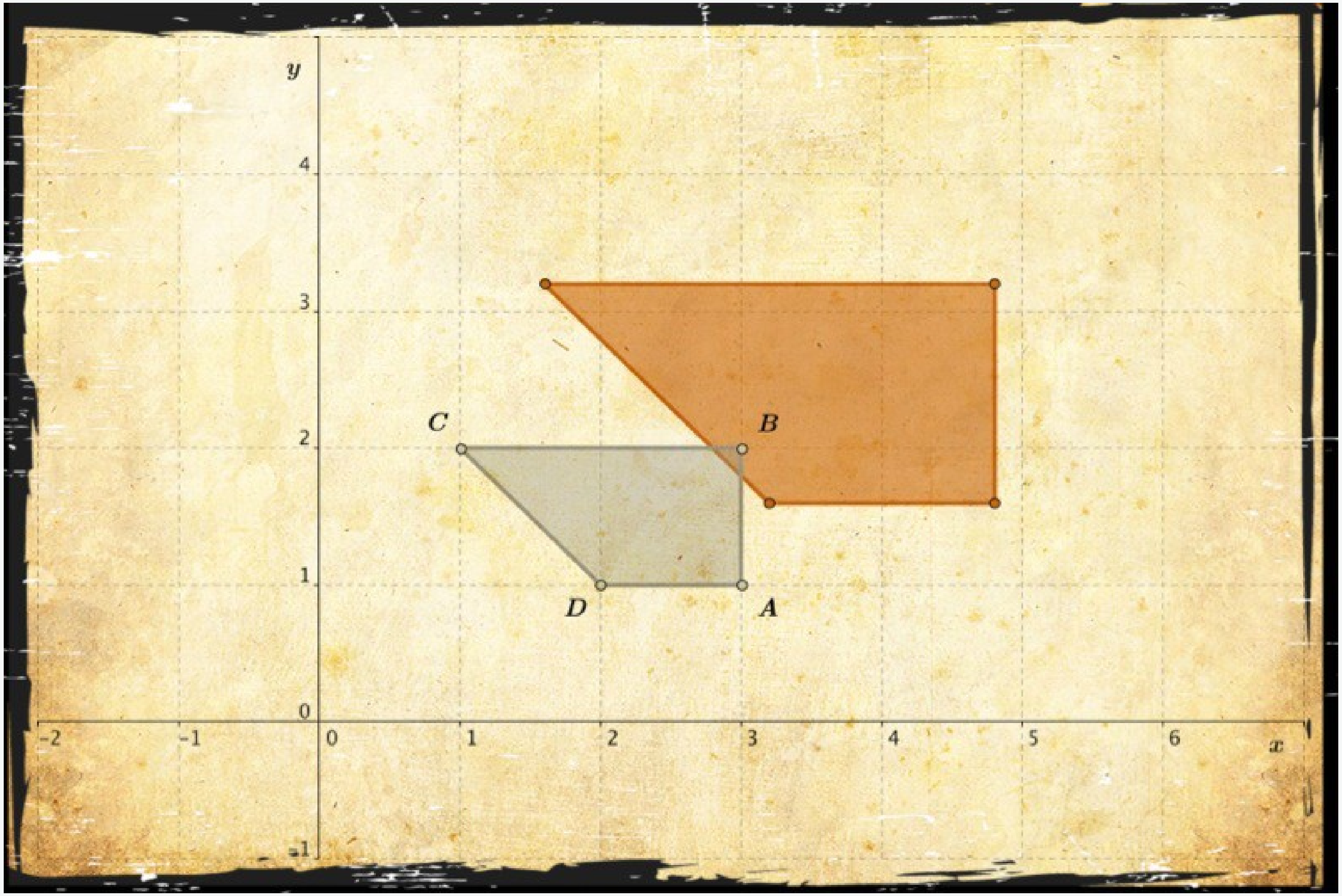

Lineare Transformationen, *Teil 1*

Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1:

Wenden Sie die Transformation T auf den Punkt P und auf den Vektor $\boldsymbol{OP}$ an. Beschreiben Sie diese Transformation.

$$P = (1,\ 1), \qquad O = (0,\ 0)$$

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}\,, \qquad m \in [1,\ 4]$$

Aufgabe 2:

Wenden Sie die Transformation T auf das Geradenstück AB an. Beschreiben Sie diese Transformation.

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}\,, \qquad m \in [1,\ 3]$$

a) $A = (1,\ 1), \quad B = (2,\ 1),$ $\qquad$ b) $A = (1,\ 1), \quad B = (1,\ 0)$

Bei $m = 1$ ist T die Einheitsmatrix

$$m = 1: \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Position des Punktes P ändert sich nicht bei Anwendung der Einheitsmatrix, bzw. P und P' sind identisch.

Ist $m > 1$, so transformiert die Matrix T den Punkt P in einen Punkt P' mit größerer x-Koordinate

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt bewegt sich längs der Geraden $y = 1$ vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(m, 1)$.

