Lineare Transformationen und Determinanten

Definition:

V und W sind zwei Vektorräume. Eine Funktion T nennt man eine lineare Transformation von V in W:

$$T: \; V \to W,$$

falls für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ aus V und ein Skalar c die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
2. $T(c\,\vec{u}) = c\,T(\vec{u})$

Aus 2. ergibt sich:

3. $T(\vec{0}) = \vec{0}$

Die Vektorräume V und W können verschiedene Dimensionen haben, z.B.:

$$V = \mathbb{R}^m, \quad W = \mathbb{R}^n$$

Eine Determinante ist eine Zahl, die einer quadratischen Matrix zugeordnet ist. Diese Zahl charakterisiert die Matrix, d.h. die Transformation.

Der Betrag der Determinante zeigt, um welchen Faktor sich ein n-dimensionales Volumen bei Anwendung der Matrix ändert.

Ein 2-dimensionales Volumen ist eine Fläche, ein *3*-dimensionales Volumen ist ein Volumen in unserem anschaulichen Raum.

Im Folgenden wird diese Eigenschaft der Determinante an Beispielen von linearen Transformationen demonstriert.

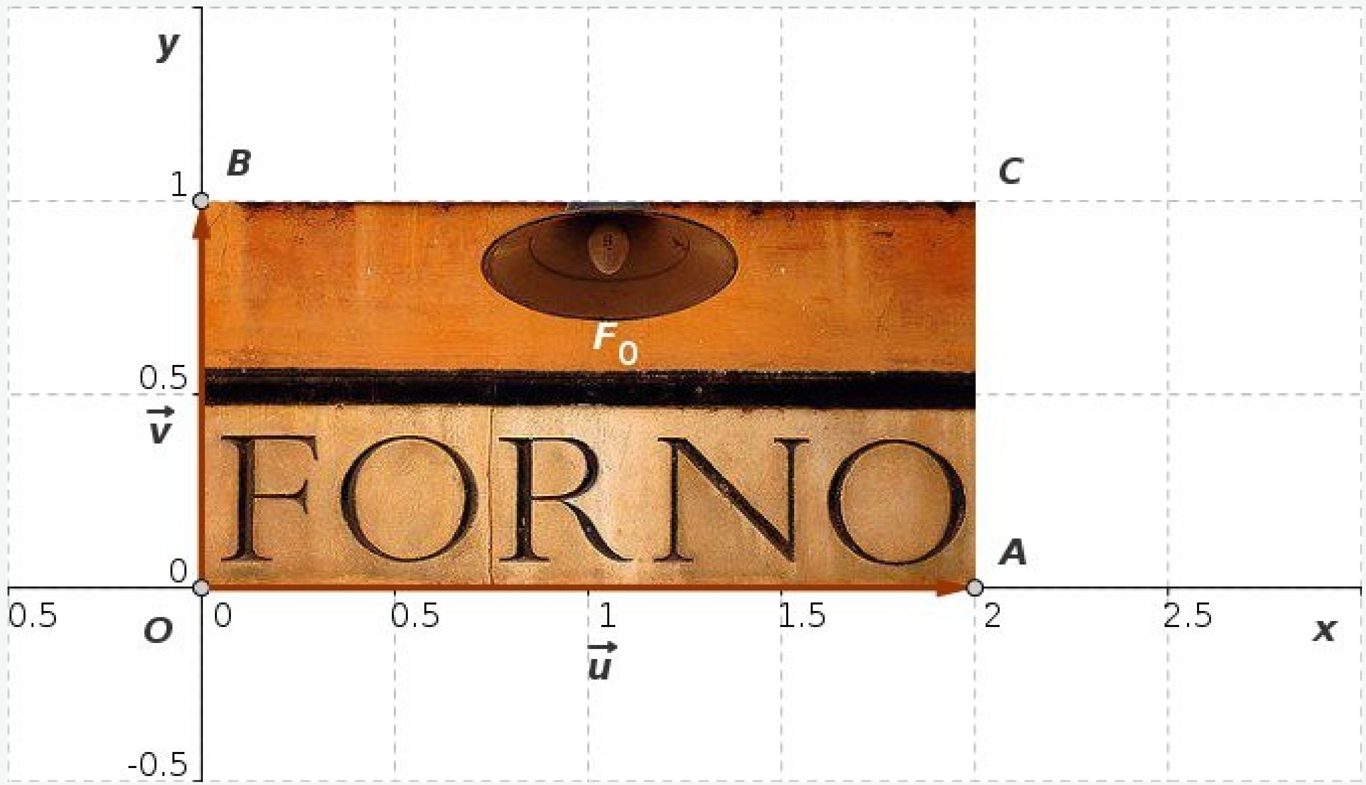

*Abb. 1-1: Eine Fläche, die von den Vektoren **u** und **v** aufgespannt wird*

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (2,\ 0)\,, \qquad \vec{v} = \overrightarrow{OB} = (0,\ 1)$$

Die Vektoren ***u*** und ***v*** bilden ein rechtwinkliges Rechteck mit der Fläche:

$$F_0 = F_{OACB} = \det(\vec{u}\,,\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \text{ FE}$$

Wie ändert sich die Fläche F_0 bei der Anwendung folgender Transformationen:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad T_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{5a} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad T_{5b} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

