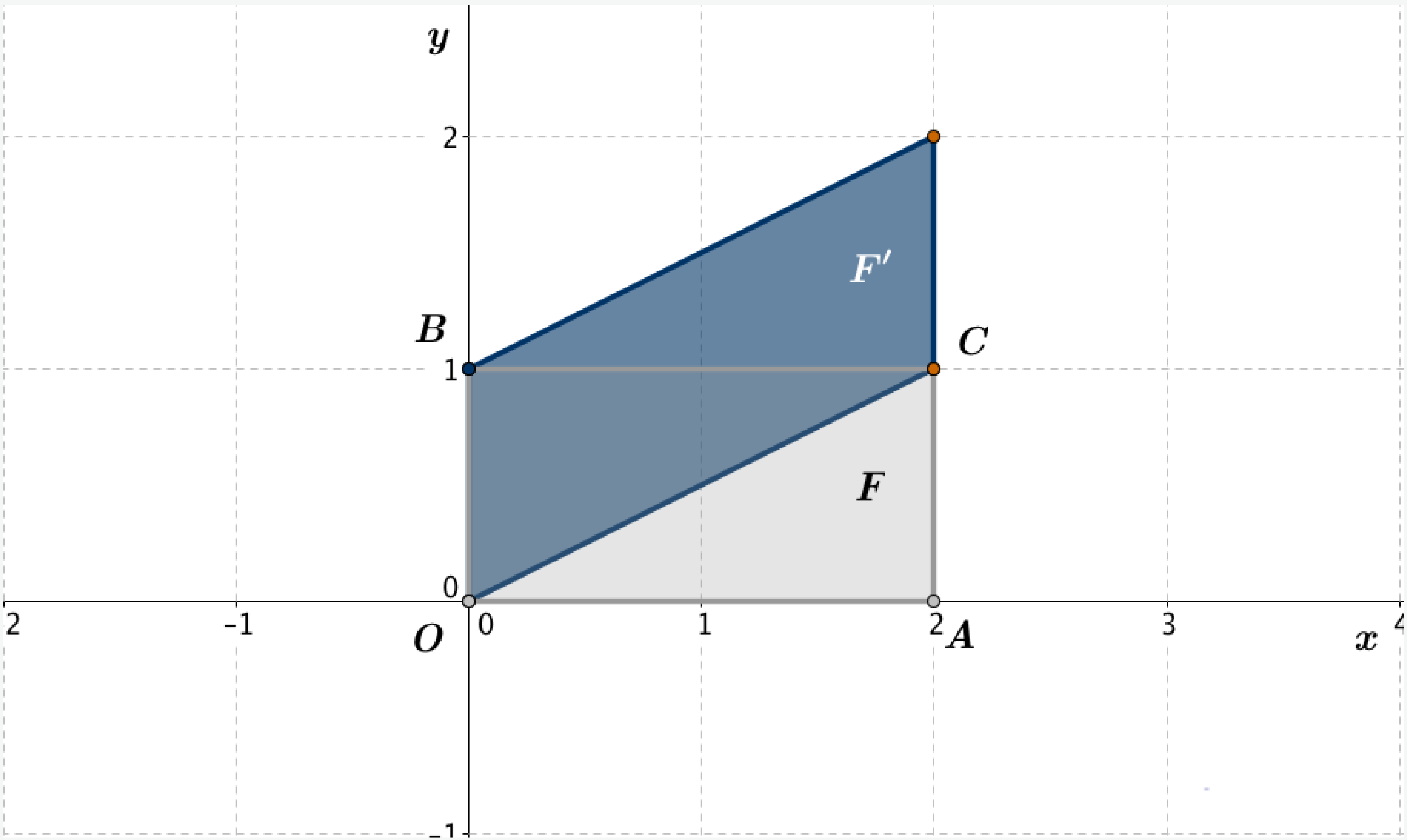


Abb. L2-1: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über. Dabei ändert sich der Flächeninhalt nicht. Die Punkte des Segments OB ändern ihre Position nicht

$$F \overset{T}{\rightarrow} F', \qquad F = F', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = \frac{1}{2}$$