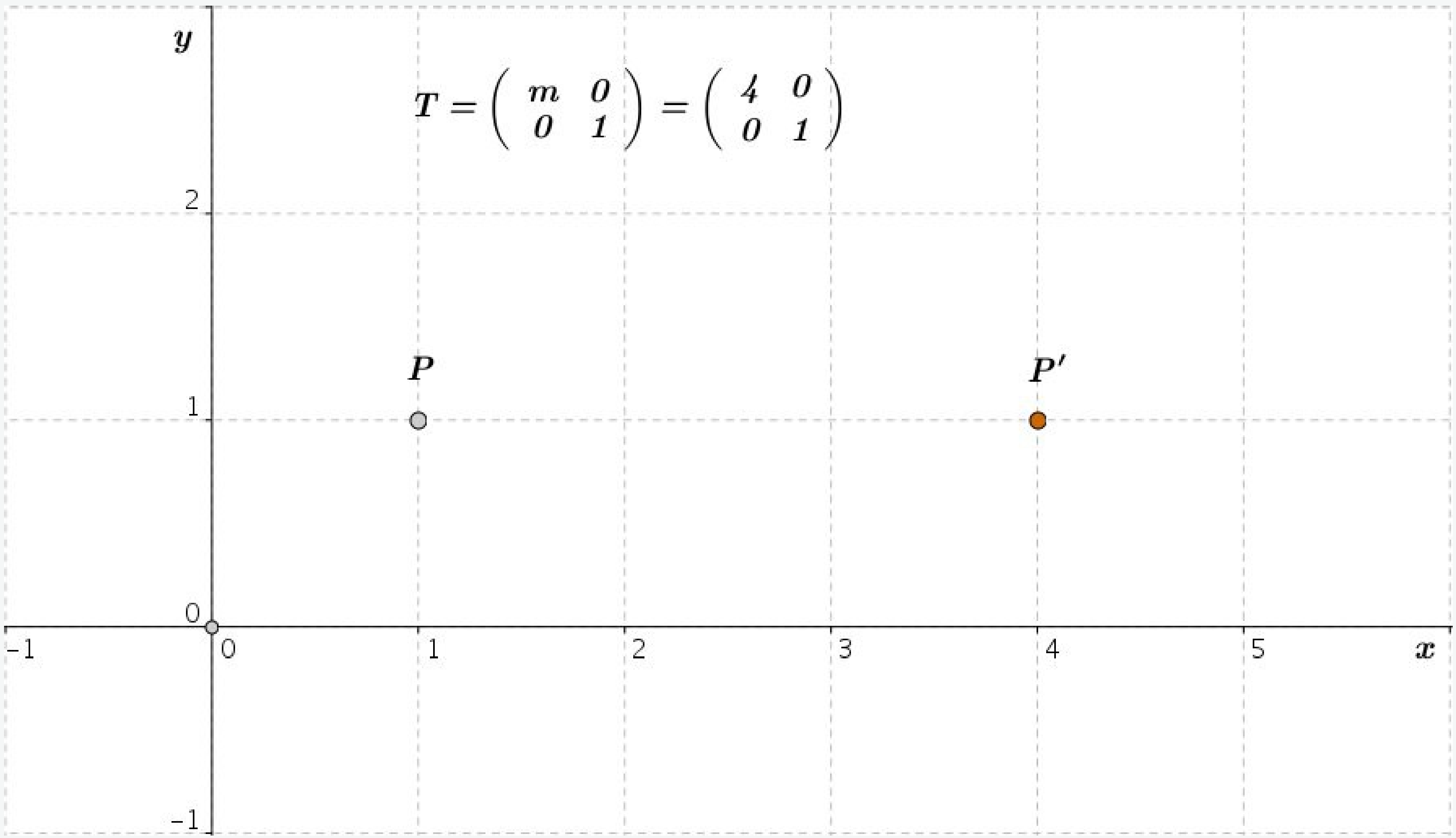

Abb. L1-1: Transformation des Punktes P in den Punkt P'. Die Position des Punktes P' entspricht dem Wert m = 4 der Transformationsmatrix

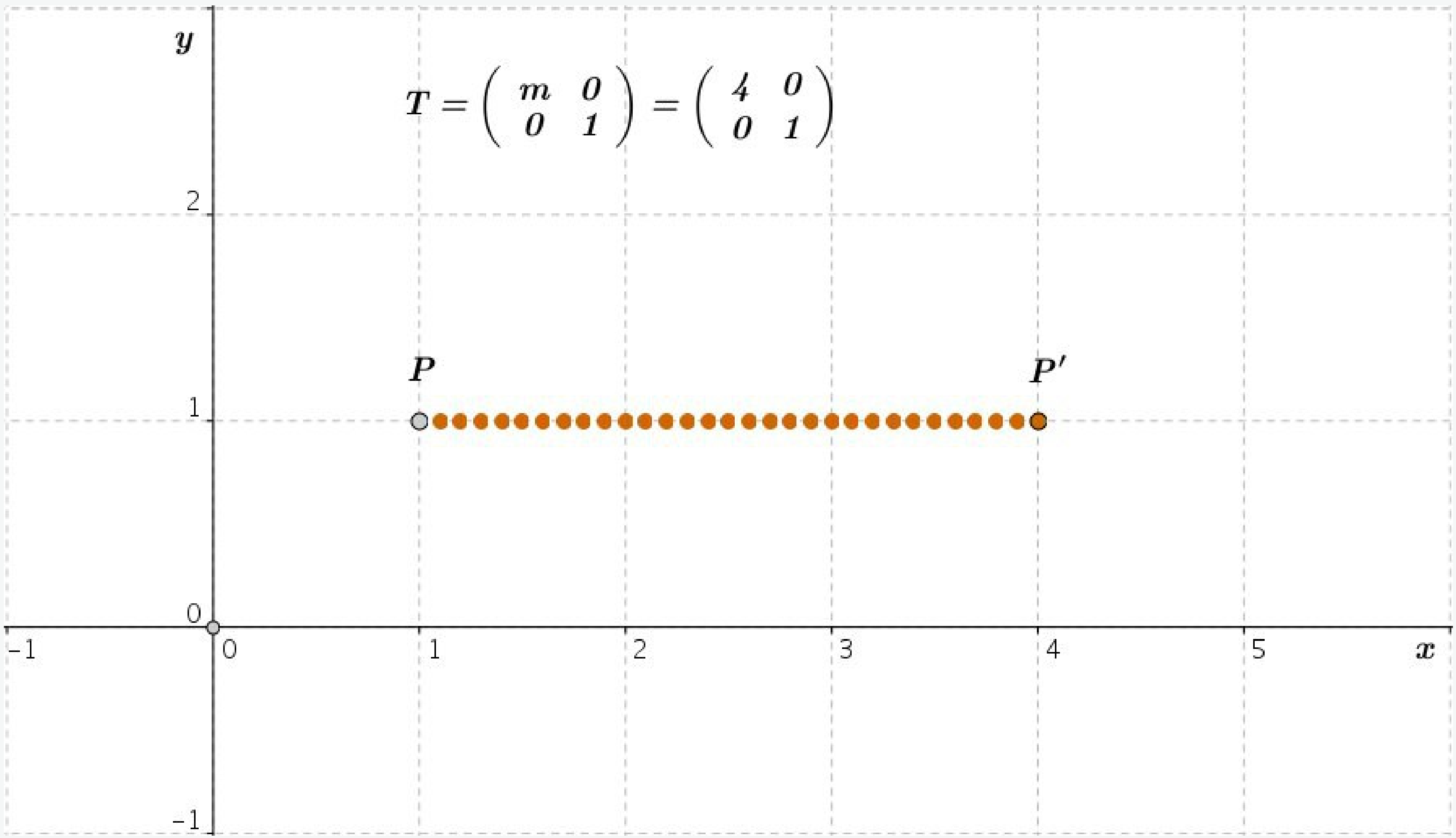

Abb. L1-2: Transformation des Punktes P in den Punkt P'. Die Position des Punktes P' entspricht dem Wert $m = 4$ der Transformationsmatrix. Es wird gezeigt, wie sich die Position des Punktes P bei Änderung des Wertes m von 1 bis 4 verändert.

