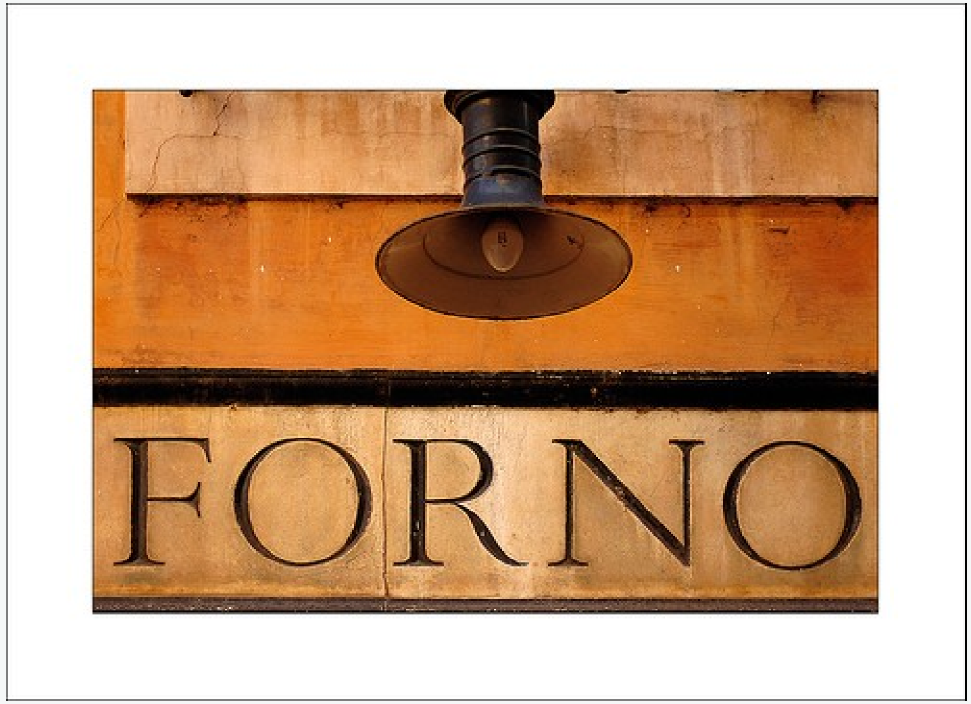


http://www.flickr.com/photos/sigfrid/315233303/

Geometrische Deutung der Determinante zweiter Ordnung

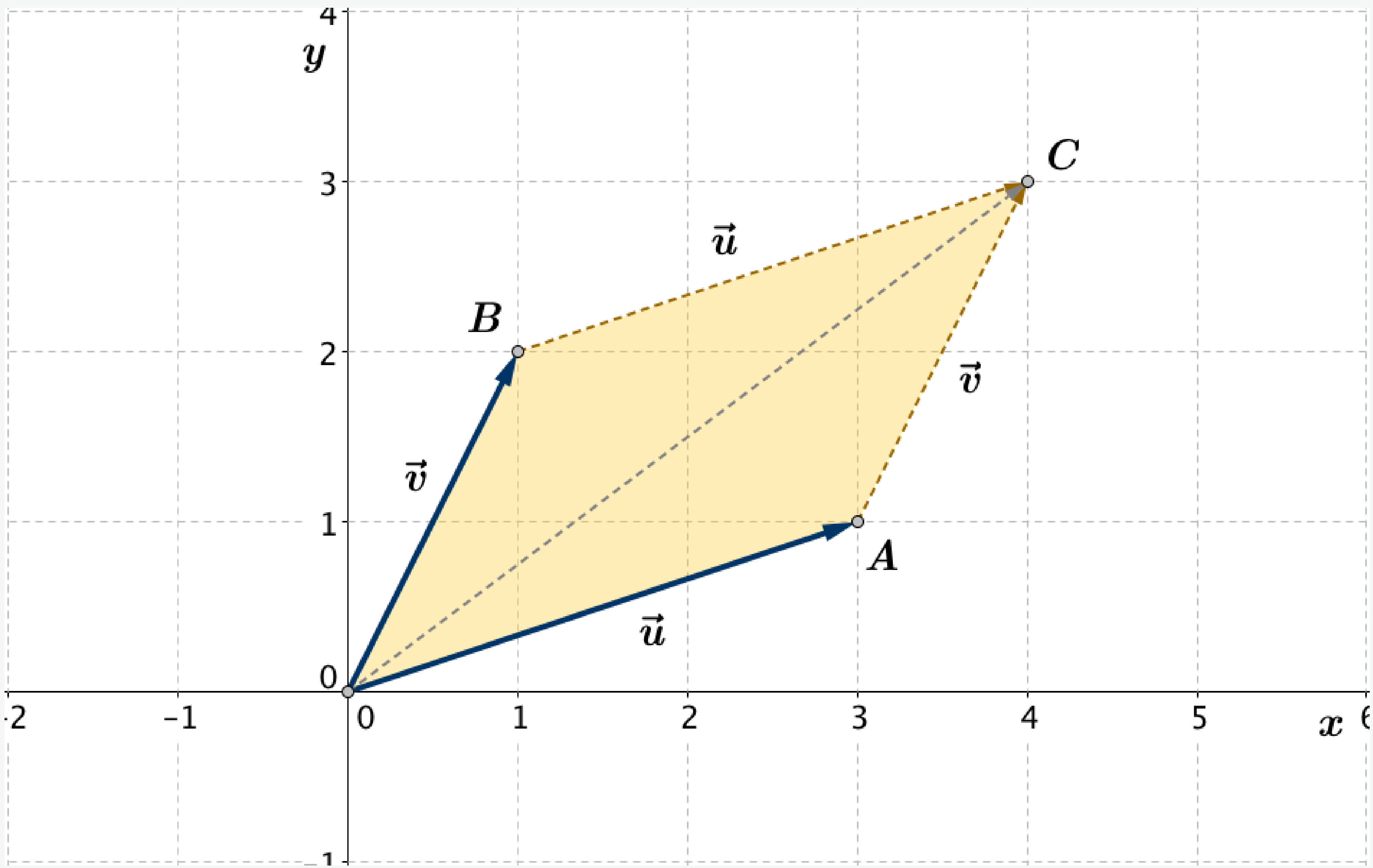


Abb. E-1: Zur geometrischen Deutung der Determinante

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}, \qquad \vec{u}, \ \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

Im Folgenden wird die Fläche des von den Vektoren ***u*** und ***v*** aufgespannten Parallelogramms bestimmt. Dazu berechnen wir folgende Flächen:

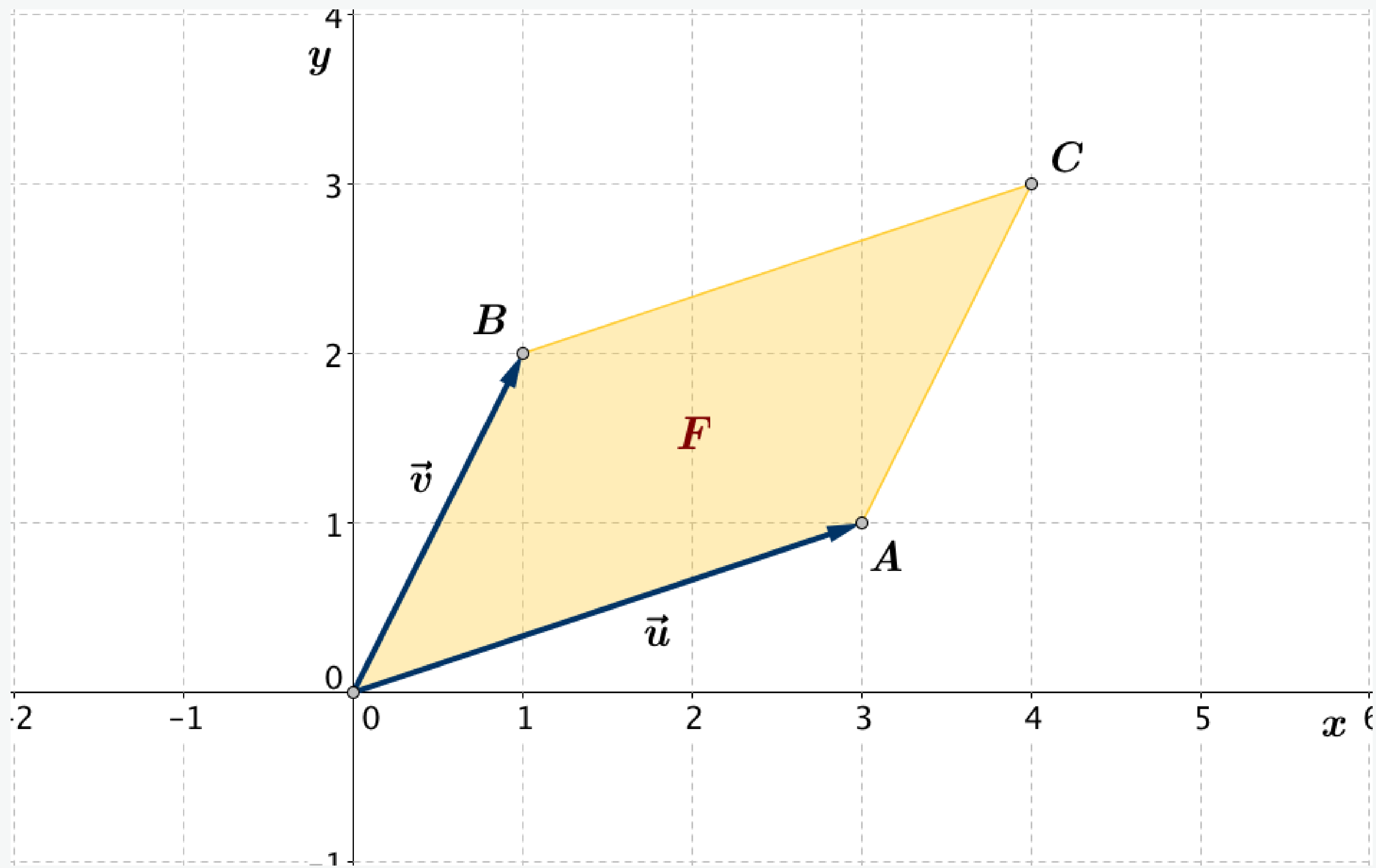


Abb. E-2: Die gesuchte Fläche F

$$F = F_1 - F_2$$

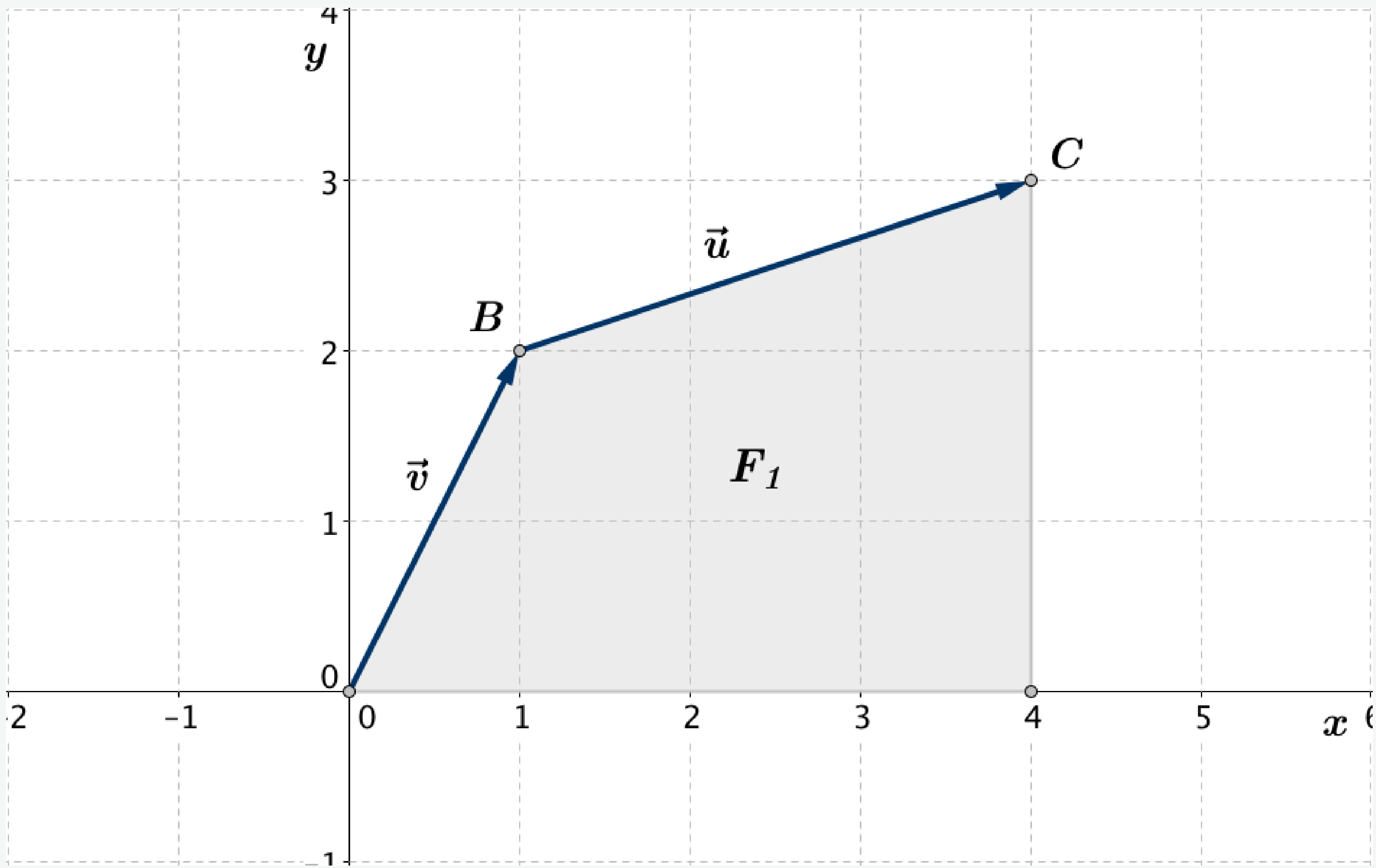