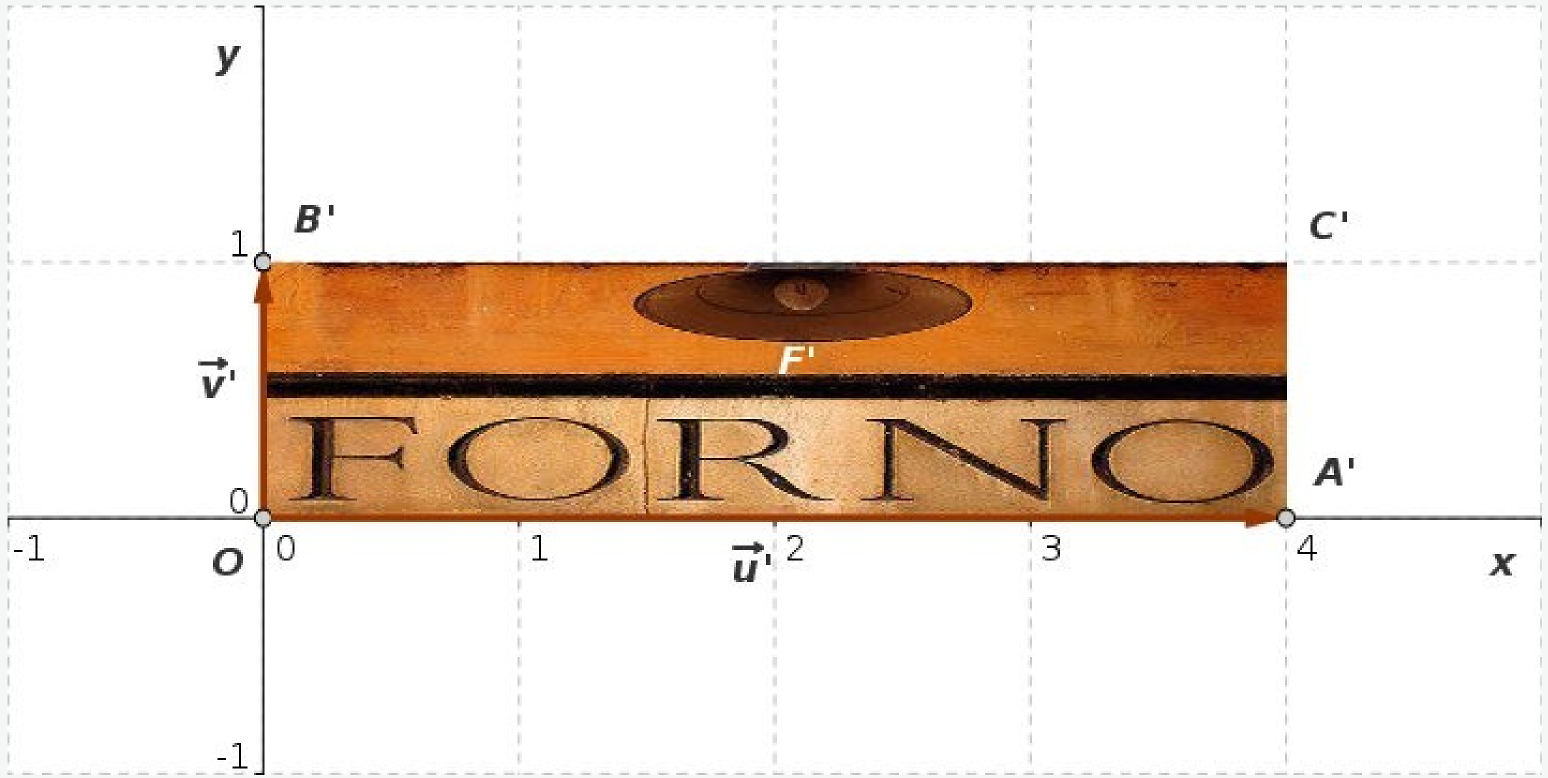

Abb. 1-2: Die Fläche, die von den Vektoren ***u'*** *und* ***v'*** *aufspannt wird*

$$\vec{u}\,' = T_1\,\vec{u}\,, \qquad \vec{v}\,' = T_1\,\vec{v}\,, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\,' = T_1\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,\vec{u}$$

$$\vec{v}\,' = T_1\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

$$F\,' = F_{OA'C'B'} = \det(\vec{u}\,',\ \vec{v}\,') = \det(2\,\vec{u},\ \vec{v}) = 2\det(\vec{u},\ \vec{v}) = 2\,F_0$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det T_1 = 2$$

Die transformierte Fläche ist zweimal größer als die ursprüngliche Fläche.