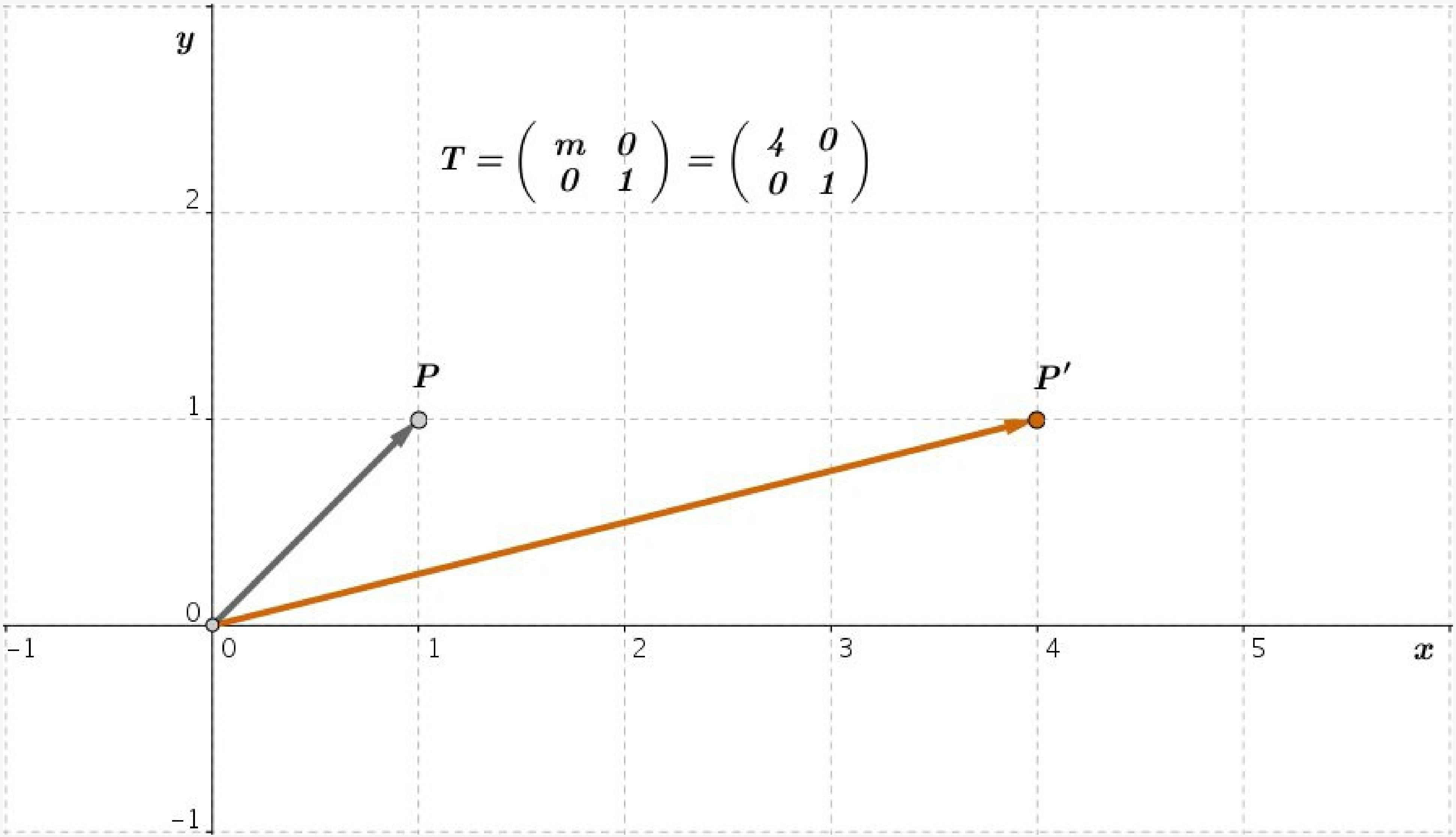

*Abb. L1-3: Transformation des Vektors **OP** in den Vektor **OP'**. Die Position des Vektors **OP'** entspricht dem Wert $m = 4$ der Transformationsmatrix*