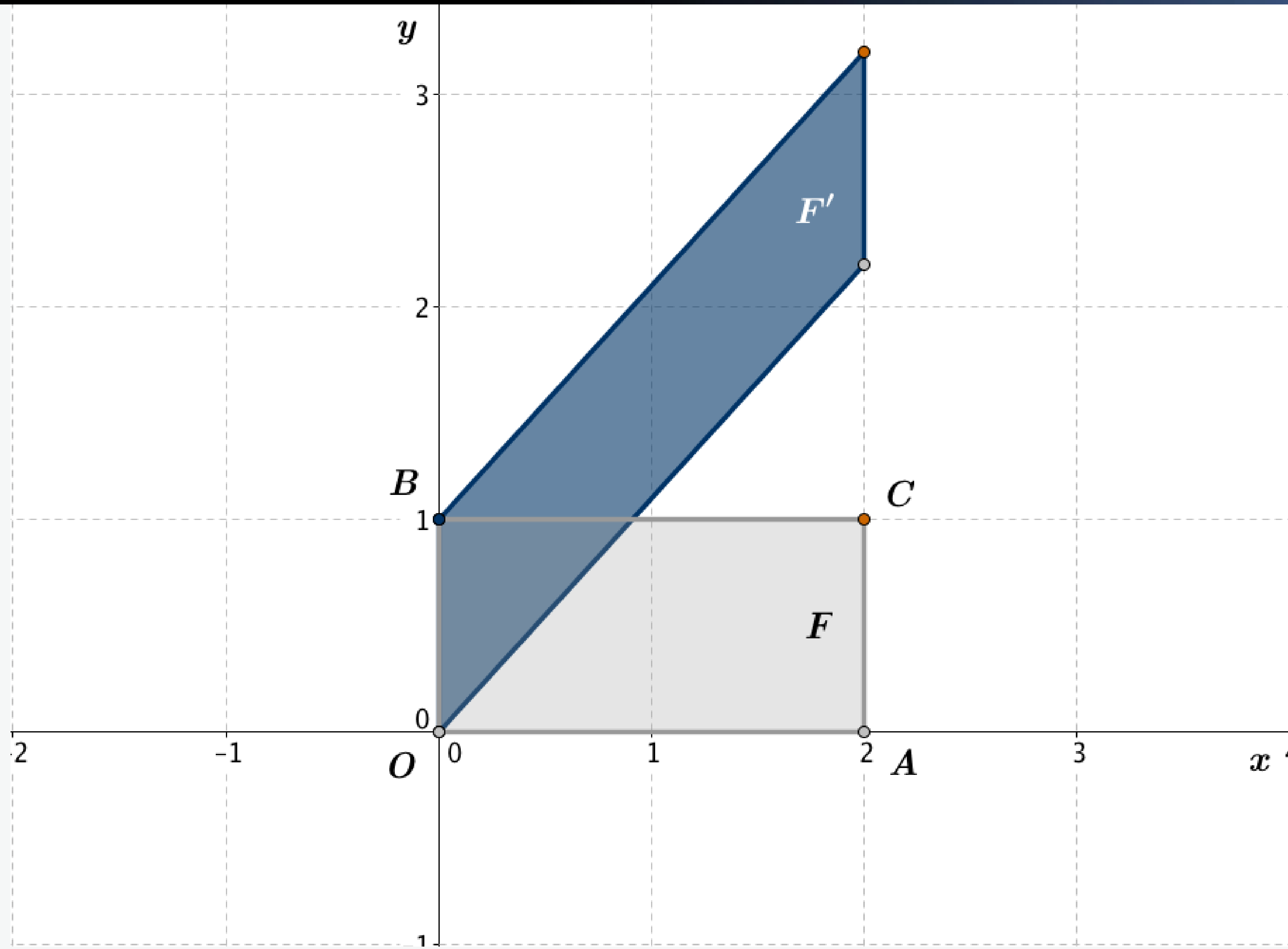


Abb. L2-2: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über

$$F \overset{T}{\rightarrow} F', \qquad F = F', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = 1.1$$