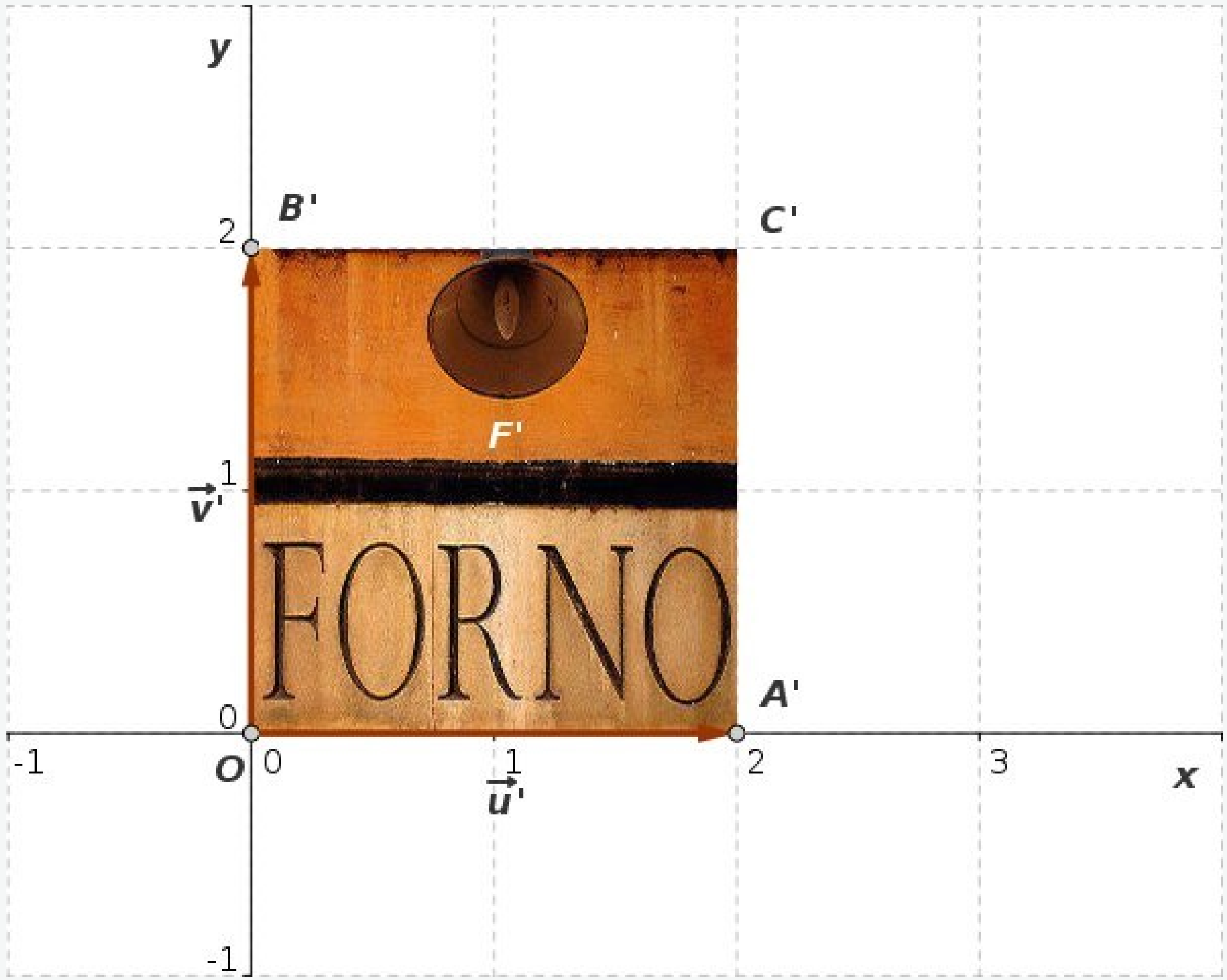

*Abb. 1-3: Die Fläche, die von den Vektoren **u'** und **v'** aufspannt wird*

$$\vec{u}\,' = T_2\,\vec{u}\,, \qquad \vec{v}\,' = T_2\,\vec{v}\,, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\,' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ 2\,u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ 2\,v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\,\vec{v}$$

$$F\,' = F_{OA'C'B'} = \det(\vec{u}\,',\ \vec{v}\,') = 2\ \det(\vec{u},\ \vec{v}) = 2\,F_0$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det T_2 = 2$$

Die transformierte Fläche ist zweimal größer als die ursprüngliche Fläche.

$$\vec{u}\,' = T_3\,\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, u_x \\ \beta\, u_y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\,\vec{u}$$

$$\vec{v}\,' = T_3\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, v_x \\ \beta\, v_y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\,\vec{v}$$

$$F\,' = F_{OA'C'B'} = \det\left(\vec{u}\,',\ \vec{v}\,'\right) = \det\left(\alpha\,\vec{u},\ \beta\,\vec{v}\right) = \;= \alpha\,\beta\,F_0$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad \det T_3 = \alpha\,\beta$$

Die transformierte Fläche ist um den Faktor $\alpha\,\beta$ größer als die ursprüngliche Fläche.