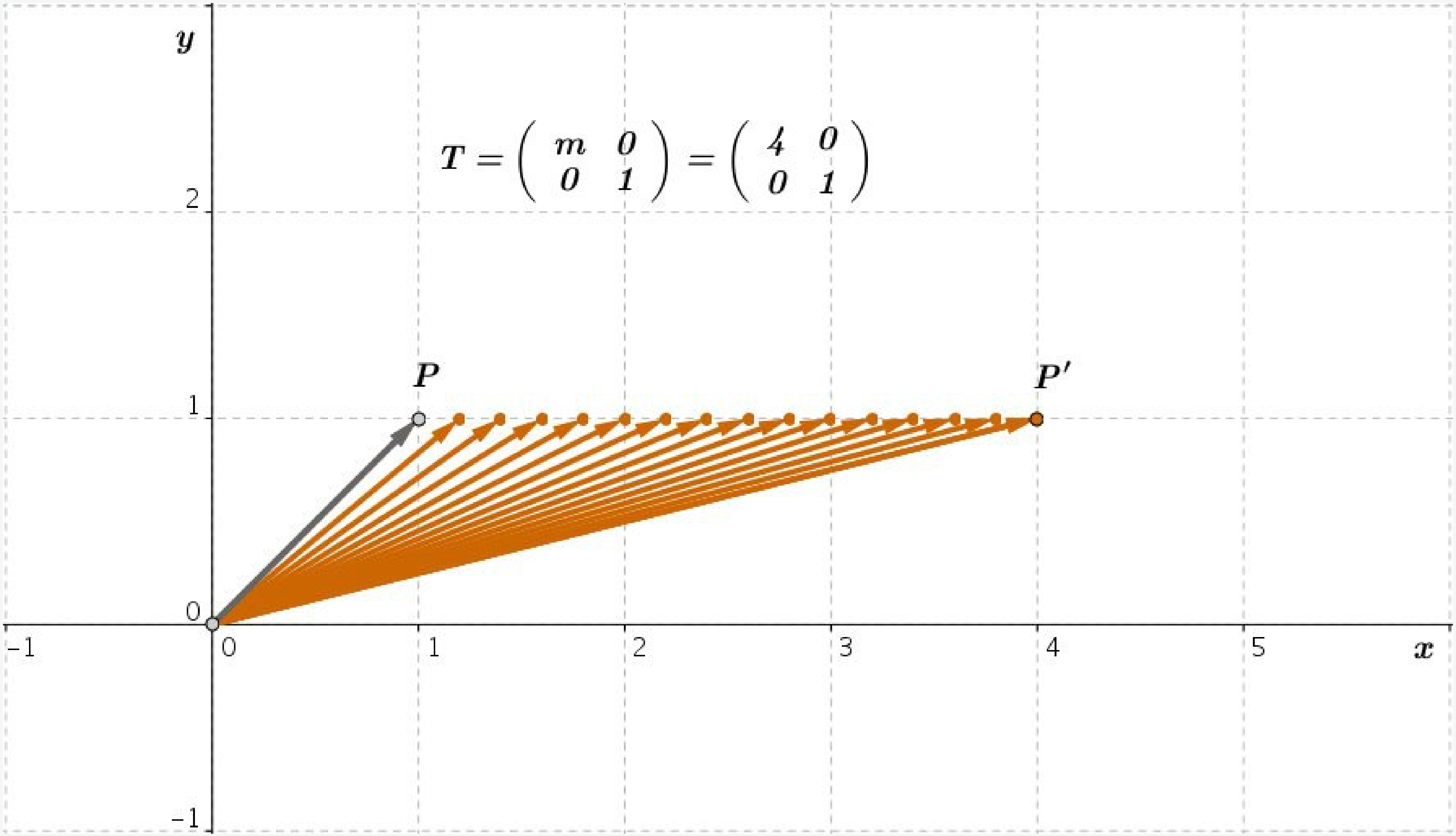

Abb. L1-4: Transformation des Vektors ***OP*** *in den Vektor* ***OP'****. Die Position des Punktes P' entspricht dem Wert m = 4 der Transformationsmatrix. Es wird gezeigt, wie sich die Position des Punktes P bei Änderung des Wertes m von 1 bis 4 verändert*

Die Transformation T ändert die Position der beiden Punkte. Dabei ändern sich nur die x-Koordinaten der Punkte, die y-Koordinaten bleiben unverändert.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\,x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A' = T\ A, \qquad B' = T\ B$$

$$x_{A'} = m\,x_A, \qquad x_{B'} = m\,x_B, \qquad y_{A'} = y_A, \qquad y_{B'} = y_B$$

Die Strecken AB und $A'B'$ liegen auf der Geraden $y = 1$.

Durch die Transformation T wird das Geradenstück um den Faktor m länger:

$$|\,A'\,B'\,| = x_{B'} - x_{A'} = m\,x_B - m\,x_A = m\,(x_B - x_A) = m\,|\,A\,B\,|$$

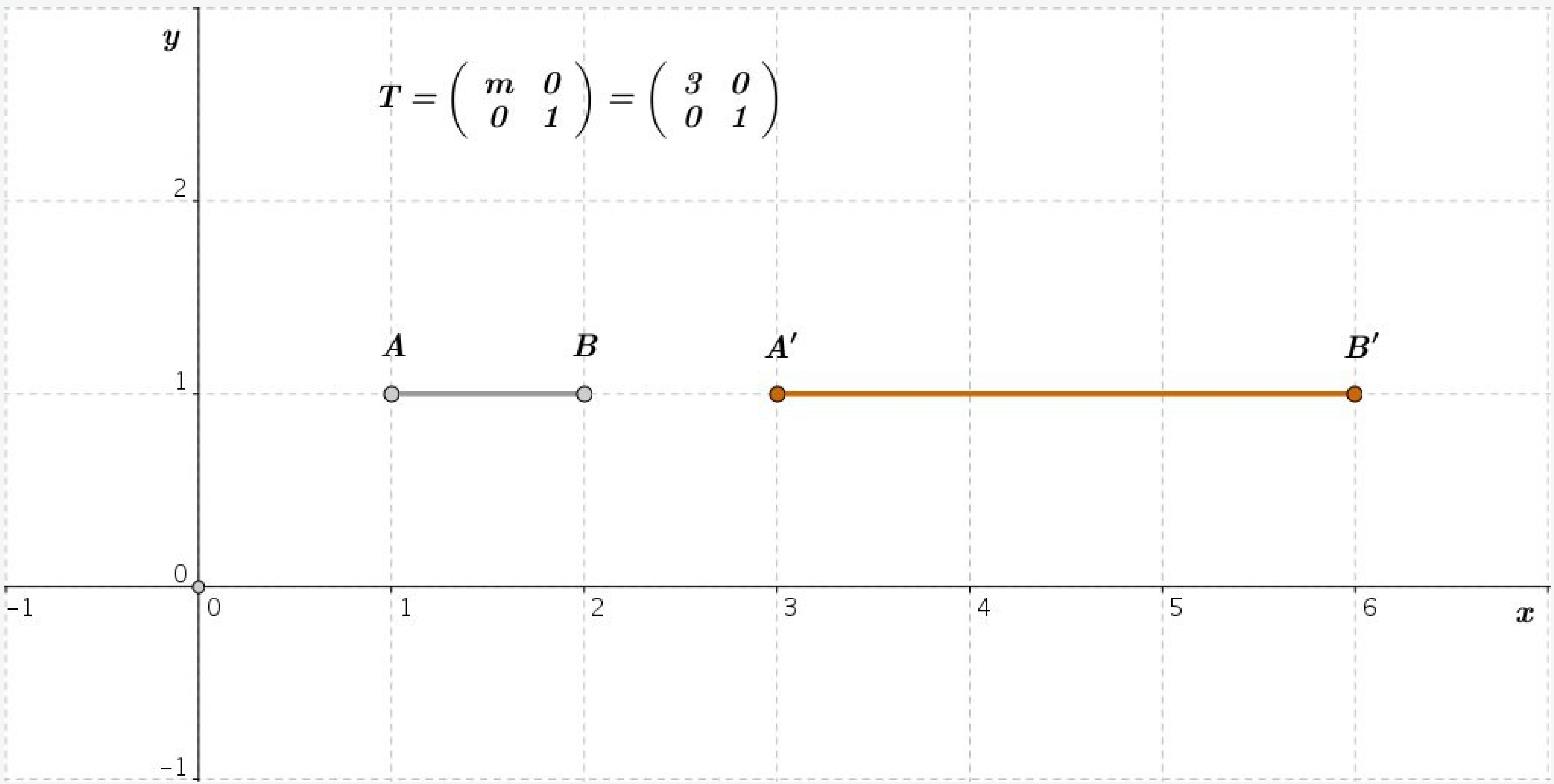

Abb. L2-1: Transformation des Geradenstücks AB in das Geradenstück A'B' für den Wert m = 3 der Transformationsmatrix

Die Transformation T ändert die Position der beiden Punkte. Dabei ändern sich nur die x-Koordinaten der Punkte, die y-Koordinaten bleiben unverändert.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\,x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A' \to T\ A, \qquad B' \to T\ B$$

$$x_{A'} = x_{B'} = m\,x_{A}, \qquad y_{A'} = y_{A}, \qquad y_{B'} = y_{B}$$

Die Strecken AB und $A'B'$ liegen entsprechend auf parallelen Geraden $y = 1$ und $y = 3$.