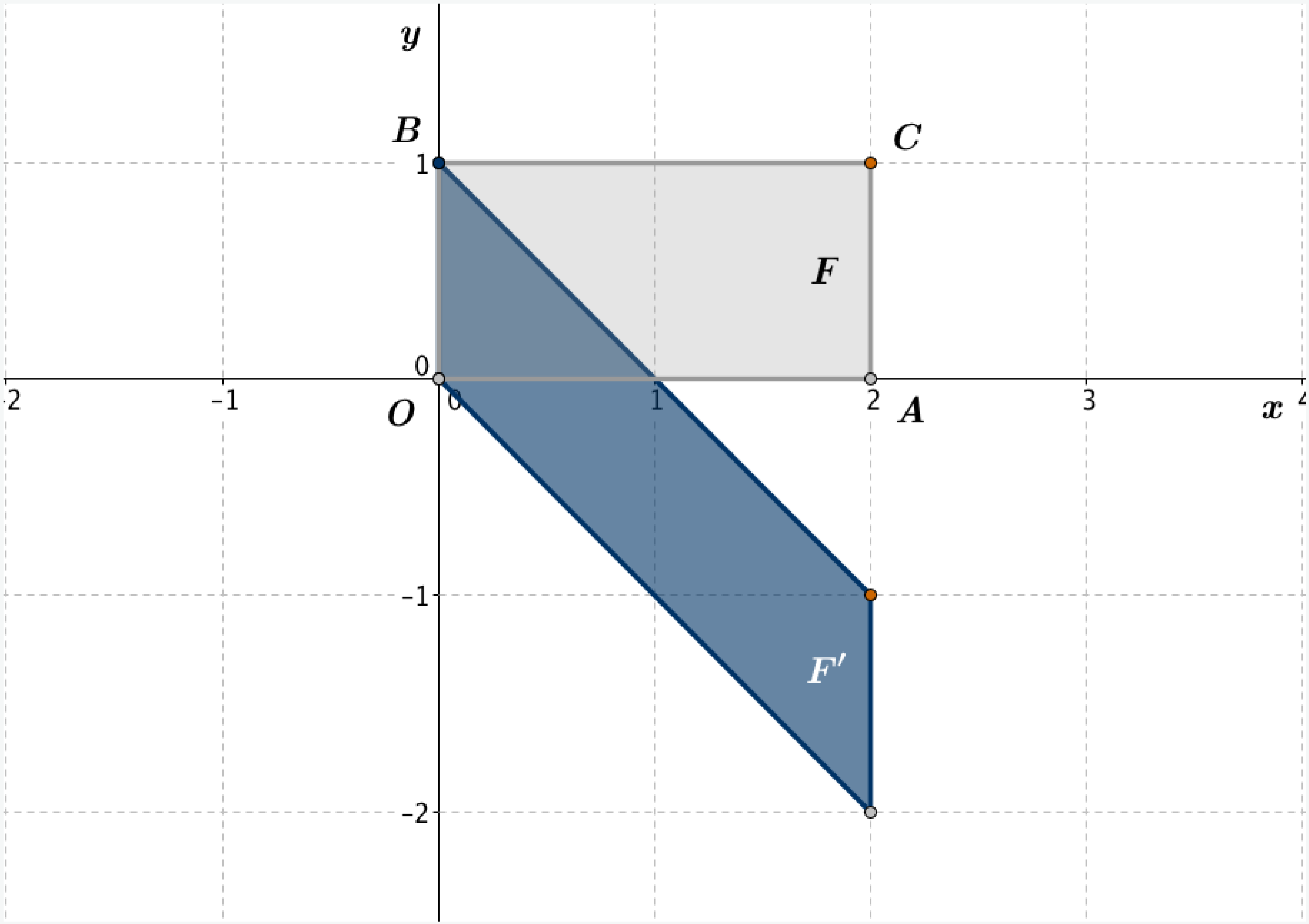


Abb. L2-3: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über

$$F \overset{T}{\rightarrow} F', \qquad F = F', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = -1$$

Die Vektoren ***OA*** und ***OB*** bilden ein Rechteck mit der Fläche F. Beschreiben Sie wie sich diese Fläche durch die Transformation T ändert. Zeichnen Sie die durch die Transformation T entstandene Fläche für gegebene Werte des Parameters m.

