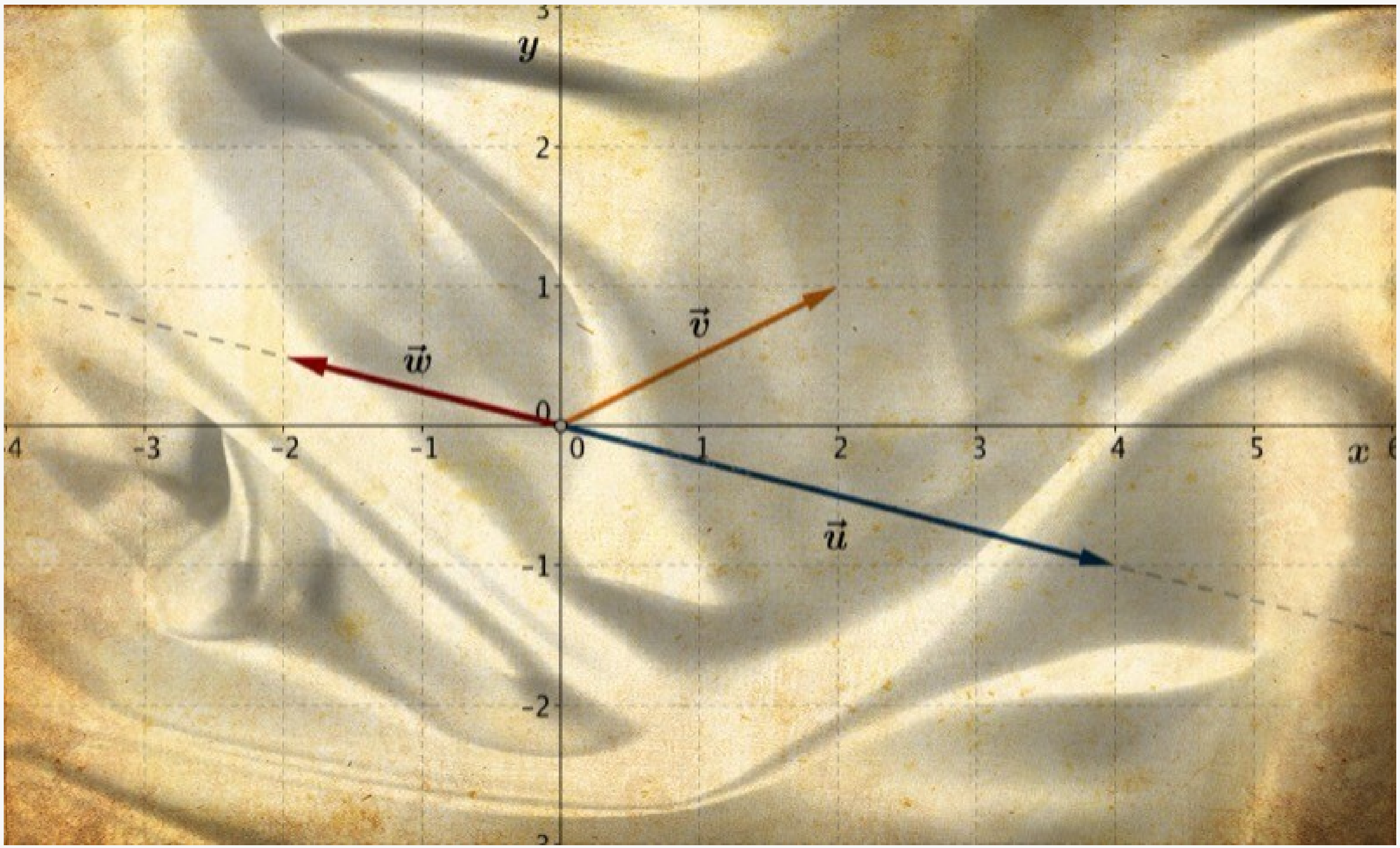

Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit und Determinanten

Um zu prüfen, ob gegebene Vektoren linear abhängig, bzw. unabhängig sind, gibt es verschiedene Methoden. Bei n n-dimensionalen Vektoren kann man die Abhängigkeit mit Hilfe von n-reihigen Determinanten prüfen.

Algorithmus:

1. Die Vektoren werden nebeneinander in eine Matrix M geschrieben. Es spielt keine Rolle, ob die Vektoren als Zeilen oder Spalten geschrieben werden.

2. Die Determinante dieser Matrix wird bestimmt.

3. Ist die Determinante gleich null, sind die Vektoren linear abhängig. Ist die Determinante ungleich null, so sind die Vektoren linear unabhängig.