Bei der Transformation T ändert sich die Länge des transformierten Geradenstückes nicht. Es wird um 2 Einheiten in positiver Richtung der x-Achse verschoben.

$$|\,A'\,B'\,| = \sqrt{(x_{B'} - x_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2} =$$

$$= \sqrt{(m\,x_{A} - m\,x_{A})^2 + (y_{B} - y_{A})^2} = \sqrt{0^2 + (1-0)^2} = 1$$

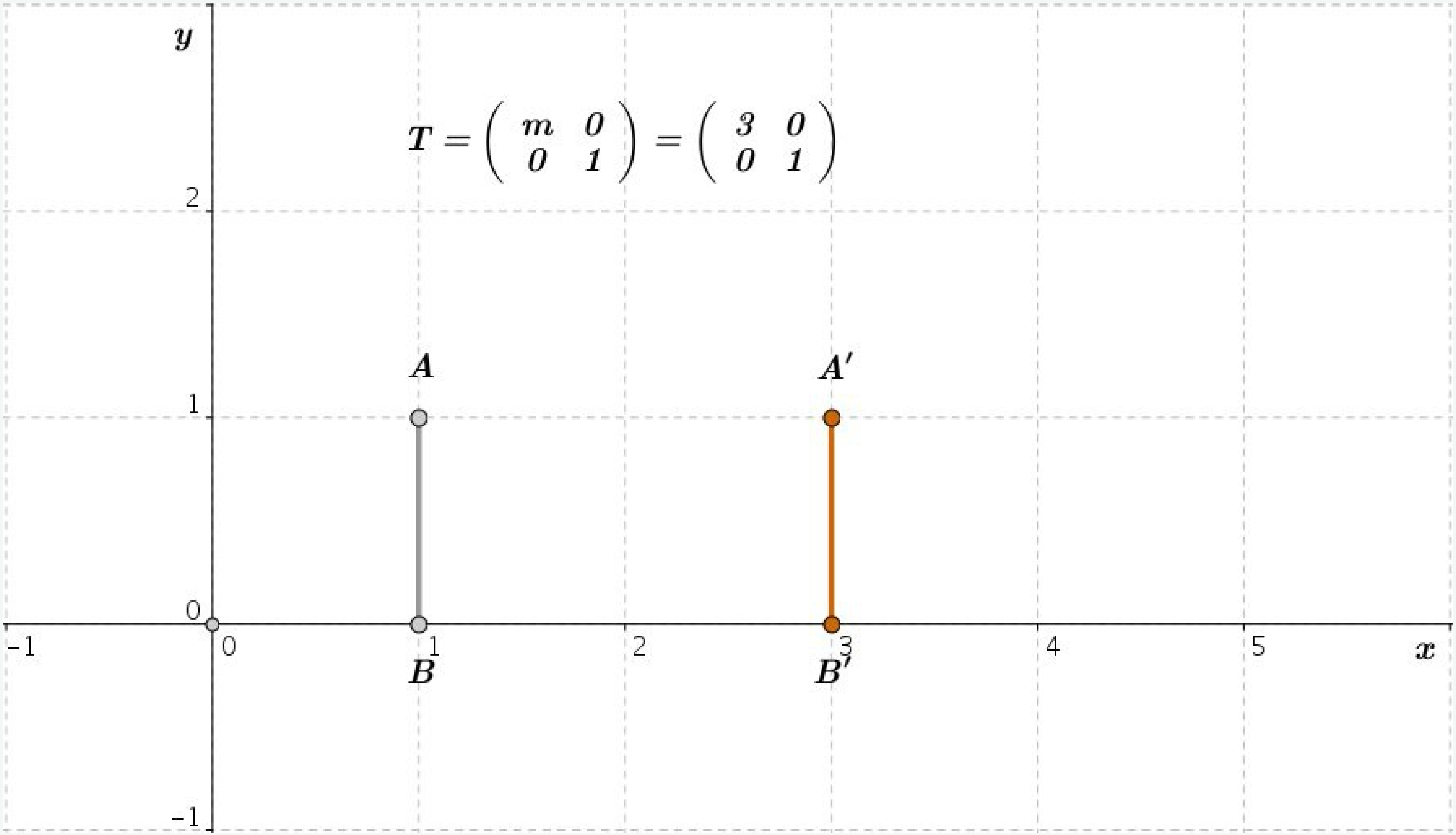

Abb. L2-2: Transformation des Geradenstücks AB in das Geradenstück A'B' für den Wert m = 3 der Transformationsmatrix

Aufgabe 3:

Wenden Sie die Transformation T auf das Dreieck ABC an. Beschreiben Sie diese Transformation.

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}, \qquad m \in [-2,\ 2]$$

$a)$ $A = (2,\ 0), \quad B = (2,\ 2), \quad C = (0,\ 2)$

$b)$ $A = (2,\ -1), \quad B = (2,\ 2), \quad C = (-1,\ 1)$

Aufgabe 4:

Eine Fläche sei durch die Eckpunkte Punkte O, A, B und C bestimmt. Wie ändert sich die Fläche durch die Transformation T? Beschreiben Sie diese Transformation.