$$\overrightarrow{OA} = (2,\ 0), \qquad \overrightarrow{OB} = (0,\ 1)$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ m & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}$$

$a)\ \ m = 1, \qquad b)\ \ m = 0, \qquad c)\ \ m = -1$

Die Vektoren ***OA*** und ***OB*** bilden ein Rechteck mit der Fläche

$$F = F_{OACB} = \det\left(\overrightarrow{OA}, \ \overrightarrow{OB}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ \text{FE}$$

Die Fläche F und die transformierte Fläche F' haben ungleichen Flächeninhalt, da die Determinante der Matrix T nicht gleich 1 ist:

$$det\, T = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ m & 1/2 \end{vmatrix} = 1 + 2\, m$$

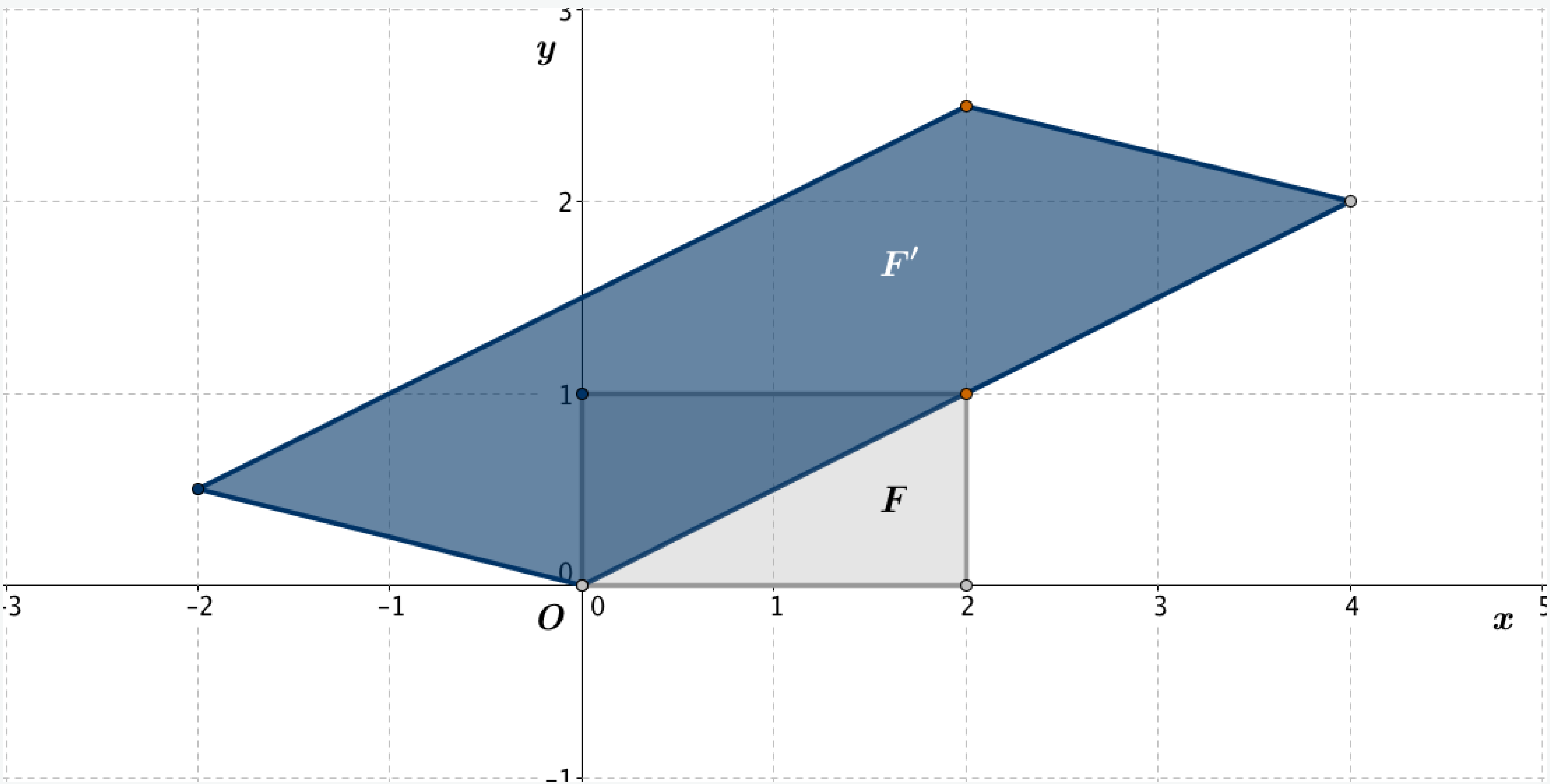


Abb. L3-1: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über. Dabei ändert sich der Flächeninhalt der Fläche F', d.h. $F \neq F'$

$$F \overset{T}{\overbrace{\rightarrow}} F\,', \qquad F \neq F\,', \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad m = 1$$

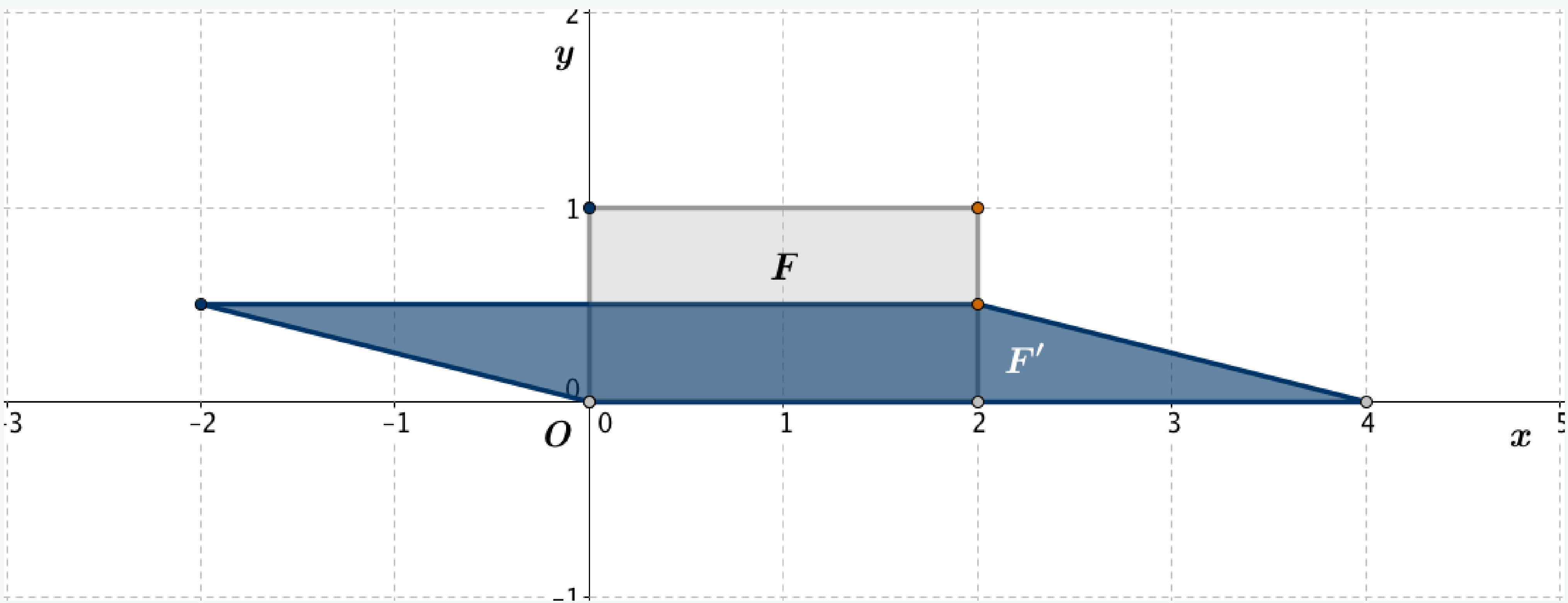


Abb. L3-2: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über. Dabei ändert sich der Flächeninhalt der Fläche F', d.h. $F \neq F'$

$$F \overset{T}{\rightarrow} F', \qquad F = F', \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad m = 0, \qquad det\, T = 1$$