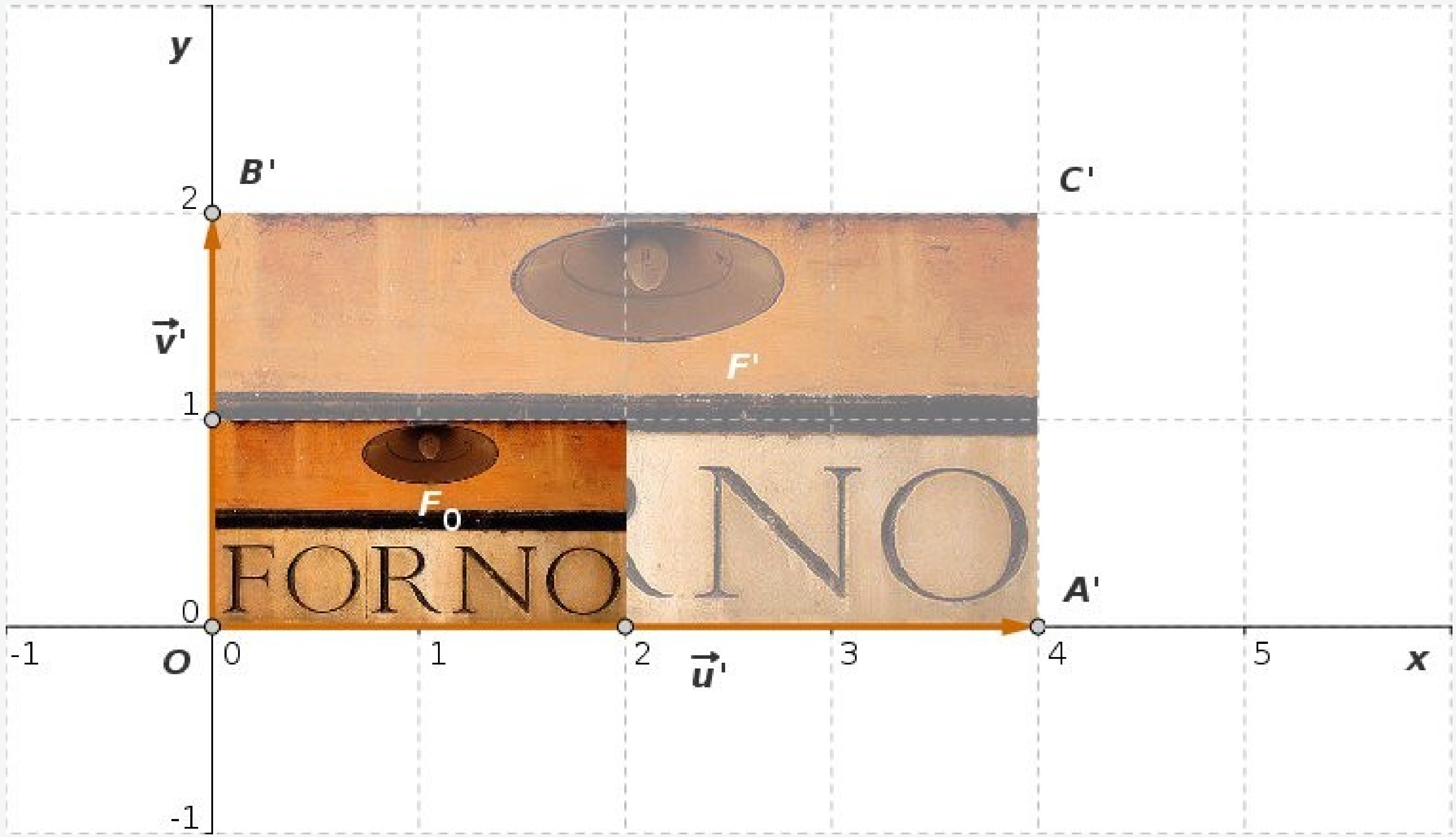

*Abb. 1-4: Die Fläche, die von den Vektoren **u'** und **v'** aufspannt wird*

$$\vec{u}\,' = T_4\, \vec{u}\,, \qquad \vec{v}\,' = T_4\, \vec{v}\,, \qquad T_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Determinante

$$\vec{u}\,' = T_4\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,u_x \\ 2\,u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,\vec{u}$$

$$\vec{v}\,' = T_4\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,v_x \\ 2\,v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\,\vec{v}$$

$$F\,' = F_{OA'C'B'} = \det(\vec{u}\,',\ \vec{v}\,') = \det(2\,\vec{u},\ 2\,\vec{v}) = 4\ \det(\vec{u},\ \vec{v}) = 4\,F_0$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det T_4 = 4$$

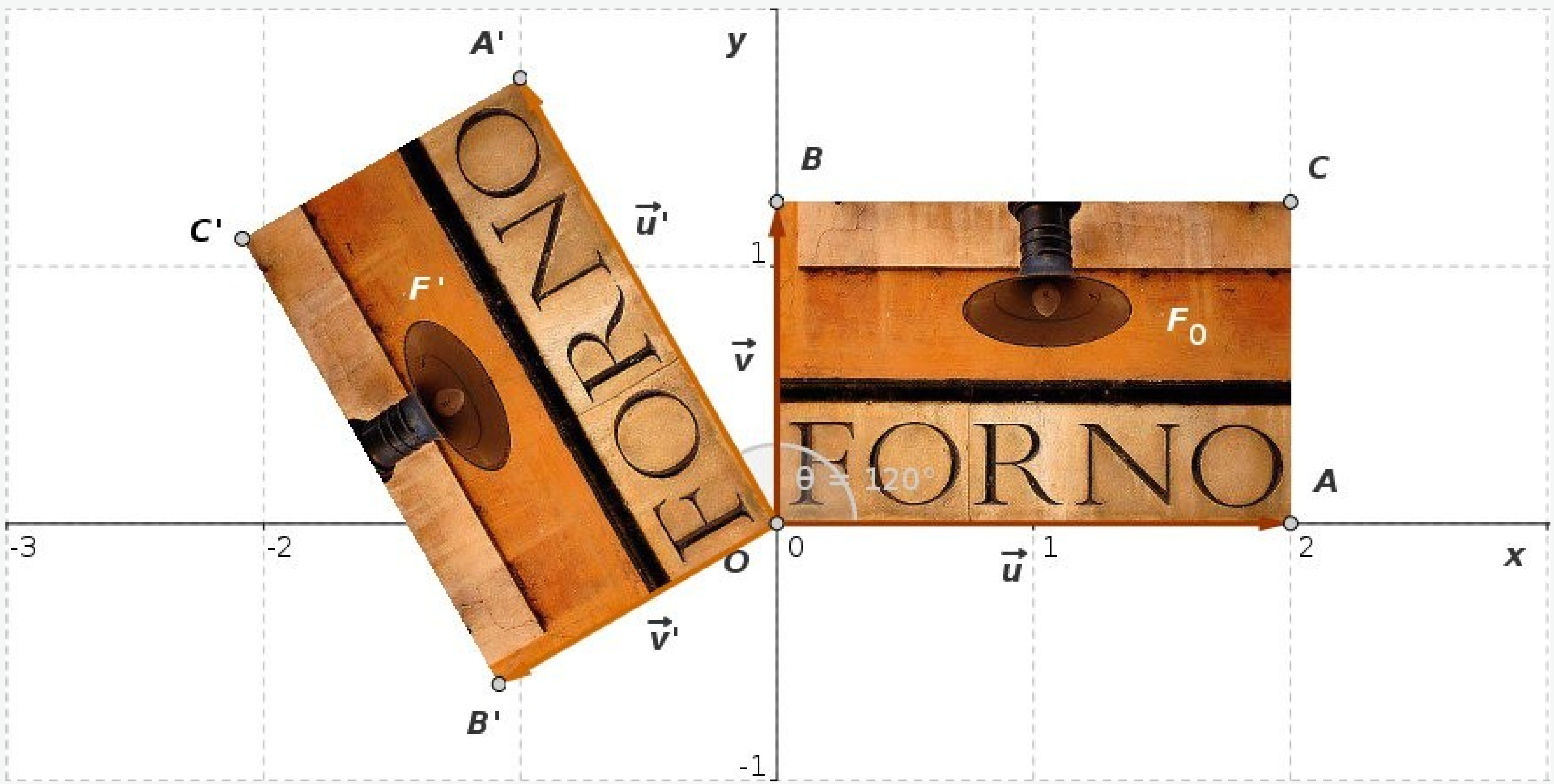

*Abb. 1-5a: Die Fläche F', die von den Vektoren **u'** und **v'** aufspannt wird, ist die Fläche, die durch Drehung der Fläche F um den Winkel θ = 120° entsteht*