$A(3,\ 1), \qquad B(3,\ 2), \qquad C(1,\ 2), \qquad D(2,\ 1)$

$$m = [-2,\ 2]: \qquad a)\quad T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

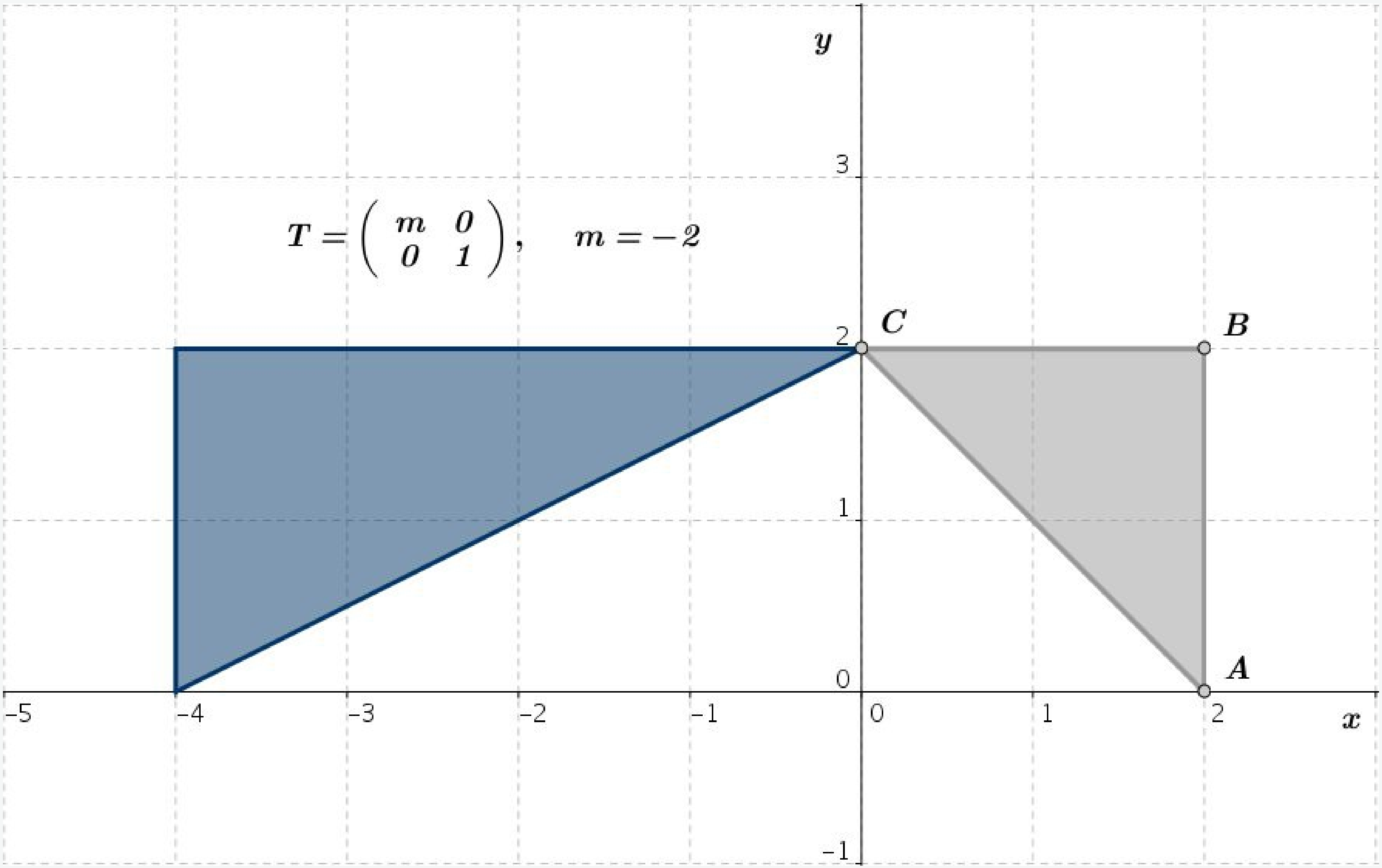

Abb. L3-1: Transformation des Dreiecks ABC (grau) in das Dreieck A'B'C' (blau) für den Wert m = -2 der Transformationsmatrix

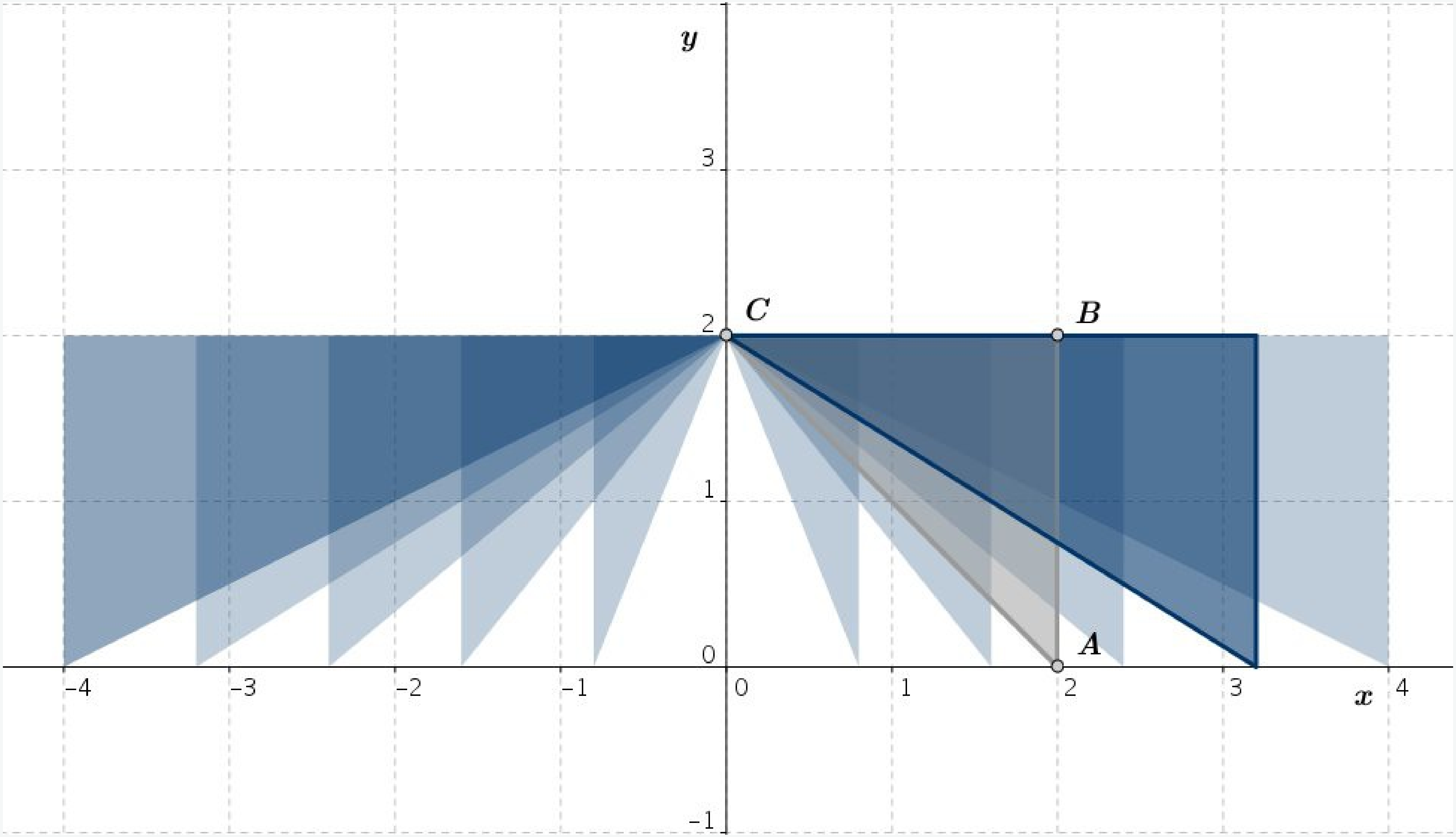

Abb. L3-2: Transformation des Dreiecks ABC (grau) in das Dreieck A'B'C' (blau). `Transformationsschritte'.