Abb. E-3: Die erste Hilfsfläche

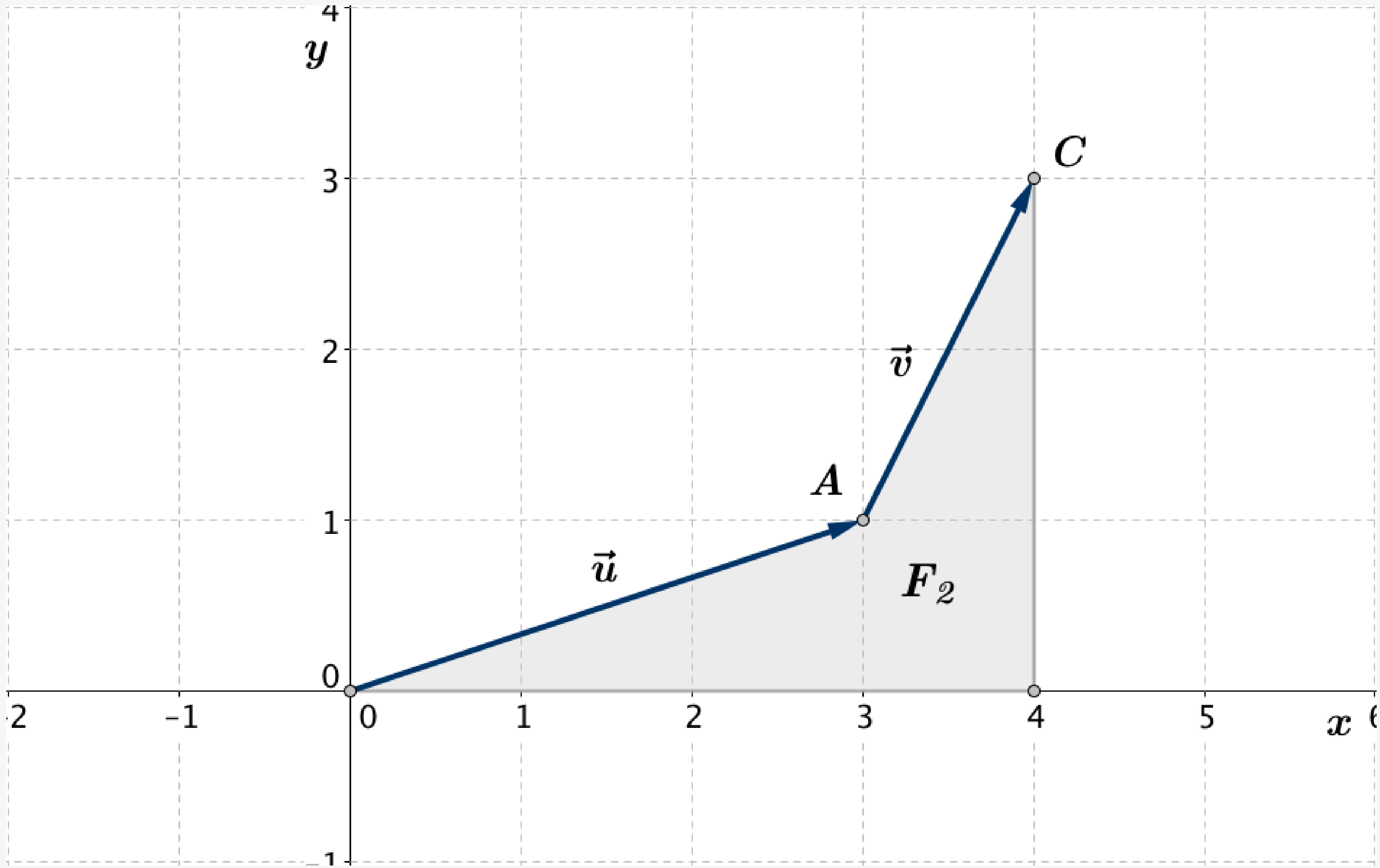
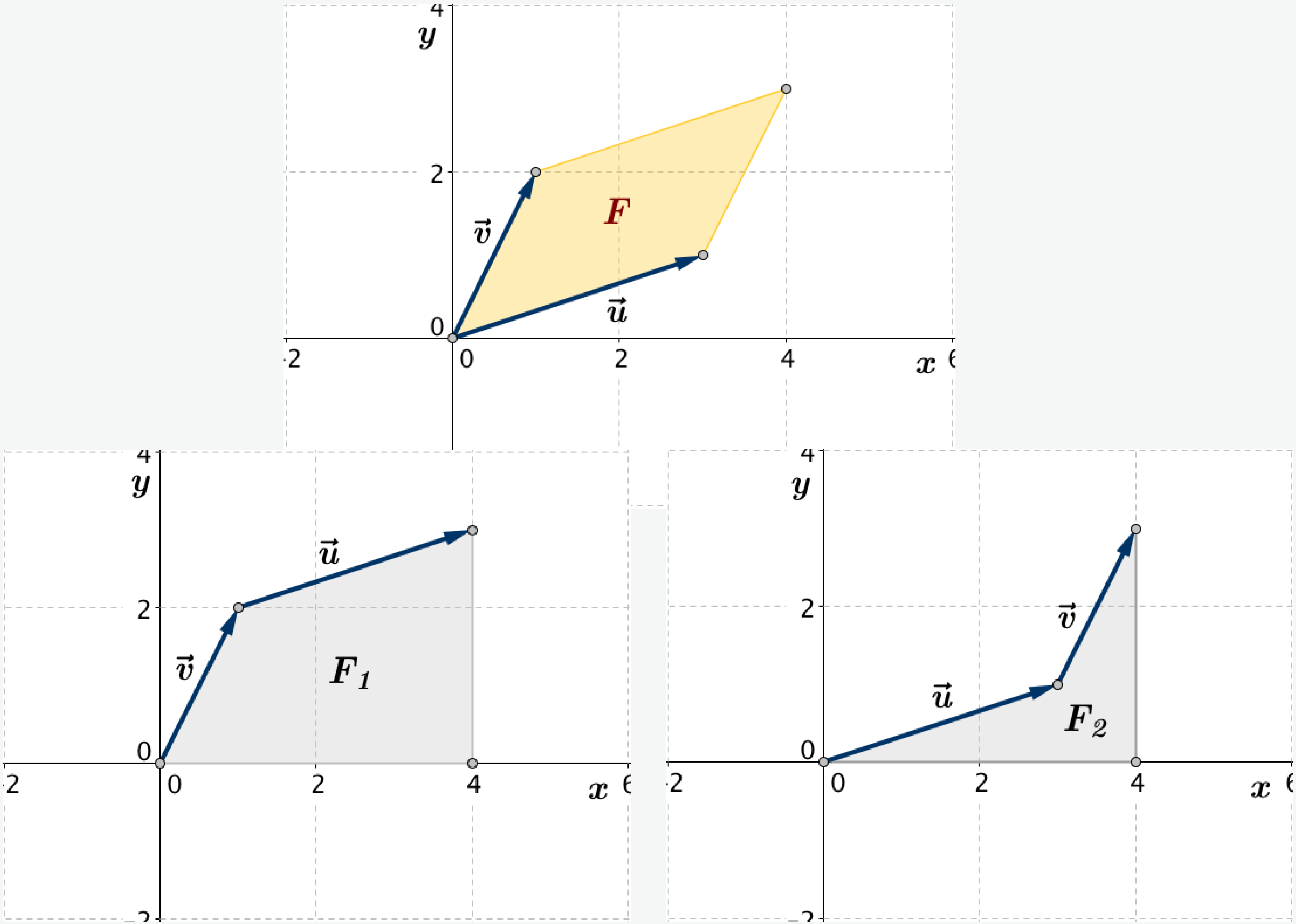