$$\vec{u}\,' = T_{5\,a}\,\vec{u}\,, \qquad \vec{v}\,' = T_{5\,a}\,\vec{v}\,, \qquad T_{5\,a} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\,' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\ u_x - \sin\theta\ u_y \\ \sin\theta\ u_x + \cos\theta\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\ v_x - \sin\theta\ v_y \\ \sin\theta\ v_x + \cos\theta\ v_y \end{pmatrix}$$

$$F' = F_{OA'C'B'} = \det(\vec{u}\,',\ \vec{v}\,') =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta\ u_x - \sin\theta\ u_y & \sin\theta\ u_x + \cos\theta\ u_y \\ \cos\theta\ v_x - \sin\theta\ v_y & \sin\theta\ v_x + \cos\theta\ v_y \end{vmatrix} =$$

$$= u_x\, v_y - u_y\, v_x = \det(\vec{u},\ \vec{v})$$

$$T_{5a} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det T_{5a} = 1$$

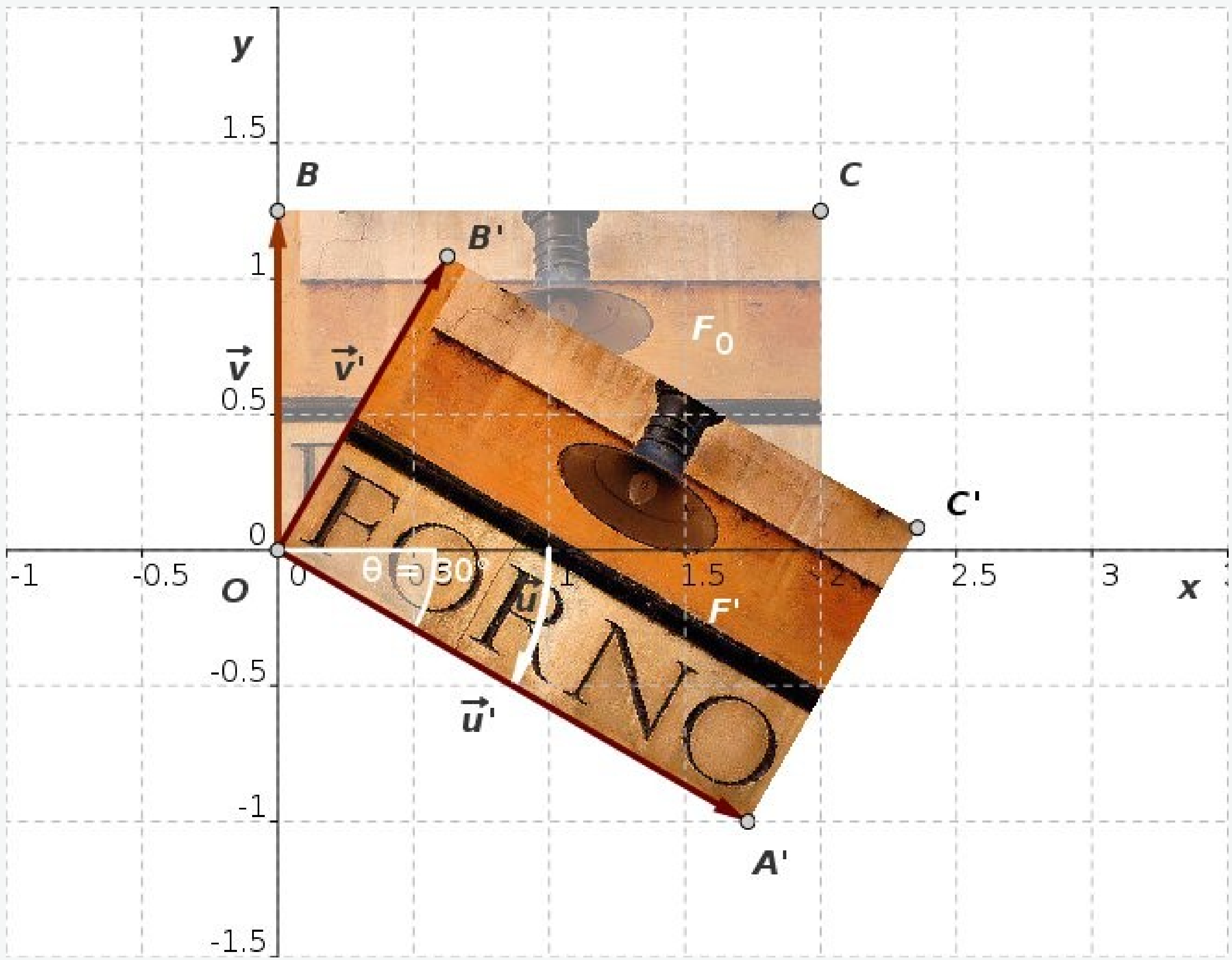

*Abb. 1-5b: Die Fläche F', die von den Vektoren **u'** und **v'** aufspannt wird, ist die Fläche, die durch Drehung der Fläche F um den Winkel θ = - 30° entsteht*

$$F' = F_{OA'C'B'} = \det(\vec{u}\,', \vec{v}\,') =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta\ u_x + \sin\theta\ u_y & -\sin\theta\ u_x + \cos\theta\ u_y \\ \cos\theta\ v_x + \sin\theta\ v_y & -\sin\theta\ v_x + \cos\theta\ v_y \end{vmatrix} =$$

$$= u_x\, v_y - u_y\, v_x = \det(\vec{u}, \vec{v})$$

$$T_{5b} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det T_{5b} = 1$$

Bei einer Drehung um einen Winkel ändert sich die Fläche nicht.

