Determinanten zweiter Ordnung

$$A\ X = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}\, x + a_{12}\, y = c_1 \\ a_{21}\, x + a_{22}\, y = c_2 \end{cases}$$

Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem, indem wir eine Unbekannte eliminieren, z.B. die Unbekannte y

$$\begin{cases} a_{11}\, x + a_{12}\, y = c_1 & \mid \quad a_{22} \\ a_{21}\, x + a_{22}\, y = c_2 & \mid -a_{12} \end{cases}$$

$$x = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \qquad y = \frac{c_2 a_{11} - c_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x = \frac{1}{D} (c_1 a_{22} - c_2 a_{12}), \qquad y = \frac{1}{D} (c_2 a_{11} - c_1 a_{21})$$

$$D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$$

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt genau eine Lösung, wenn die Größe D nicht verschwindet.

Determinante 2. Ordnung (2-reihige Determinante) ist die Differenz der Produkte der Diagonalen

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

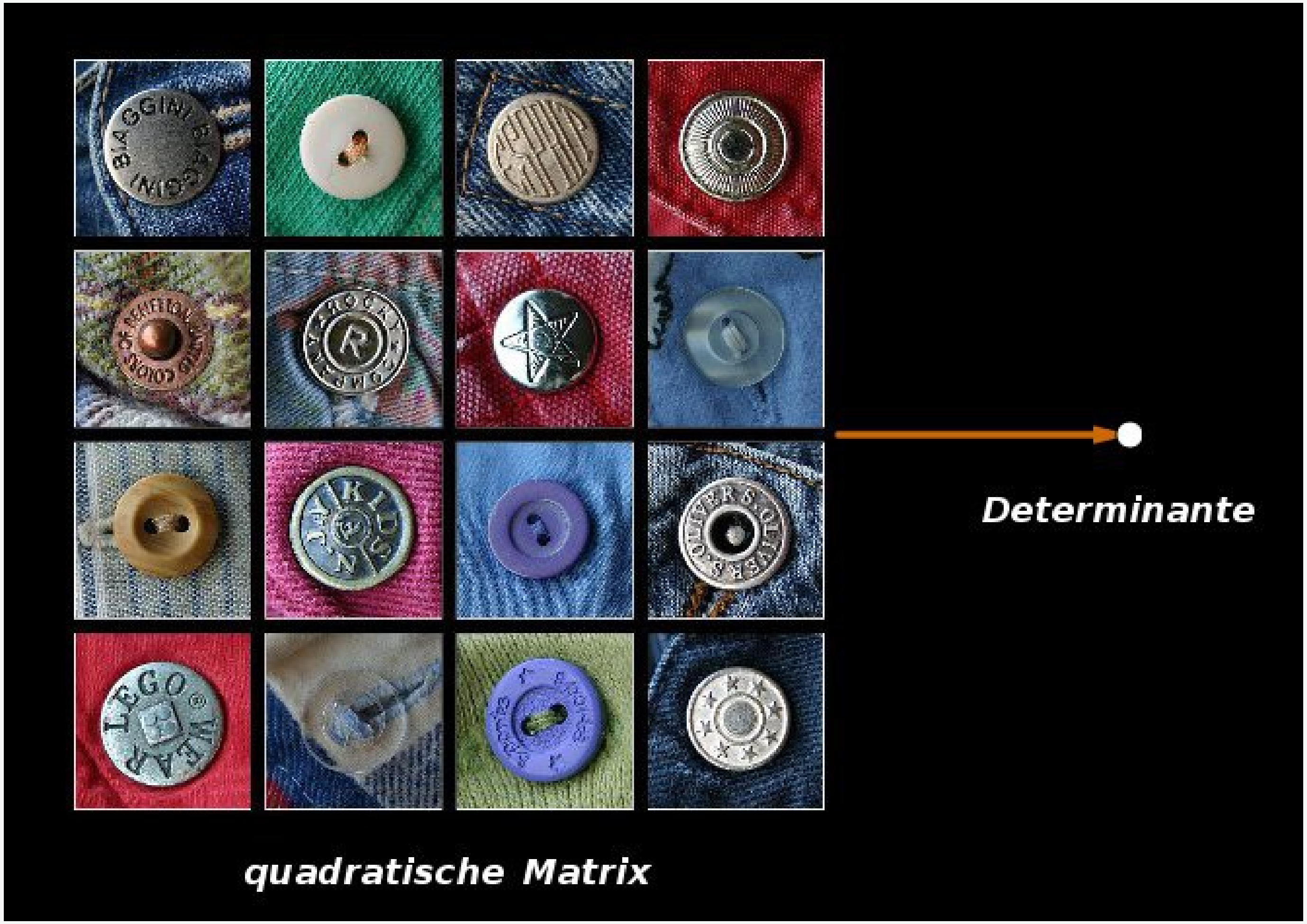

Abb. 1: Zum Begriff der Determinante

Eine Determinante ist eine Zahl, die einer quadratischen Matrix zugeordnet ist.

geordnetes Zahlenschema		reelle Zahl
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$	$\longrightarrow$	$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
runde Klammern		*senkrechte Striche*
symbolische Schreibweise		symbolische Schreibweise
$A, \quad (a_{ik})$		$D, \quad \det A, \quad \lvert A \rvert, \quad \lvert a_{ik} \rvert$

Sind alle Elemente der Matrix reell, so ist auch die Determinante eine reelle Zahl. Matrizen mit komplexen Elementen besitzen komplexe Determinanten.

Eine Determinante ist eine Zahl, die

- einer quadratischen Matrix zugeordnet wird
- auf einige Eigenschaften der entsprechenden Matrix hindeutet
- aus Elementen dieser Matrix berechnet wird
- – reell ist, falls alle Elemente der Matrix reell sind,
  – komplex ist, falls Elemente komplexe Zahlen sind.

Die Determinanten spielen eine wichtige Rolle:

- in der Theorie der Lösbarkeit von Gleichungssystemen;
- für die Berechnung von Matrizeneigenwerten.

- Determinante einer Einheitsmatrix:

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- Determinante einer komplexen Matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -i \end{vmatrix} = i + 8$$

- Determinante einer Matrix:

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7$$

Eigenschaften der Determinanten

Wir beschreiben im Folgenden die wesentliche Eigenschaften der *2*-reihigen Determinanten. Diese Regeln gelten auch für die Determinanten höherer Ordnung.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

1. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden

$$\det A = \det A^T$$

2. Beim Vertauschen der beiden Zeilen (Spalten) ändert sich das Vorzeichen der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\det A$$

3. Ein gemeinsamer Faktor einer Zeile (oder Spalte) darf vor die Determinante gezogen werden

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 6 = 12$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (6 - 2) = 3 \cdot 4 = 12$$

4. Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem jedes Matrixelement mit diesem Skalar multipliziert wird

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Eine Determinante wird mit einem Skalar multipliziert, indem Elemente einer Zeile (oder Spalte) mit diesem Skalar multipliziert werden

$$\lambda \cdot \det A = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

5. Eine Determinante besitzt den Wert Null, wenn:

   - Alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) Null sind
   - Beide Zeilen (oder Spalten) gleich oder proportional zueinander sind

Beispiel: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

6. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (Spalte) ein beliebiges Vielfaches der anderen Zeile elementweise addiert:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} + \lambda\, a_{21}) & (a_{12} + \lambda\, a_{22}) \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

7. $\det\,(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

8. Für eine Dreiecksmatrix A gilt: $\det A = a_{11}\, a_{22}$