Abb. E-4: Die zweite Hilfsfläche



$$F = F_1 - F_2$$

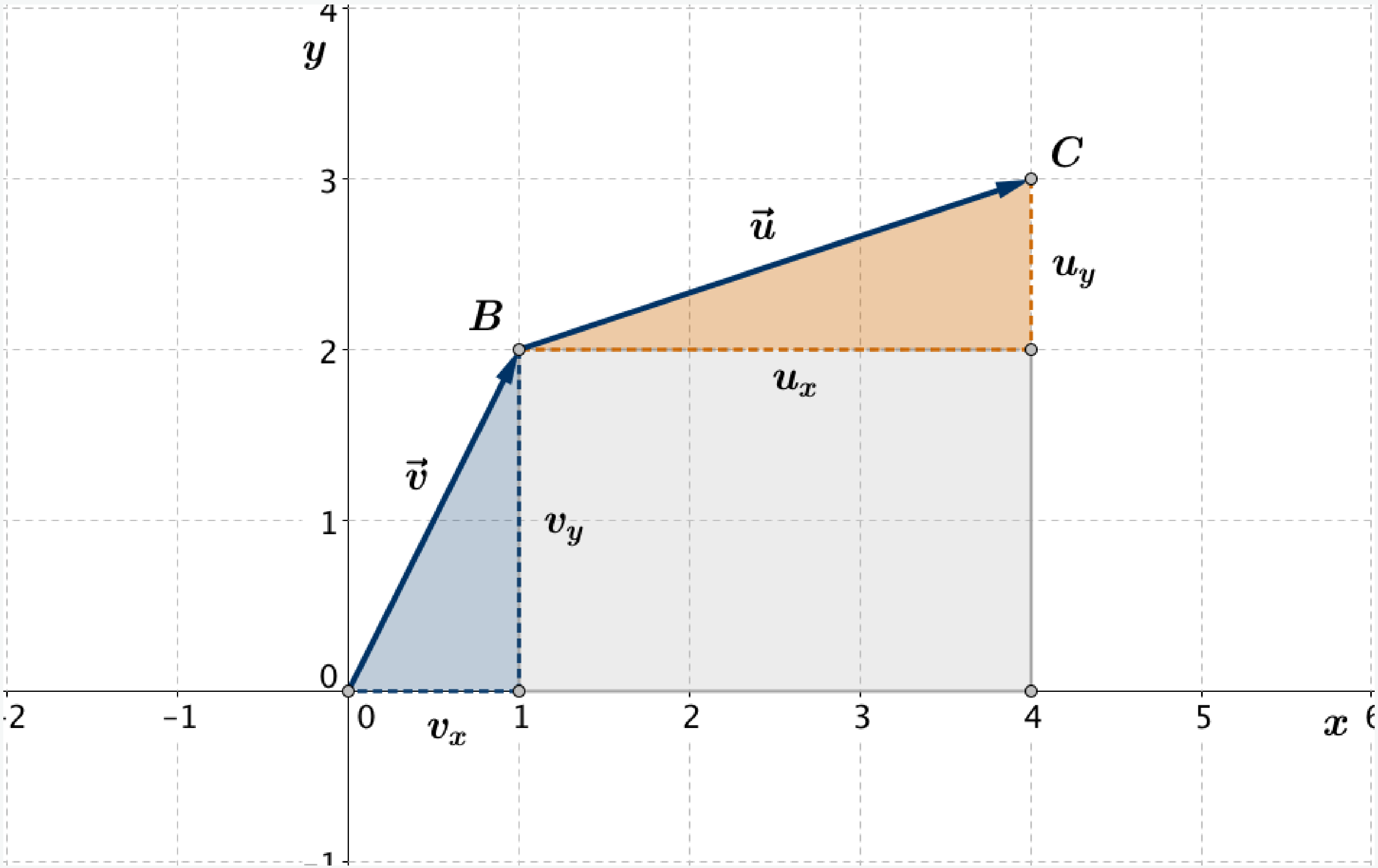


Abb. E-5: Zur geometrischen Deutung einer Determinante

$$F_1 = \frac{1}{2}\, v_x\, v_y + u_x v_y + \frac{1}{2}\, u_x\, u_y$$

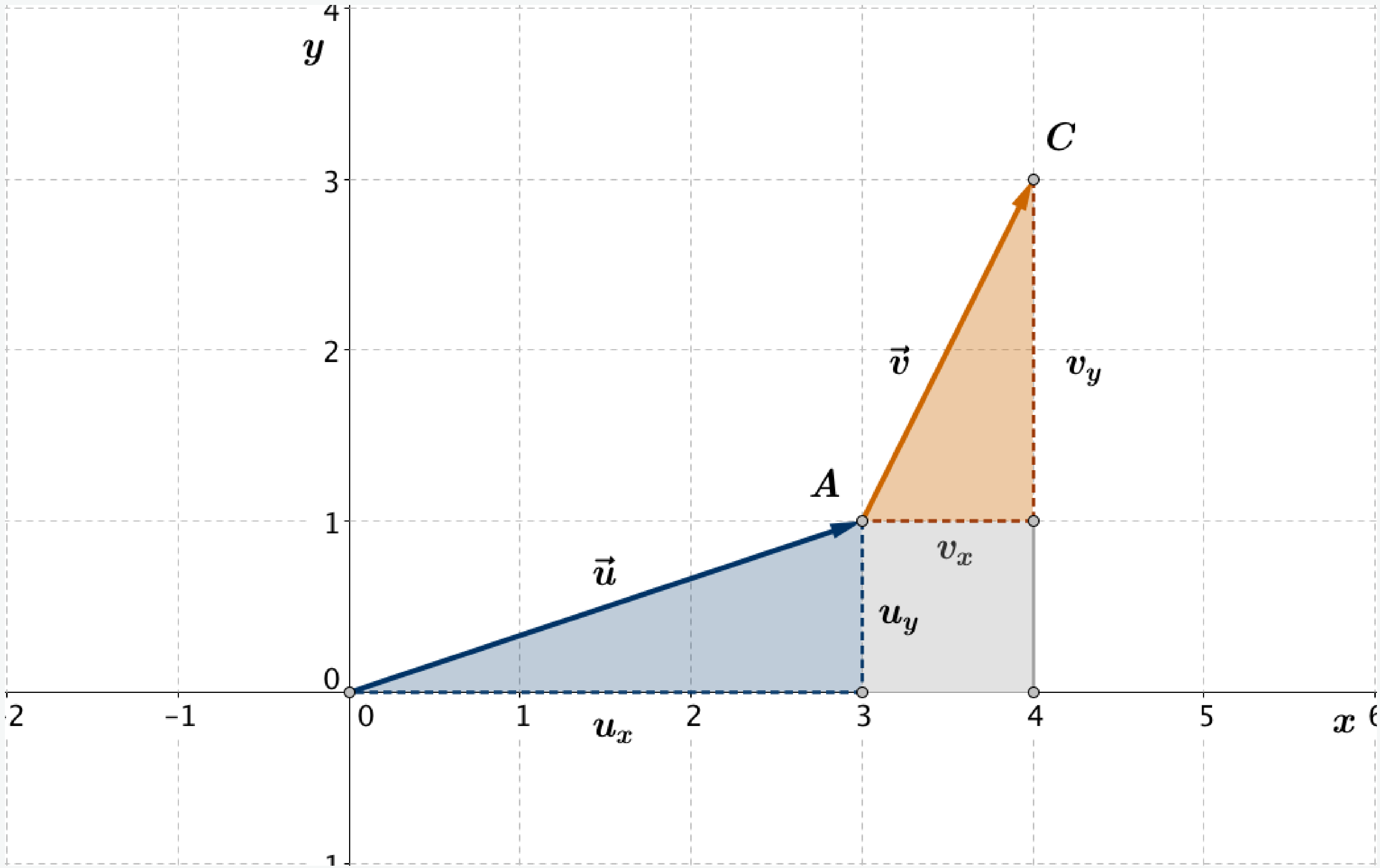


Abb. E-6: Zur geometrischen Deutung einer Determinante

$$F_2 = \frac{1}{2}\, u_x\, u_y + v_x u_y + \frac{1}{2}\, v_x\, v_y$$

$$F_1 = \frac{1}{2} v_x v_y + u_x v_y + \frac{1}{2} u_x u_y$$

$$F_2 = \frac{1}{2} u_x u_y + v_x u_y + \frac{1}{2} v_x v_y$$

Die Fläche des von den Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich der Differenz dieser Flächen:

$$F = F_1 - F_2 = u_x v_y - v_x u_y$$

Die bestimmte Fläche F ist gleich der Determinante einer Matrix, deren Zeilen oder Spalten die Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ sind