Wir haben folgende Eigenschaft von Determinanten bewiesen:

$$T_{5b} = T_{5a}^T, \qquad \det T_{5a} = \det T_{5a}^T$$

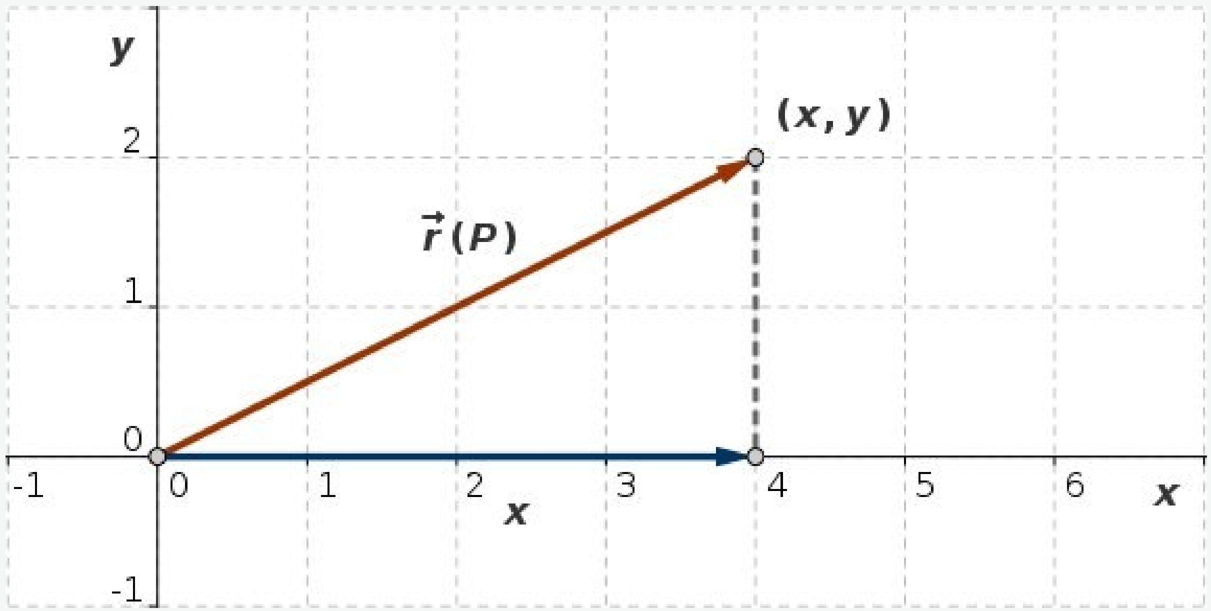

Abb. 1-6a: Projektion auf die x-Achse

$$T_6\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det T_6 = 0$$

Ist die Determinante einer Transformation in der Ebene gleich null, so wird eine Fläche auf ein Geradenstück abgebildet.

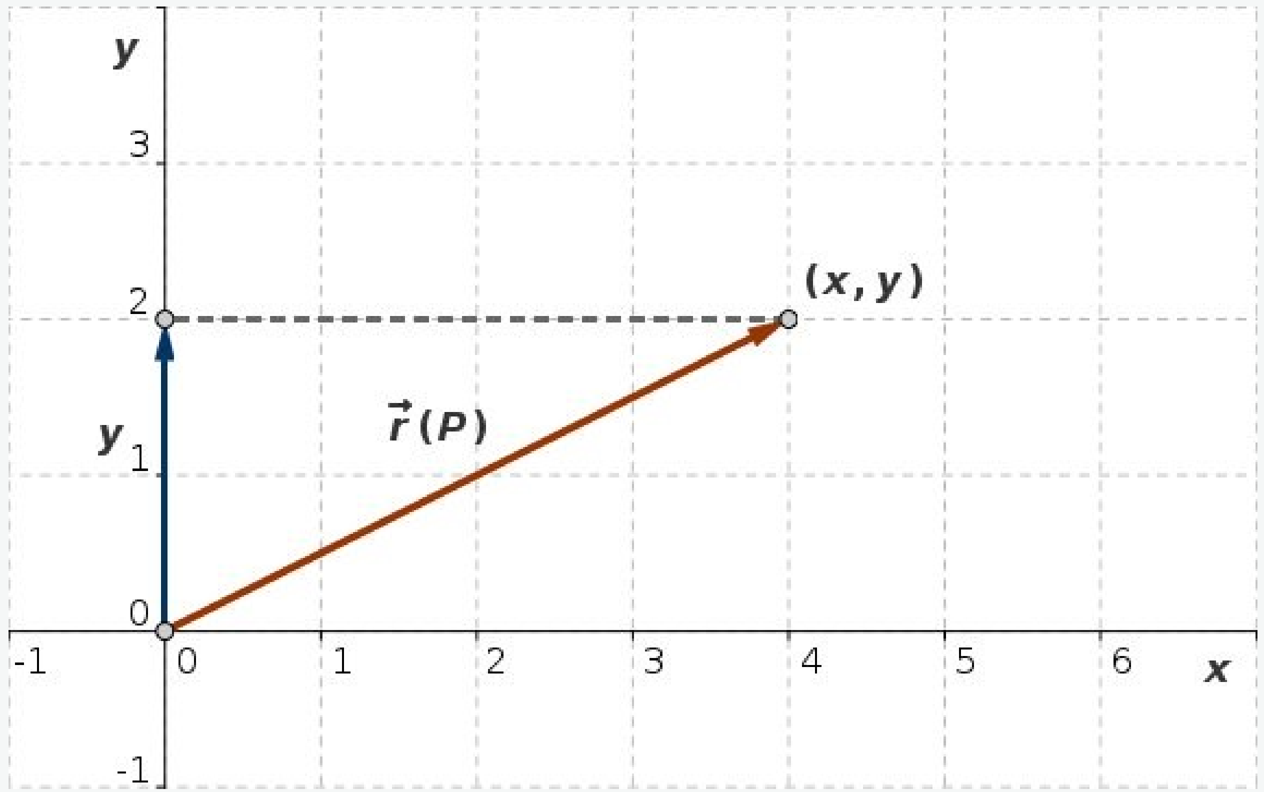

Abb. 1-6b: Projektion auf die y-Achse

$$T_7 \, \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \qquad \det T_7 = 0$$

Die Determinante einer Transformation, die einer orthogonalen Projektion entspricht, ist gleich Null.

