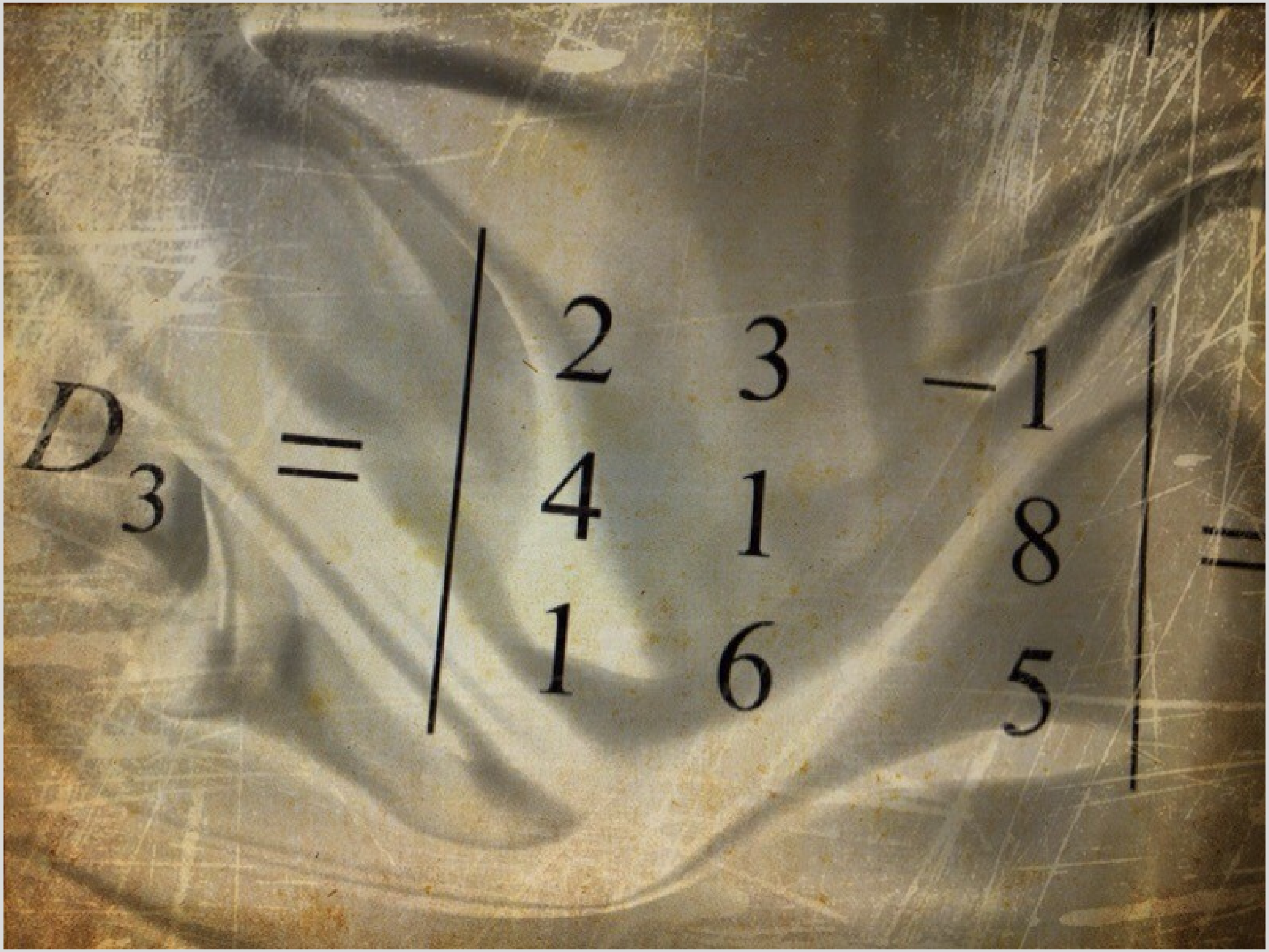


Determinanten 3. Ordnung

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$A \; X = C$$

Dieses System besitzt nur dann genau eine Lösung, wenn $\det A$ von Null verschiedenen ist:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Die Regel von Sarrus ist ein Schema, mit dem die Determinante einer (3,3)-Matrix berechnet werden kann. Benannt ist diese Regel nach dem französischen Mathematiker Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

! Die Regel von Sarrus gilt nur für 3-reihige Determinanten.