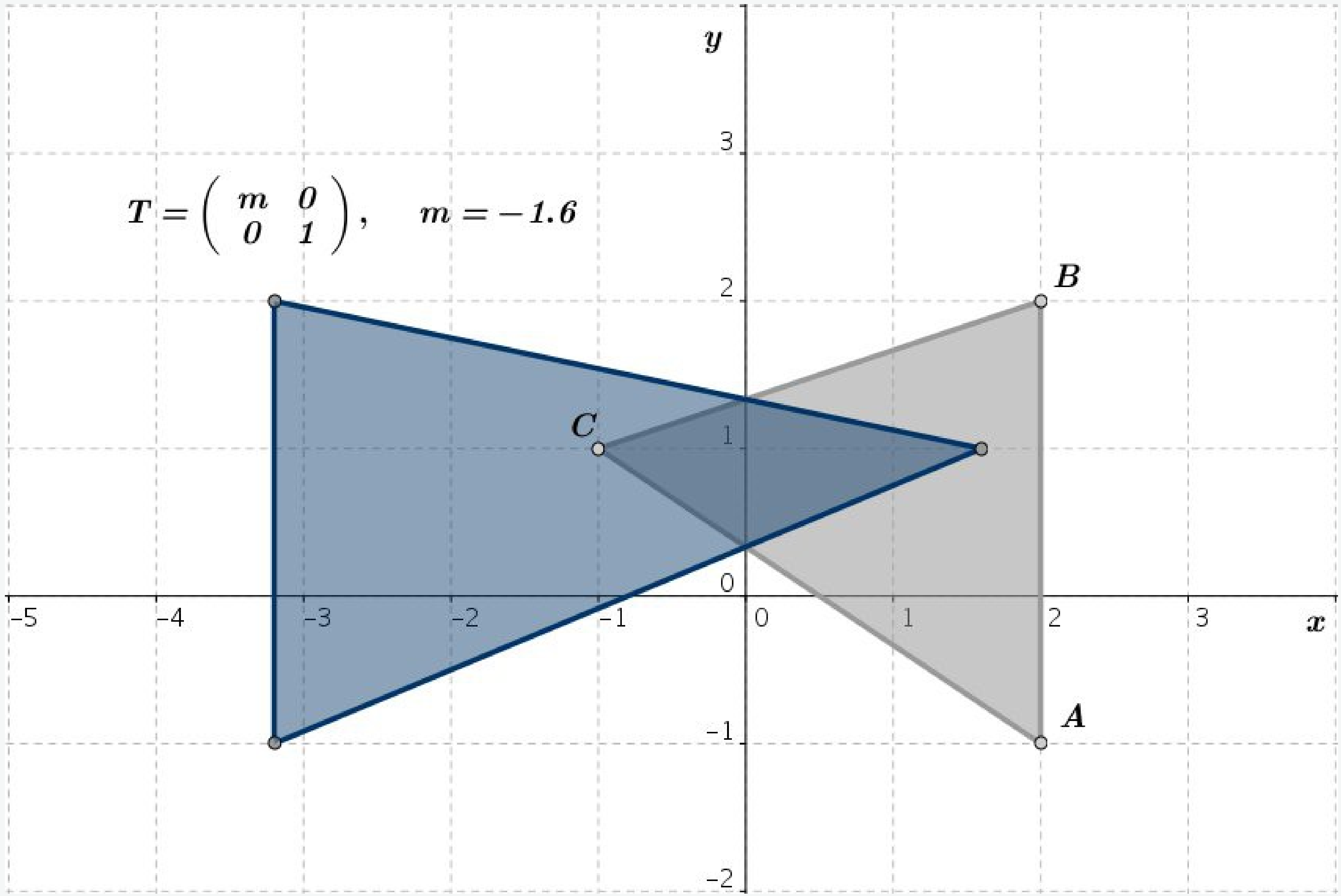

Abb. L3-3: Transformation des Dreiecks ABC (grau) in das Dreieck A'B'C' (blau)