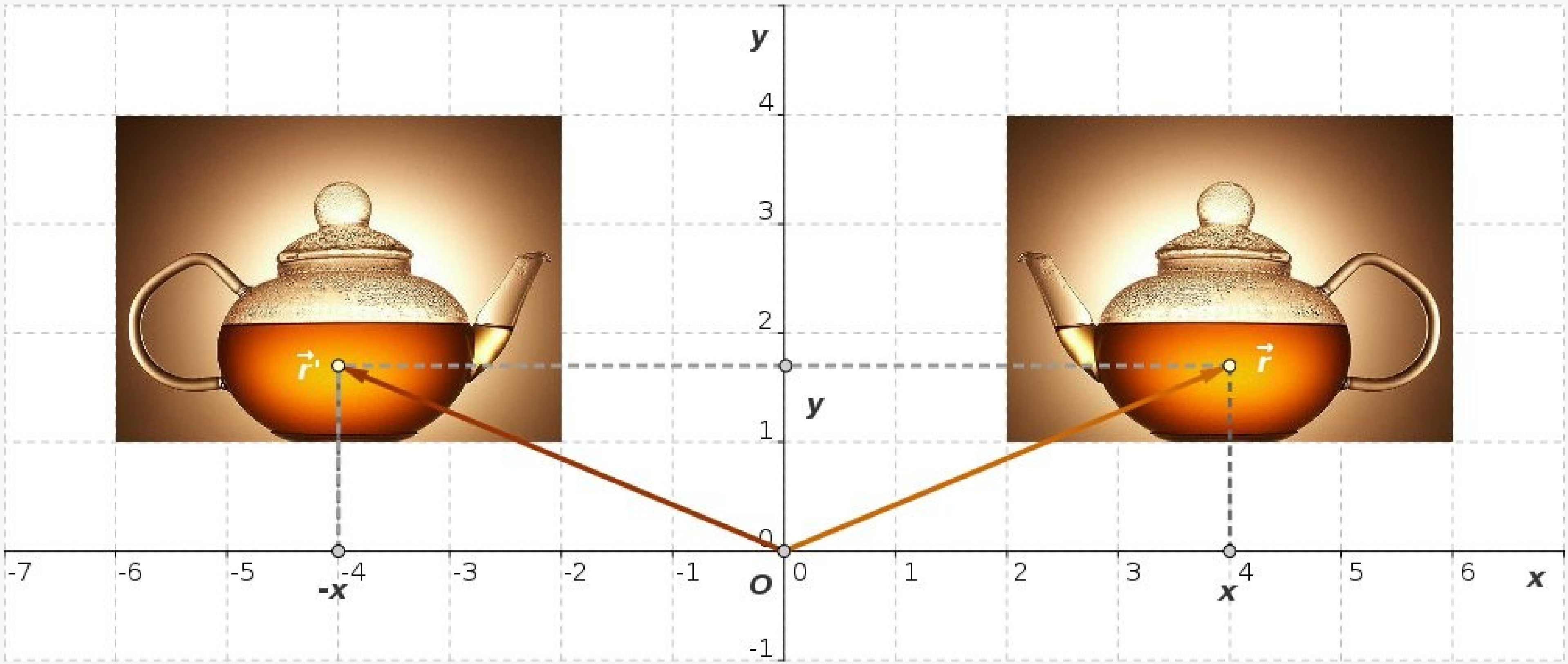

Abb. 1-7a: Spiegelung an der y-Achse

$$T_8\,\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \det T_8 = -1$$

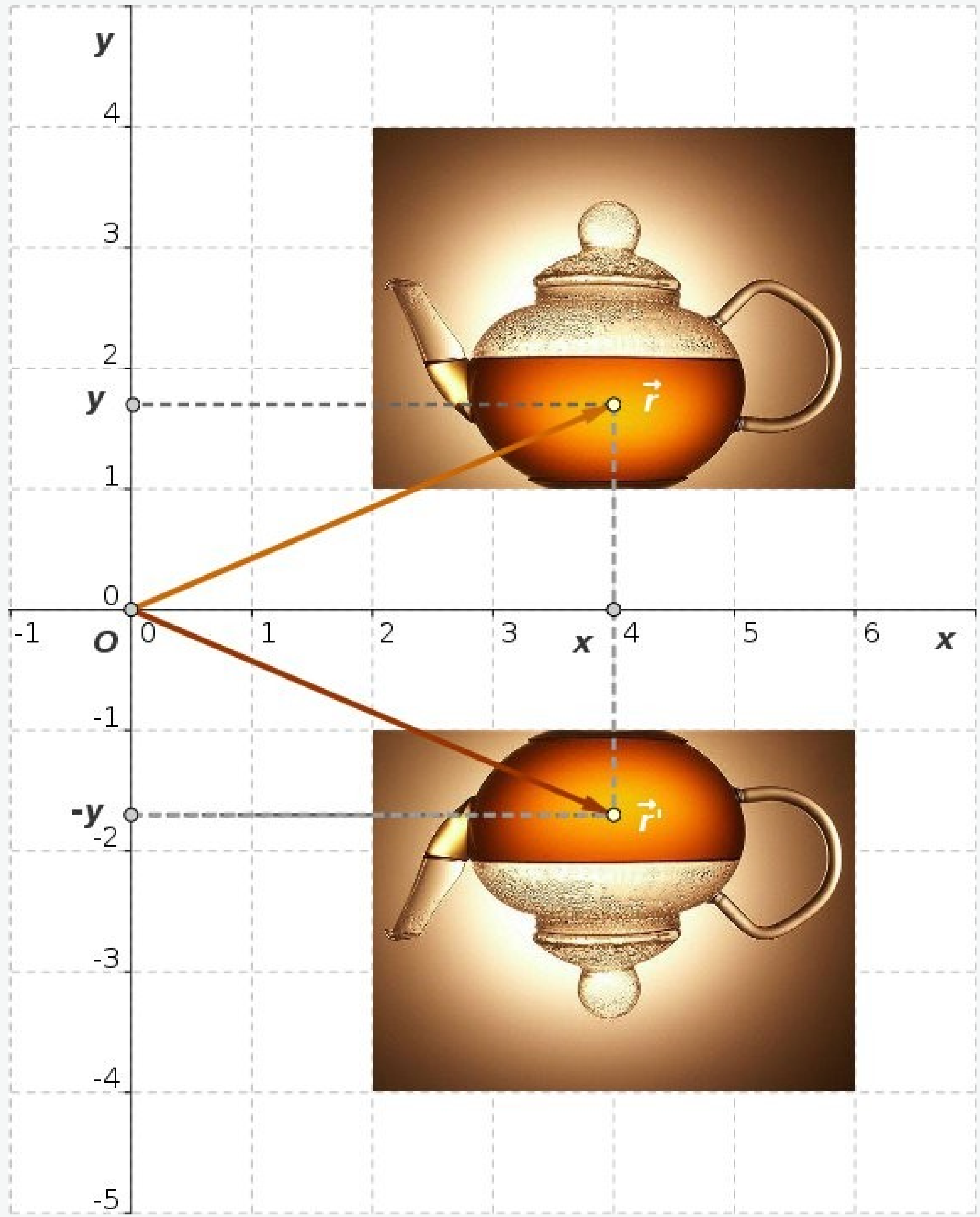

Abb. 1-7b: Spiegelung an der x-Achse

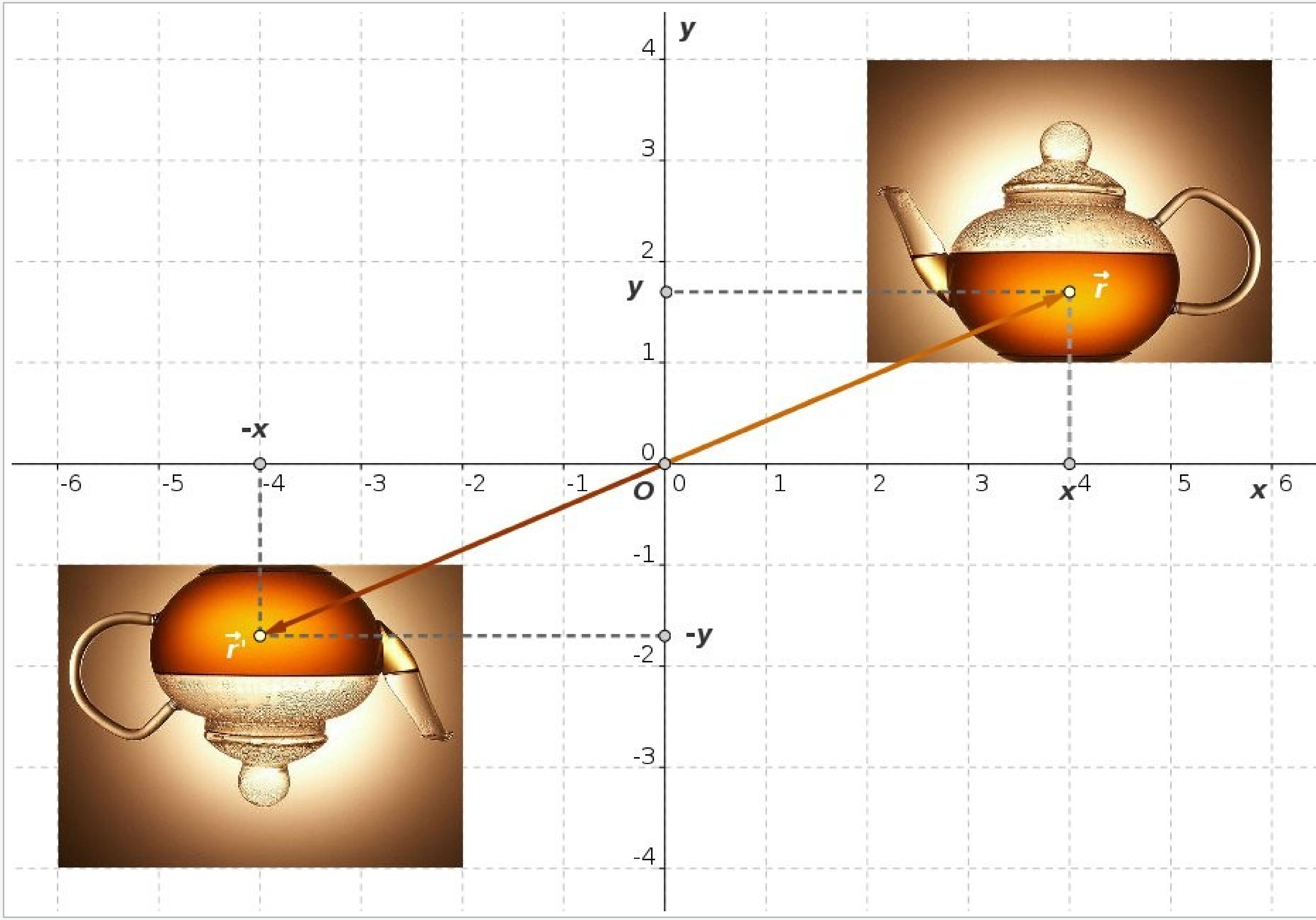

Abb. 1-7c: Spiegelung am Ursprung O

$$T_9\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \qquad \det T_9 = -1$$

(Abbildung 1-7b, Seite 11-7b)

$$T_{10}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, \qquad \det T_{10} = 1$$

(Abbildung 1-7c, Seite 11-7c)

Die Determinante einer Transformation, die der Spiegelung an einer Achse entspricht, ist gleich -1.

Die Determinante einer Transformation, die der Spiegelung am Koordinatenursprung entspricht, ist gleich 1.