$$A = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}, \qquad \det A = u_x v_y - u_y v_x$$

Abb. 1-1: Zur geometrischen Deutung der Determinante

Zwei linear abhängige Vektoren des *2D*-Raum sind kollineare Vektoren und spannen aus diesem Grund keine Fläche auf. Die entsprechende Determinante ist gleich Null.

*Abb. 1-2: Die Vektoren **(u, v)** sind positiv orientiert und **(v, u)** negativ*

Die Determinante det A ist positiv, wenn sich die Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}$ aus der des Vektors $\boldsymbol{u}$ durch eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn ergibt.

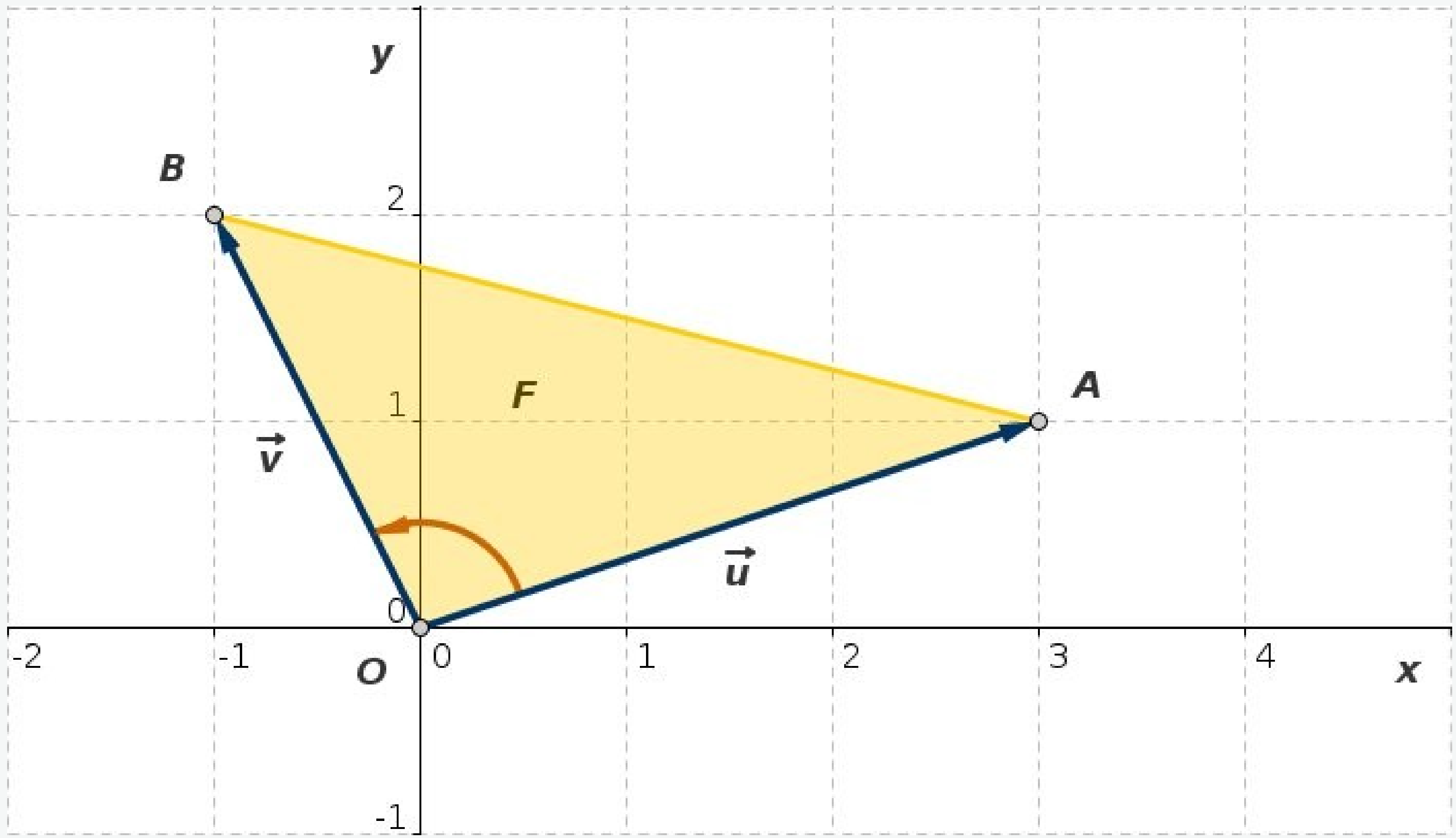


*Abb. 1-3: Die positiv orientierten Vektoren **u** und **v**, das Dreieck OAB*

Mittels der Determinante kann die Fläche eines Dreiecks bestimmt werden. Wenn das Dreieeck von zwei positiv orientierten Vektoren erzeugt wird, gilt:

$$F = \frac{1}{2} \det \left(\vec{u} \,, \; \vec{v} \right)$$

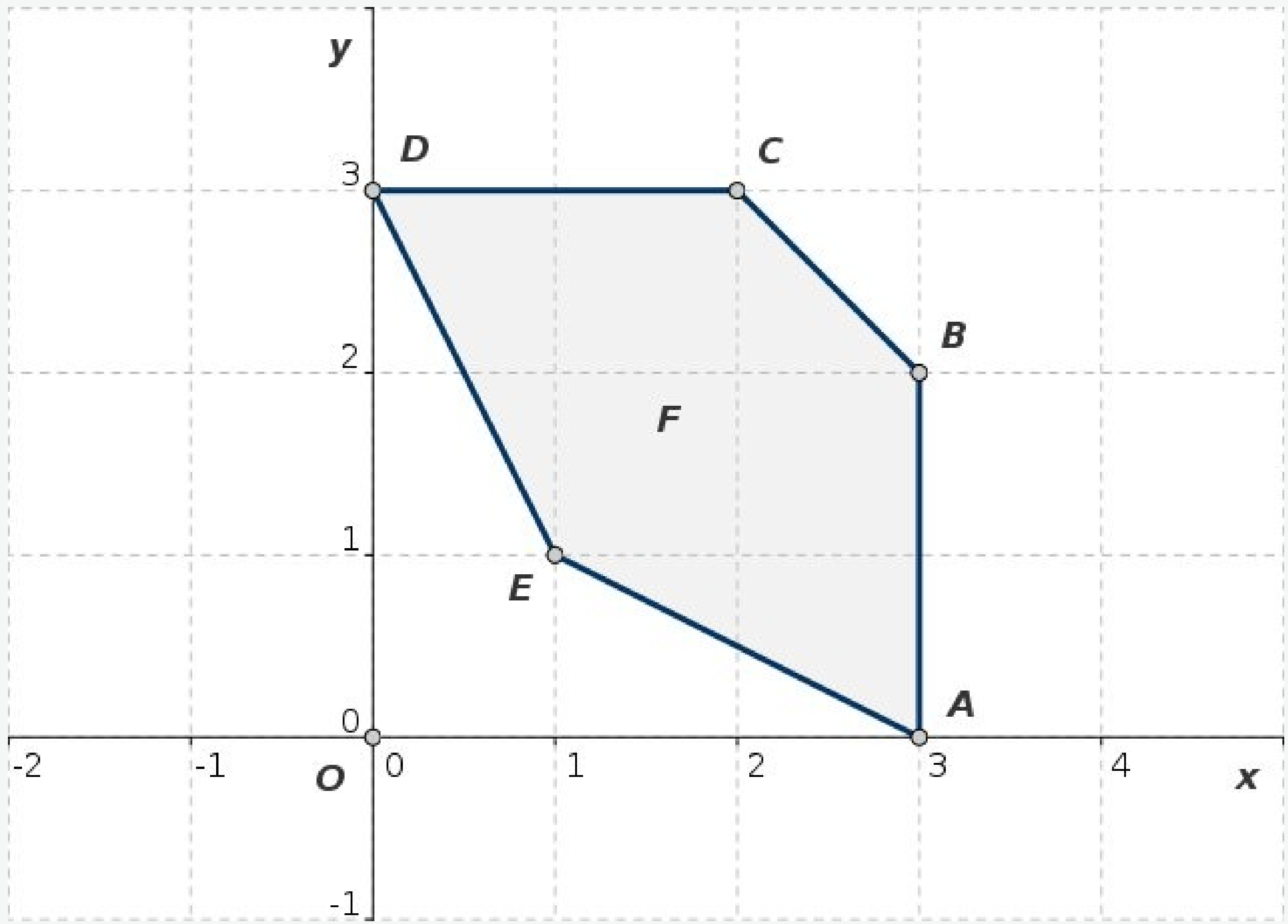
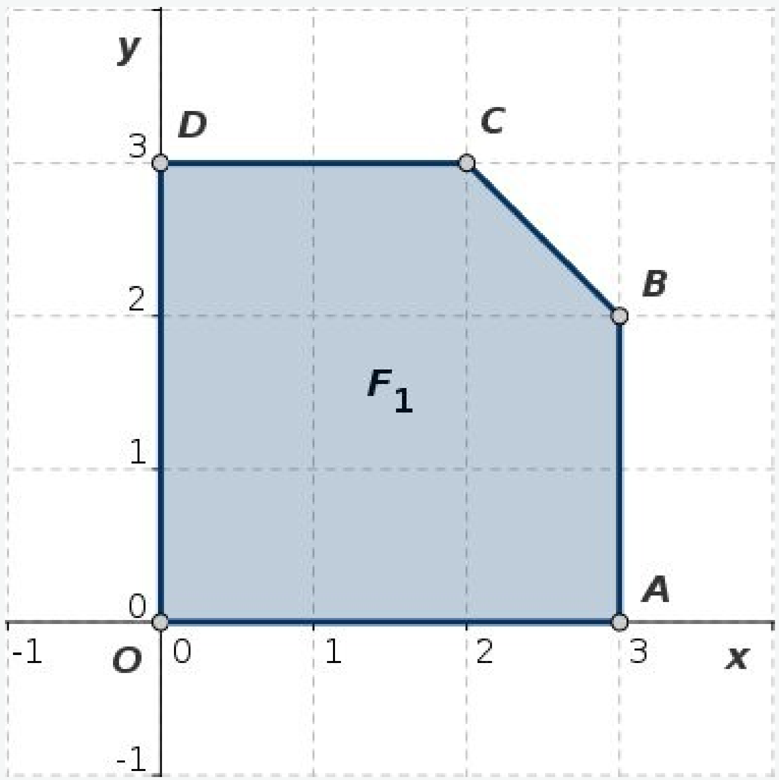


Abb. 2-1: Eine Fläche ABCDE

Mit Hilfe der Determinante kann man auch kompliziertere Flächen, wie z.B. die Fläche *ABCDE*, bestimmen.