Lineare Abhängigkeit und Determinanten: Beispiel 1

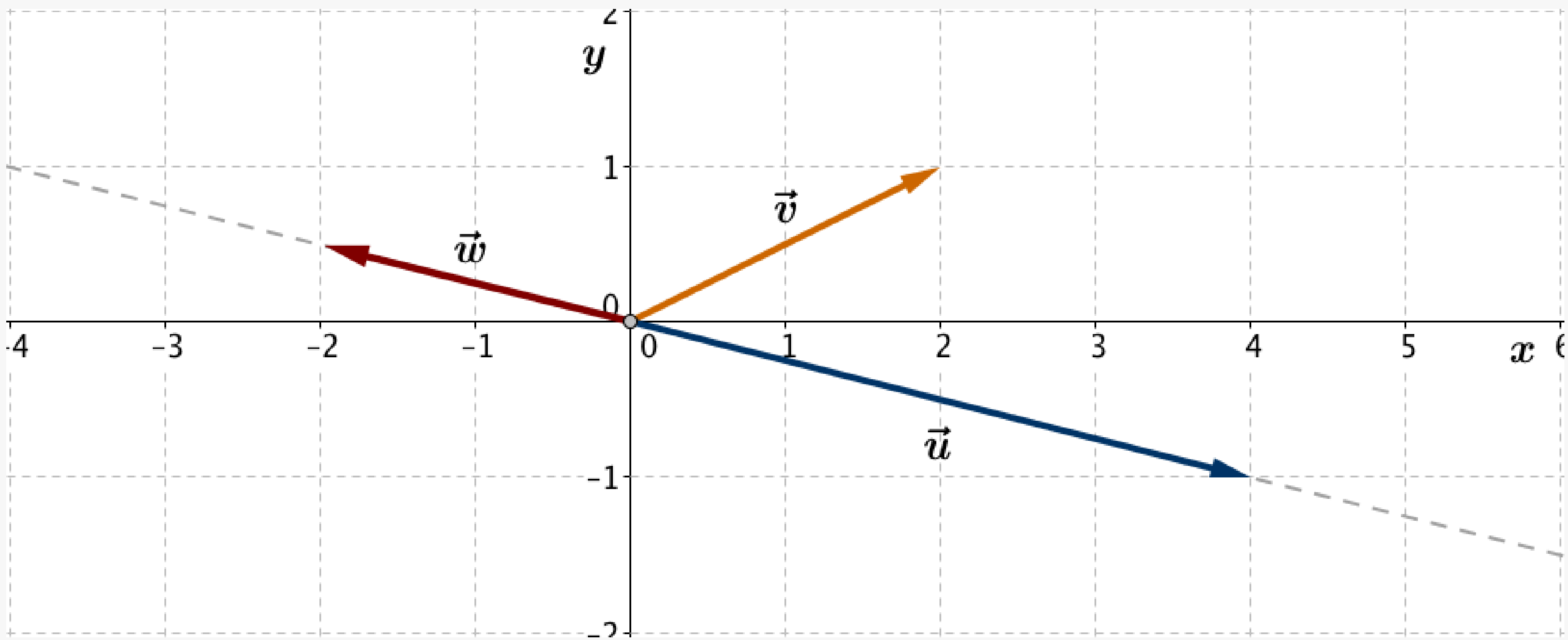

*Abb. B1: Graphische Darstellung der Vektoren **u**, **v** und **w**. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass die Vektoren **u** und **v** linear unabhängig und die Vektoren **u** und **w** linear unabhängig sind (**w** = - 2 **u**).*

$$\vec{u} = (4, -1), \qquad \vec{v} = (2, 1), \qquad \vec{w} = (-2, 0.5)$$

$$\det(\vec{u}\,,\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - (-2) = 6$$

$$\det(\vec{u}\,,\ \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0.5 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie mit Hilfe einer 3-reihigen Determinante, ob die Vektoren ***a***, ***b*** und ***c*** linear abhängig oder unabhängig sind:

$a)\ \vec{a} = (21,\ 22,\ 23), \quad \vec{b} = (24,\ 25,\ 26), \quad \vec{c} = (27,\ 28,\ 29)$

$b)\ \vec{a} = (1,\ 2,\ 3), \quad \vec{b} = (-3,\ 4,\ -5), \quad \vec{c} = (0,\ 1,\ -1)$

$c)\ \vec{a} = (1,\ 1,\ 2), \quad \vec{b} = (3,\ -1,\ 1), \quad \vec{c} = (-1,\ 3,\ 3)$

$$a)\ \ D = \begin{vmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 22 & 25 & 28 \\ 23 & 26 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2Z – 1Z, 3Z - 2Z

Die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ sind linear abhängig.

$$b)\ \ D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -14$$

Die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ sind linear unabhängig.

$$c)\ \ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ sind linear abhängig.