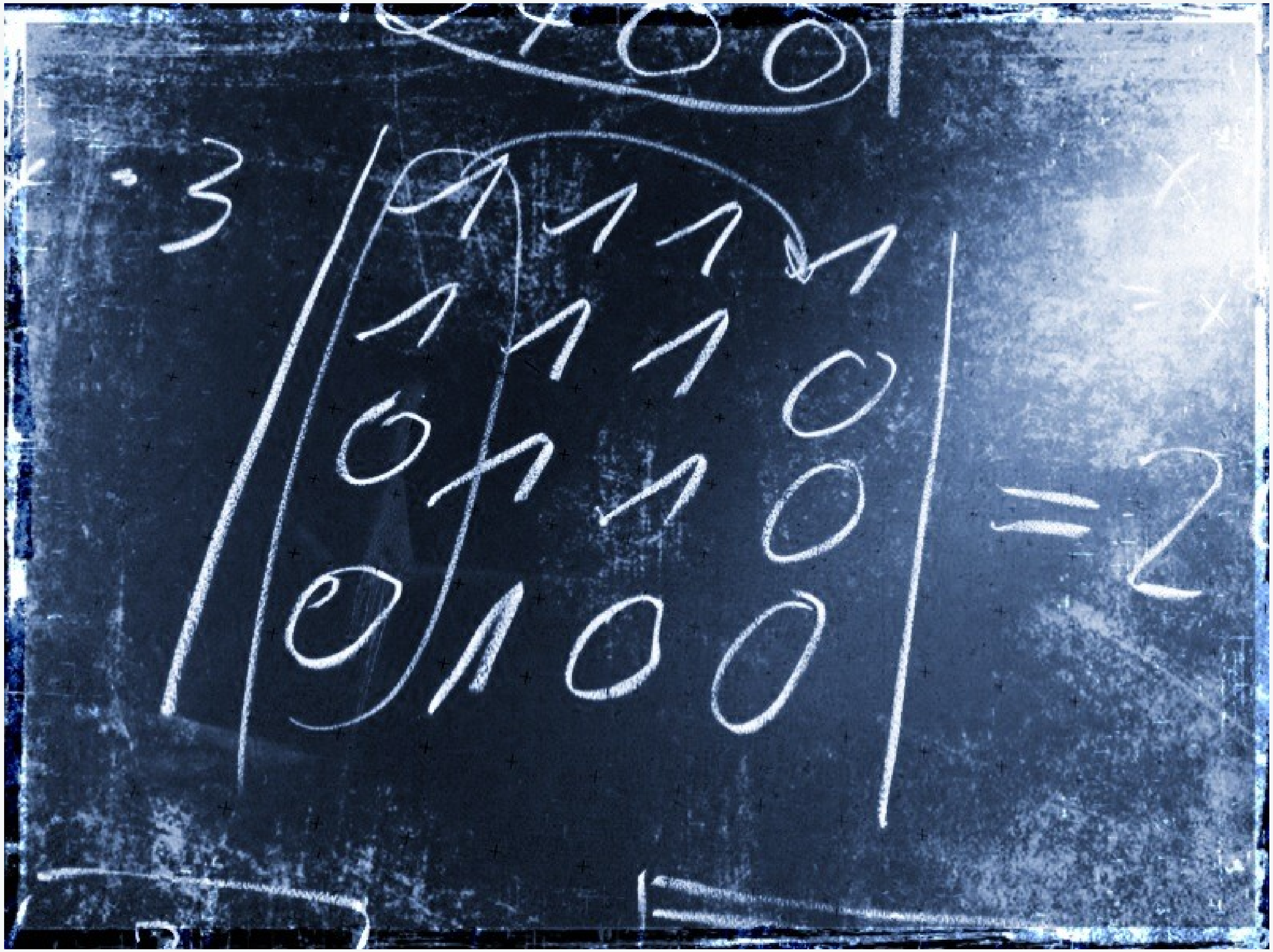

Determinanten höherer Ordnung

Für Determinanten bestehen – unabhängig von der Ordnung – einheitliche Rechenregeln.

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \, a_{ik} \, U_{ik}$$

Entwicklung nach der *i*-ten Zeile

Entwicklung einer Determinante 4. Ordnung nach den Elementen 1. Zeile

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} (-1)^{1+1} U_{11} + a_{12} (-1)^{1+2} U_{12} + a_{13} (-1)^{1+3} U_{13} + a_{14} (-1)^{1+4} U_{14} =$$

$$= a_{11} U_{11} - a_{12} U_{12} + a_{13} U_{13} - a_{14} U_{14}$$

Aufgabe 1: Berechnen Sie folgende Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 2: Mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace ist zu berechnen

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & 0 & \omega & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \omega \end{vmatrix}$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Schritt 1: Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile

$$D_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Schritt 2: Berechnung der *3*-reihigen Determinanten.

Zwei Möglichkeiten: *1)* die Formel von Sarrus

2) weitere Entwicklung in *2*-reihigen Determinanten

$$D_1 = 24$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

1. Die Spalten 2 und 4 werden vertauscht, das Vorzeichen der Determinante wird geändert.

2. Die Spalten 1 und 2 der neuen Matrix werden vertauscht, das Vorzeichen der Determinante wird geändert.

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}_{\text{Dreiecksgestalt}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -23 + 63 = 40$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & 0 & \omega & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \omega \end{vmatrix} = \alpha^2 \omega^2 + \beta^2 \gamma^2 - 2 \alpha \beta \gamma \omega$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 89$$

Entwicklung nach der 5. Zeile *Entwicklung nach der 4. Zeile*