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Hauptdiagonalprodukte

Nebendiagonalprodukte

Die erste und die zweite Spalte der Determinante werden noch einmal rechts angeschrieben. Den Wert der Determinante berechnet man, indem man die drei Hauptdiagonalprodukte addiert (rot gekennzeichnet) und von dieser Summe die drei Nebendiagonalprodukte subtrahiert.

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Determinante der 3-reihigen Matrix M nach der Regel von Sarrus:

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad d)\ M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e)\ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad det\ M = 51$$

$$b)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad det\ M = -111$$

$$c)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad det\ M = 0$$

$$d)\ M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad det\ M = 42$$

$$e)\ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$det\ M = a\,e\,i + c\,d\,h + b\,f\,g - c\,e\,g - b\,d\,i - a\,f\,h$$

Entwicklung einer Determinante 3. Ordnung nach der 1. Zeile:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \underbrace{\boxed{(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}}_{A_{11}} + a_{12} \underbrace{\boxed{(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}}_{A_{12}} + a_{13} \underbrace{\boxed{(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}}_{A_{13}} =$$

$$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

$D = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_{ik}$ – Entwicklung nach der i-ten Zeile $(i = 1, 2, 3)$

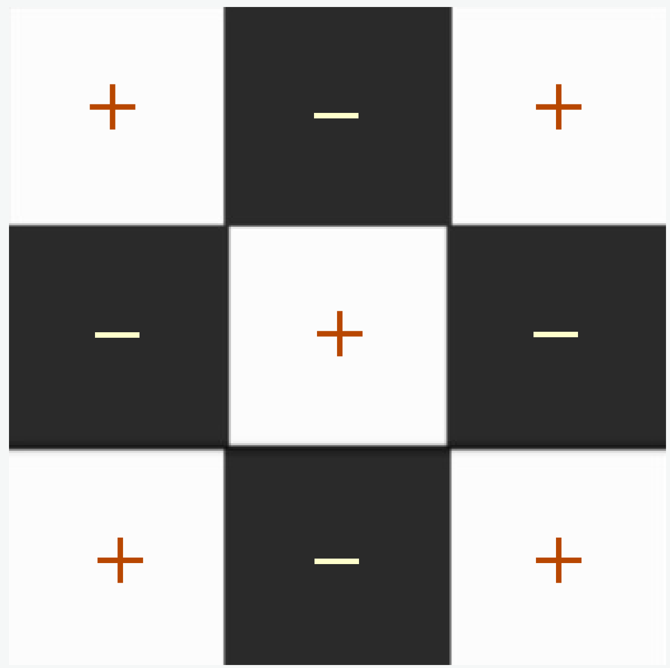
$D = \sum_{i=1}^{3} a_{ik} A_{ik}$ – Entwicklung nach der k-ten Spalte $(k = 1, 2, 3)$

$A_{ik} = (-1)^{i+k} U_{ik}$ – Algebraisches Komplement von a_{ik} in D

U_{ik} – 2-reihige Unterdeterminante von D (in D wird i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen).

Algebraisches Komplement oder Adjunkte

Die Größe $A_{ik} = (-1)^{i+k}\, U_{ik}$ heißt algebraisches Komplement oder Adjunkte des Elementes a_{ik} in der Determinante D. Der Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+k}$ kann nach der Schachbrettregel bestimmt werden.



Schachbrettregel: Das Vorzeichen von A_{ik} steht im Schnittpunkt der i-ten Zeile mit k-ten Spalte.

Entwicklung einer Determinante 3. Ordnung nach der 1. Zeile:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{U_{11}} + a_{12}(-1)^{1+2} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{U_{12}} + a_{13}(-1)^{1+3} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{U_{13}} =$$

$$= a_{11} U_{11} - a_{12} U_{12} + a_{13} U_{13}$$

$$\boxed{D = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{i+k} a_{ik} U_{ik}}$$ – Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+k} a_{ik} U_{ik}}$$ – Entwicklung nach der k-ten Spalte

U_{ik} – 2-reihige Unterdeterminante von D

Gegeben ist die 3-reihige Determinante D. Berechnen Sie die Unterdeterminanten D_{12}, D_{33} und die zugehörigen algebraischen Komplemente