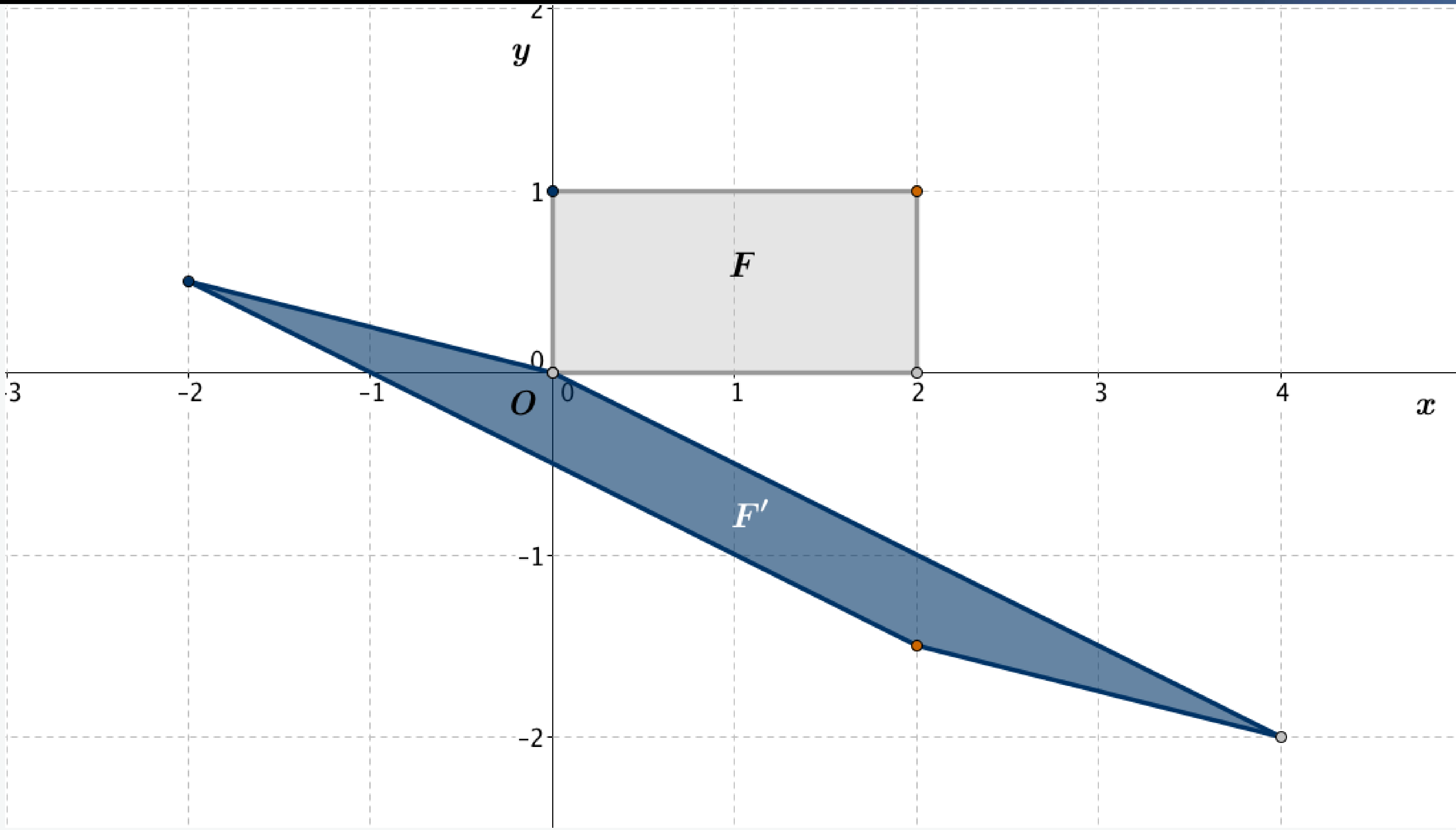
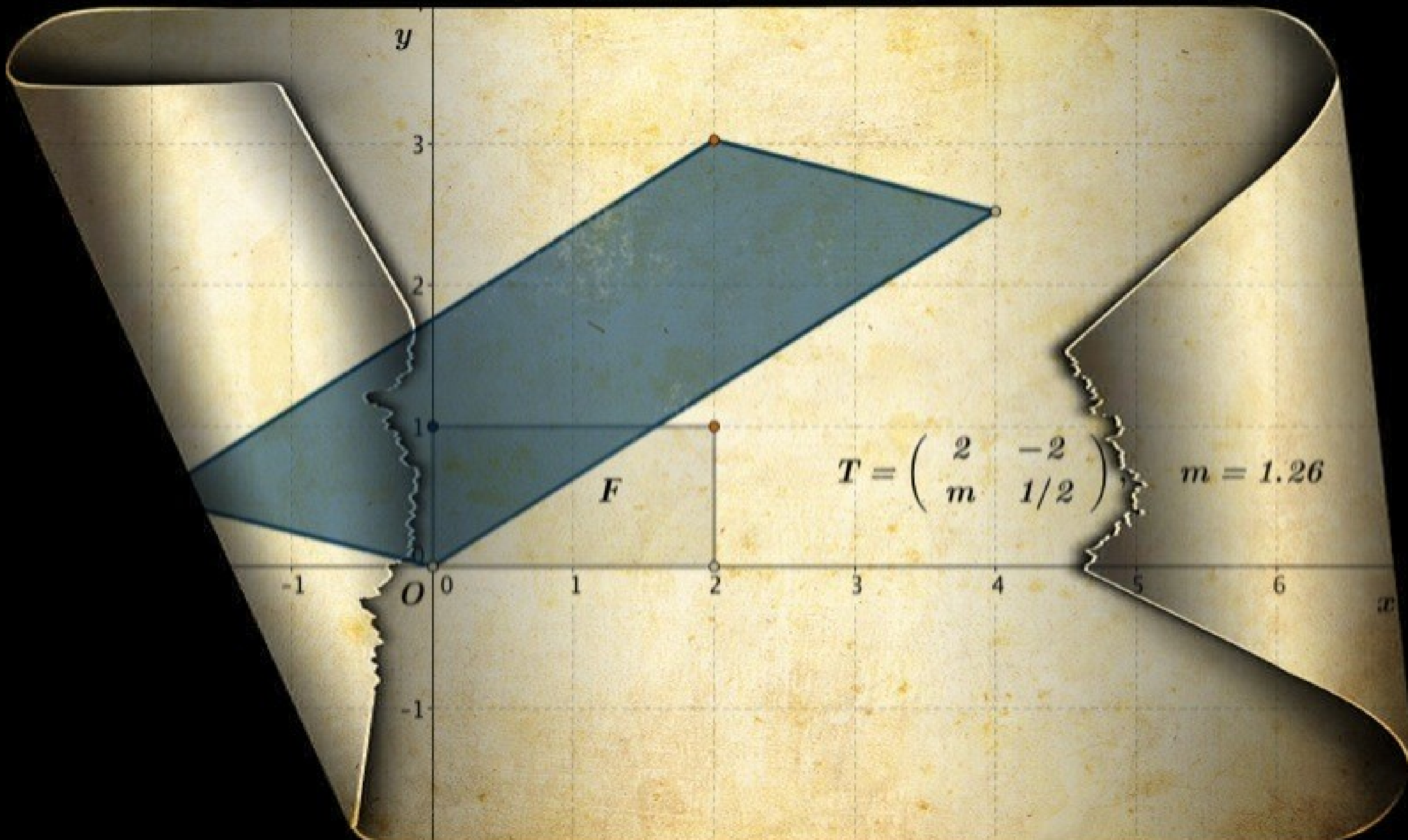


Abb. L3-3: Das Rechteck OACB mit der Fläche F geht durch die Transformation T in das Paralellogramm OAC'B' mit der Fläche F' über. Dabei ändert sich der Flächeninhalt der Fläche F', d.h. $F \neq F'$

$$F \overset{T}{\rightarrow} F\,', \qquad F = F\,', \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad m = -1\,, \qquad det\, T = -1$$


y
x
O
F
$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ m & 1/2 \end{pmatrix}$
$m = 1.26$