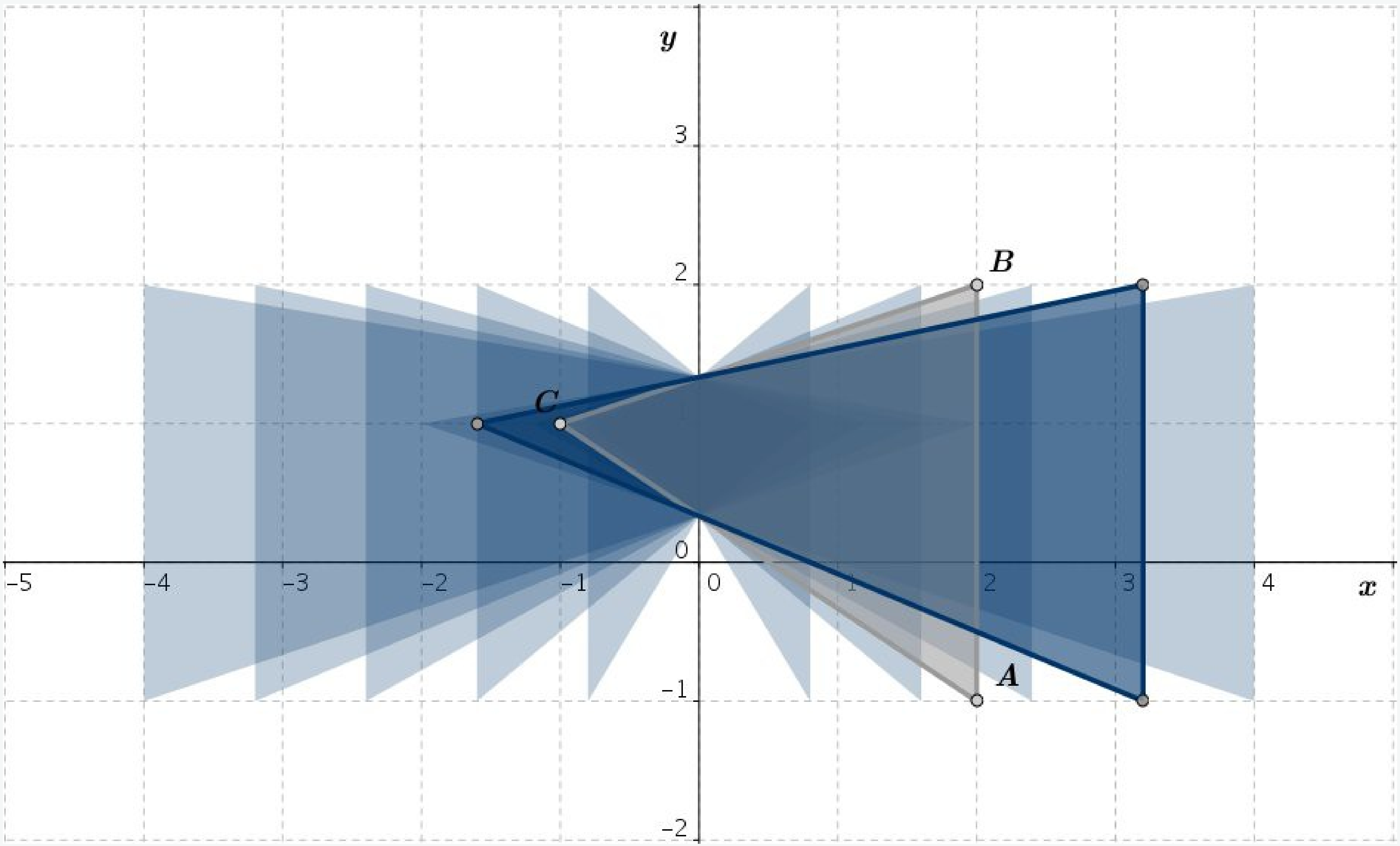

Abb. L3-4: Transformation des Dreiecks ABC (grau) in das Dreieck A'B'C' (blau). `Transformationsschritte'.

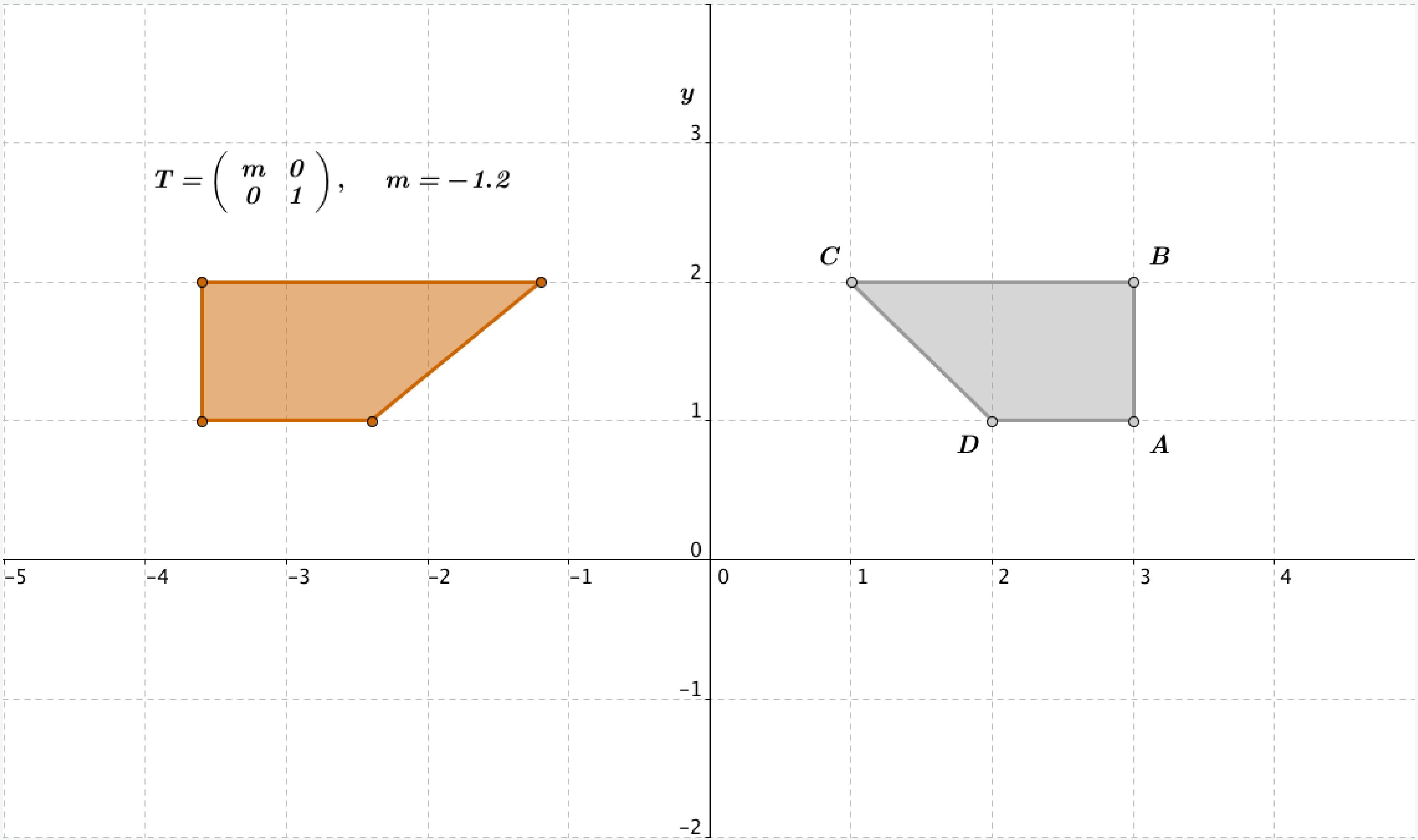

Abb. L3-1: Transformation des Vierecks ABCD (grau) in das Viereck A'B'C'D' (rot) für den Wert m = -1.2 der Transformationsmatrix

Eine Fläche sei durch die Eckpunkte Punkte O, A, B und C bestimmt. Wie ändert sich die Fläche durch die Transformation T? Beschreiben Sie diese Transformation.

$A(3,\ 1)$, $\quad B(3,\ 2)$, $\quad C(1,\ 2)$, $\quad D(2,\ 1)$

$$m = [-1,\ 2]: \qquad a)\ \ T = \begin{pmatrix} \dfrac{m}{2} & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad b)\ \ T = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$