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminante mit den Indices 1 2 bekommt man durch Streichen der 1. Zeile und 2. Spalte:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{1} \\ 0 & \cancel{5} & 2 \\ 2 & \cancel{-2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = (-1) \cdot (-4) = 4$$

Die Unterdeterminante mit den Indices 3 3 bekommt man durch Streichen der 1. Zeile und 2. Spalte:

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} D_{33} = 1 \cdot 5 = 5$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgende Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 0 \\ -6 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie folgende Determinante durch Entwicklung nach der 1. Zeile mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie folgende Determinanten

$$D_5 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \qquad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}, \qquad D_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5: Für welche Werte des Parameters α nehmen diese Determinanten den Wert Null an?

$$D_8 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha \end{vmatrix}, \qquad D_9 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_{10} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad D_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie die folgenden Determinanten. Für welche Werte des Parameters t nehmen diese Determinanten den Wert Null an?

$$D_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2t & 1 \\ 0 & t & t \end{vmatrix}, \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} -t & 2 & 1 \\ 2 & 4t & 0 \\ 0 & 2t & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & t & t \\ -1 & 2 & t \\ 0 & t & 3 \end{vmatrix}, \qquad D_{15} = \begin{vmatrix} t & 0 & t \\ 2t & 0 & -2t \\ t & -t & -1 \end{vmatrix}$$

Lösung 2:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 0 \\ -6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Spalten 1 und 2 sind zueinander proportional

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -111$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -145$$

Lösung 3:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -39$$

Die Determinante einer unteren *(3, 3)*-Dreiecksmatrix, ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente

$$D_5 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8$$

Die Determinante einer oberen *(3, 3)*-Dreiecksmatrix, ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente

$$D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 9 = 27$$

$$D_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 8$$

α

1. Wir verwenden die Regel von Sarrus zur Berechnung der Determinante:

$$D_8 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha + 2 - 3 + 2\alpha = \alpha - 1$$

2. Die Determinante wird gleich Null gesetzt. Es entsteht eine Gleichung zur Bestimmung des Parameters:

$$D_8 = \alpha - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 1$$

$$\det D_9 = 6 + \alpha, \qquad \det D_9 = 0, \qquad \alpha = -6$$

$$\det D_{10} = 11 - 4\alpha, \qquad \det D_{10} = 0, \qquad \alpha = \frac{11}{4}$$

$$\det D_{11} = -\alpha^2 + 2\alpha + 1, \qquad \det D_{11} = 0: \;\; \alpha_1 = 1 - \sqrt{2}, \qquad \alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2t & 1 \\ 0 & t & t \end{vmatrix} = -2t^2 - t = -t(2t+1), \qquad t_1 = -\frac{1}{2}, \qquad t_2 = 0$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} -t & 2 & 1 \\ 2 & 4t & 0 \\ 0 & 2t & 1 \end{vmatrix} = -4t^2 + 4t - 4 = 4\left(-t^2 + t - 1\right)$$

$$-t^2 + t - 1 = 0, \qquad \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

Für keinen reellen Wert des Parameters t nimmt diese Determinante den Wert Null an.

$$D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & t & t \\ -1 & 2 & t \\ 0 & t & 3 \end{vmatrix} = -2t^2 + 3t + 6, \qquad t_{1,2} = \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{57}\right)$$

$$D_{15} = \begin{vmatrix} t & 0 & t \\ 2t & 0 & -2t \\ t & -t & -1 \end{vmatrix} = -4t^3, \qquad t = 0$$

Unter einer Vandermonde-Matrix versteht man eine Matrix, die folgende Form hat:

$$V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-Tupel reeller Zahlen.

Die Matrix wurde nach dem französischer Musiker, Mathematiker und Chemiker Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) benannt. Die Determinante wird auch Vandermonde-Determinante genannt.