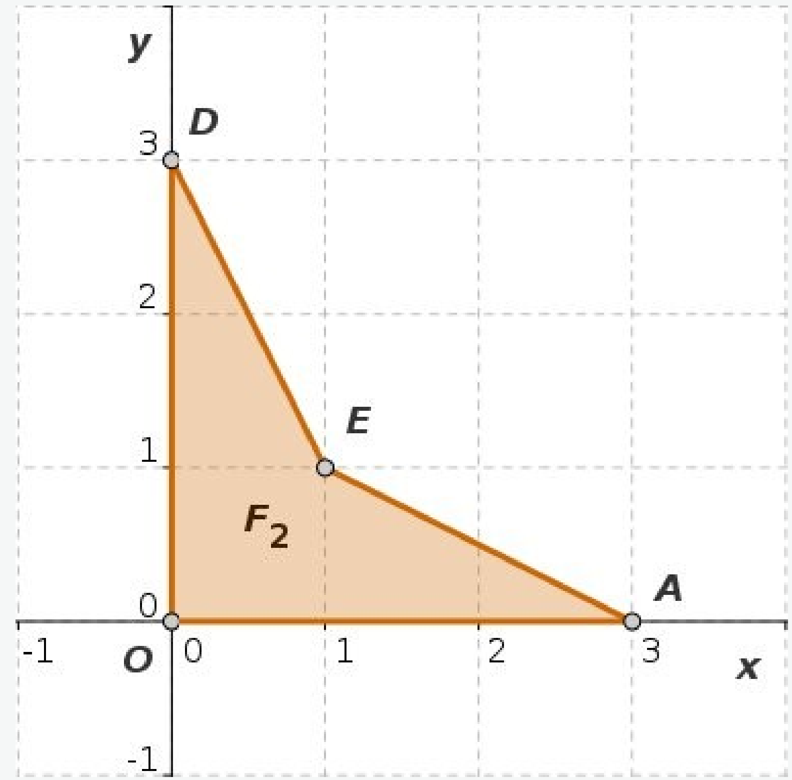


Abb. 2-2: Flächen OABCD und OAED

Die Fläche F der Abb. *5-1* ist die Differenz der in Abb. *5-2* dargestellten Flächen

$$F = F_1 - F_2$$

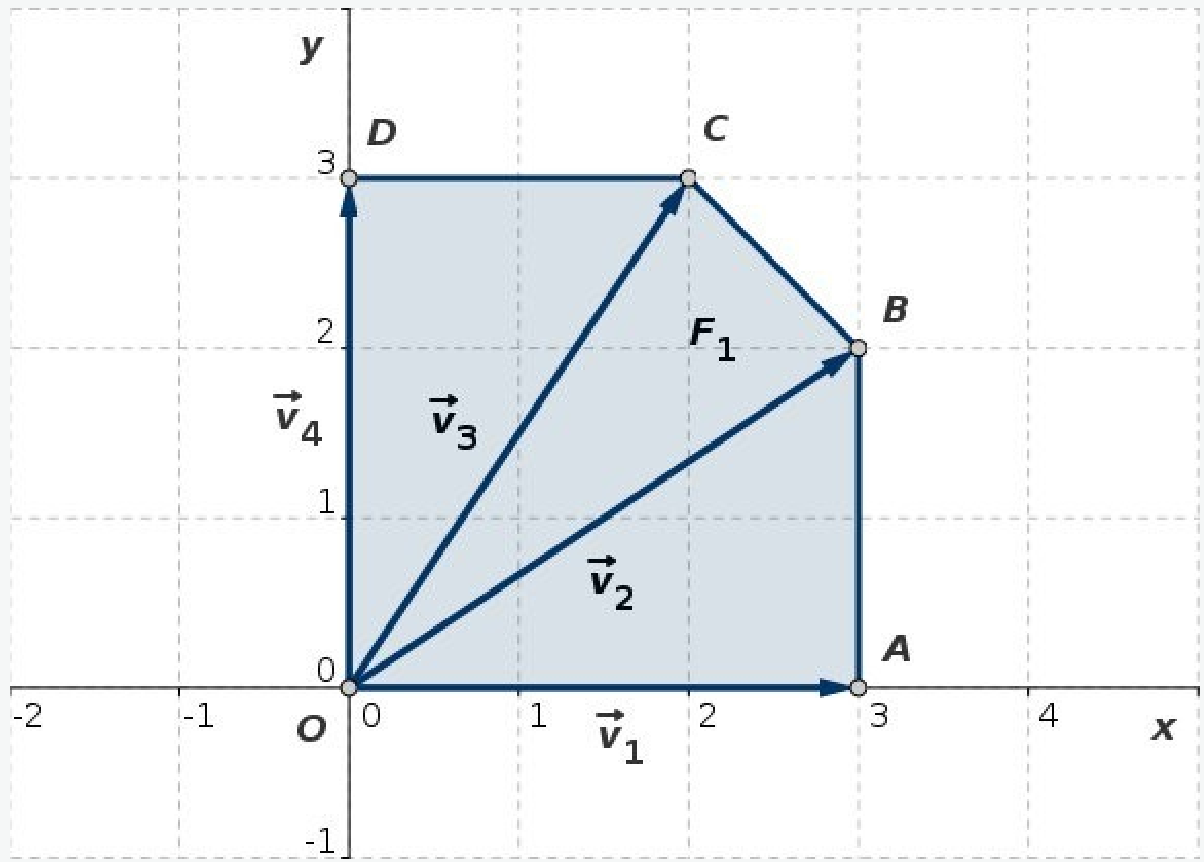


Abb. 2-3: Die Fläche OABCD

Die in Abb. *5-3* dargestellte Fläche F_1 wird von den folgenden Vektoren erzeugt:

$$\vec{v}_1\,,\quad \vec{v}_2\,,\quad \vec{v}_3\,,\quad \vec{v}_4$$

$$2\,F_1 = \det\left(\vec{v}_1\,,\ \vec{v}_2\right) + \det\left(\vec{v}_2\,,\ \vec{v}_3\right) + \det\left(\vec{v}_3\,,\ \vec{v}_4\right)$$

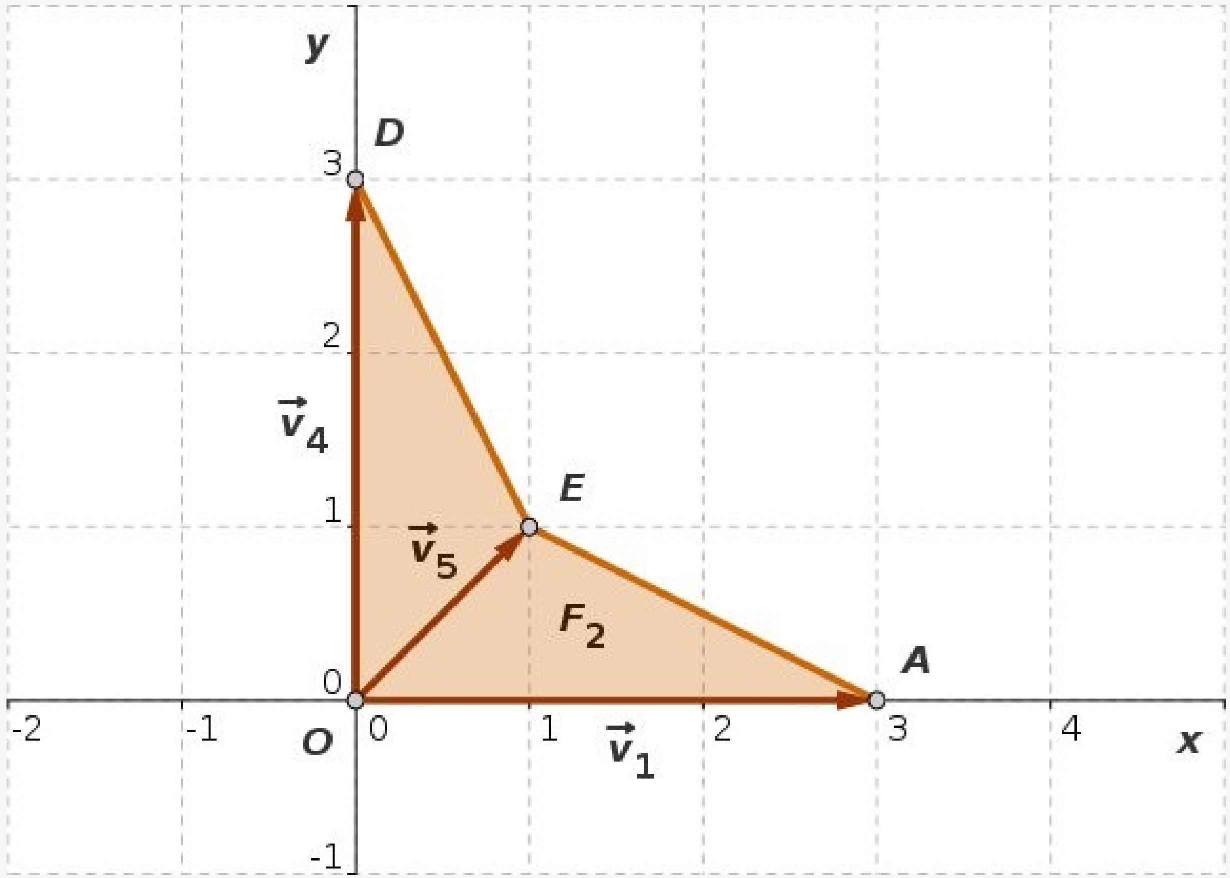


Abb. 2-4: Die Fläche OAED

Die in Abb. *5-4* dargestellte Fläche F_2 wird von den folgenden Vektoren erzeugt:

$$\vec{v}_1, \quad \vec{v}_5, \quad \vec{v}_4$$

$$2\,F_2 = \det(\vec{v}_1,\ \vec{v}_5) + \det(\vec{v}_5,\ \vec{v}_4)$$

$$2\,F_1 = \det(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2,\ \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_3,\ \vec{v}_4) =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 5 + 6 = 17 \ \text{FE}$$

$$F_1 = 8.5 \ \text{FE}$$

$$2\,F_2 = \det(\vec{v}_1,\ \vec{v}_5) + \det(\vec{v}_5,\ \vec{v}_4)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6 \ \text{FE}$$

$$F_2 = 3 \ \text{FE}, \qquad F_1 - F_2 = 8.5 - 3 = 5.5 \ \text{FE}$$

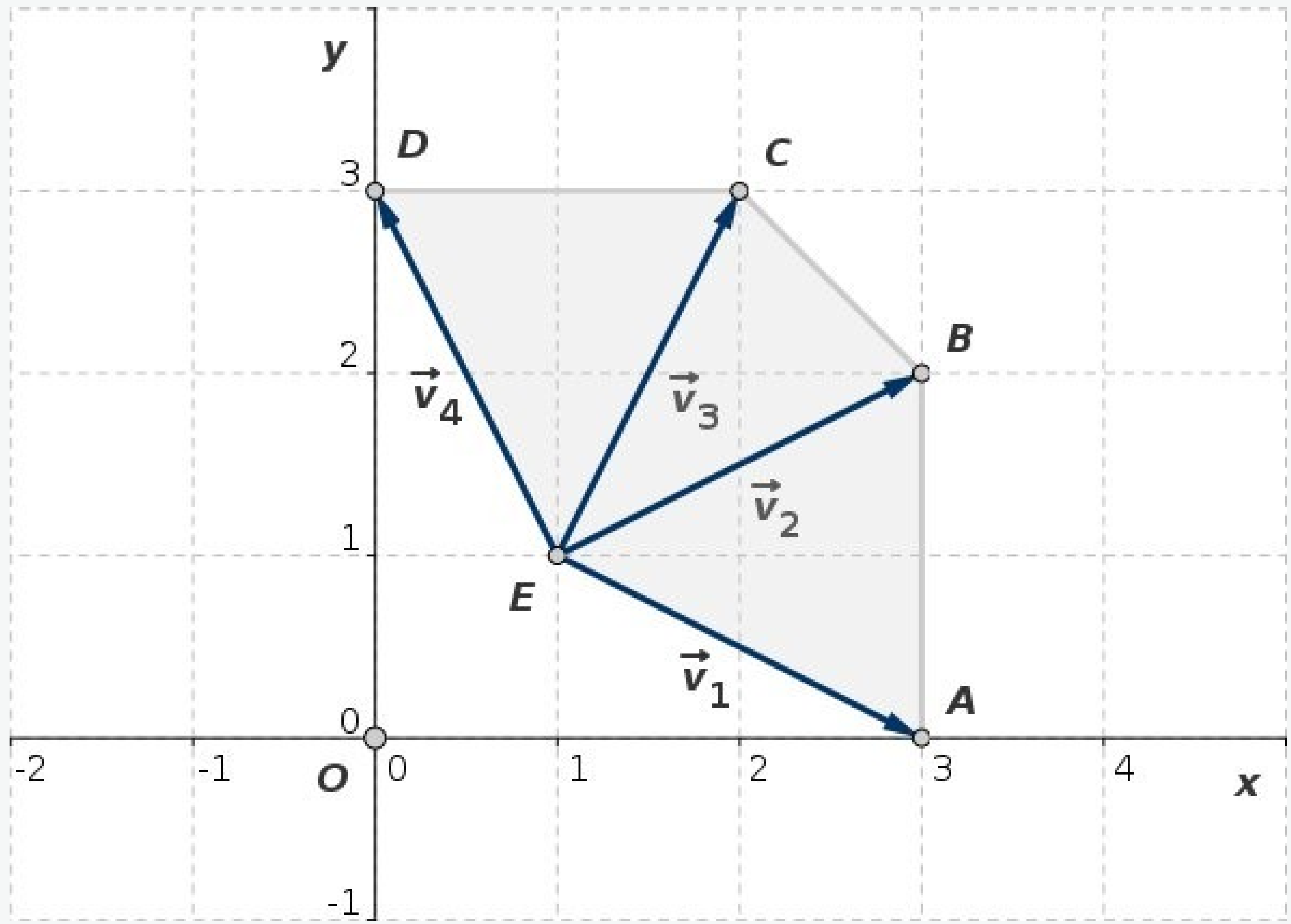


Abb. 3-1: Die Fläche ABCDE der Abb. 5-1

$$A\,(3,\ 0)\,,\quad B\,(3,\ 2)\,,\quad C\,(2,\ 3)\,,\quad D\,(0,\ 3)\,,\quad E\,(1,\ 1)$$

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{EA} = (2,\ -1)\,,\quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{EB} = (2,\ 1)\,,\quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{EC} = (1,\ 2)\,,\quad \vec{v}_4 = \overrightarrow{ED} = (-1,\ 2)$$

$$2\,F_{ABCDE} = \det(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2,\ \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_3,\ \vec{v}_4) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 4 = 11\ \text{FE}$$

$$F_{ABCDE} = 5.5\ \text{FE}$$