Aufgabe 7: Berechnen Sie folgende Vandermonde-Determinante:

$$V_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Vandermonde-Determinante: Lösung 7

$$V_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$

2Z – 1Z, 3Z – 1Z

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} =$$

3Z – 2Z

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

Berechnen Sie die folgenden Determinanten

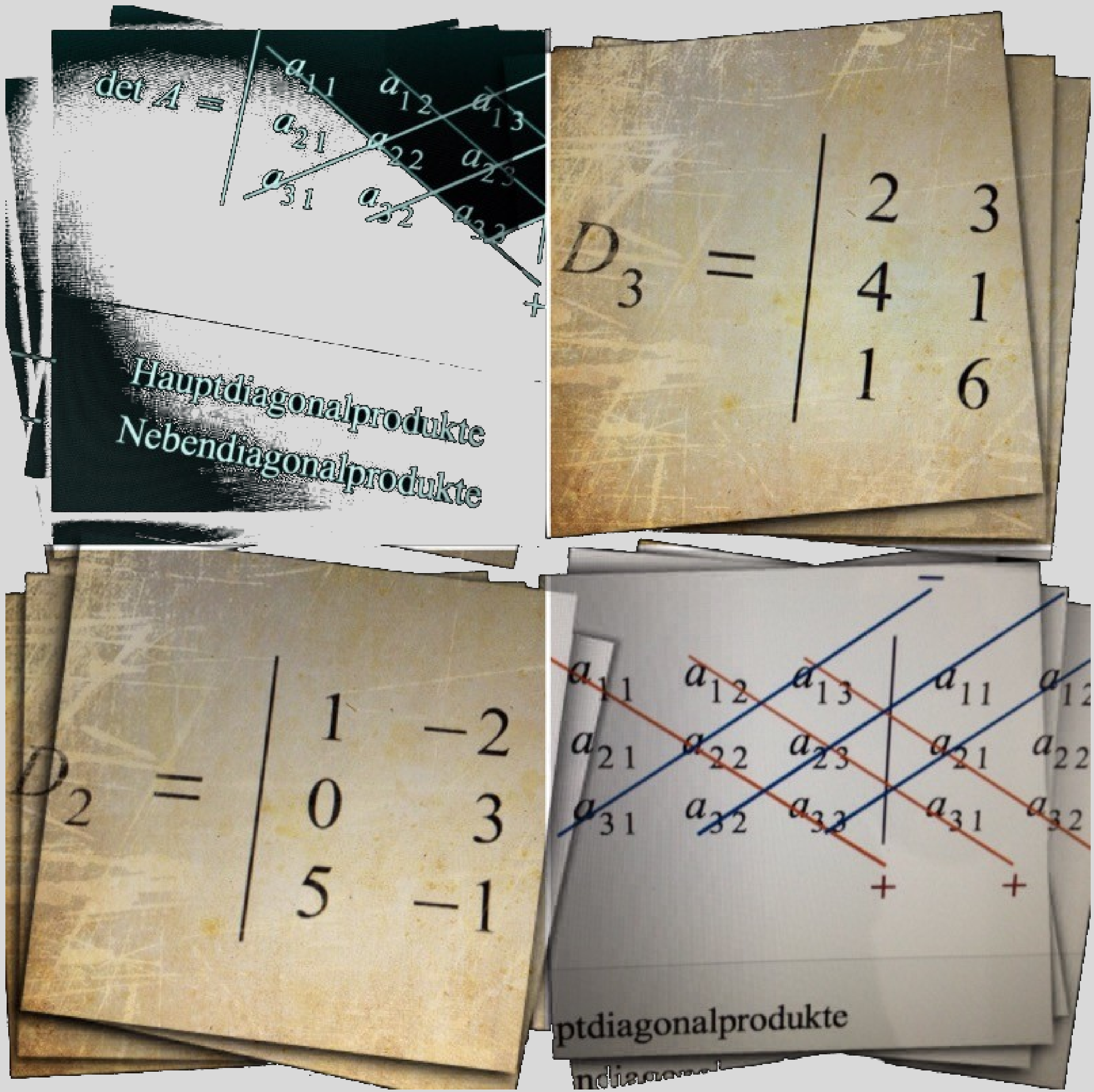
$$a)\ D_a = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 \end{vmatrix}, \qquad b)\ D_b = \begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix}$$

$$a)\ D_a = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2Z – 1Z, 3Z – 1Z

$$b)\ D_b = \begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2Z – 1Z, 3Z – 2Z


det A =
Hauptdiagonalprodukte
Nebendiagonalprodukte
D3 =
2 3
4 1
1 6
D2 =
1 −2
0 3
5 −1
ptdiagonalprodukte