Wurzeln aus komplexen Zahlen

Das Wurzelziehen aus komplexen Zahlen ist im Allgemeinen nur dann möglich, wenn die Zahl in Polarform gegeben ist.

Unter der n-ten Wurzel einer komplexen Zahl z versteht man diejenige Zahl W, deren n-te Potenz gleich z ist.

Zwischen den Wurzelbegriff in Bereichen der reellen und der komplexen Zahlen gibt es einen sehr wichtigen Unterschied:

- Die n-te Wurzel einer reellen Zahl ist eindeutig bestimmt. Sie existiert nur für nichtnegative Radikanden und ist selbst nichtnegativ.

- Jede komplexe Zahl W, für die die Gleichung

$$\sqrt[n]{z} = W \,, \qquad W^{\,n} = z$$

gilt, ist eine n-te Wurzel von z. Insgesamt existieren für jede Zahl z genau n Wurzel, d.h., die komplexe Wurzel ist nicht eindeutig.

Definition:

Für komplexe Zahl z

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\, e^{i\varphi} = r\, e^{i(\varphi_0 + 2k\pi)}$$

ist die n-te Wurzel gegeben durch

$$W_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \left(r\, e^{i(\varphi_0 + 2k\pi)}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\; e^{i\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$$

Berechnen Sie folgende Wurzeln, und geben Sie die Ergebnisse in arithmetischer Form an:

Aufgabe 1: $a)\ \sqrt{1}\,, \quad b)\ \sqrt[3]{1}\,, \quad c)\ \sqrt[4]{1}\,, \quad d)\ \sqrt[6]{1}$

Aufgabe 2: $a)\ \sqrt[4]{16}\,, \quad b)\ \sqrt[6]{16}$

Wurzelziehen: Lösung 1

$\sqrt{1} \quad : 1 = 1 + i\,0\,, \quad x = 1, \quad y = 0$

$$r = |\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 + 2\,k\,\pi = 0 + 2\,k\,\pi = 2\,k\,\pi$$

$$1 = e^{\,i\;2\,k\,\pi}$$

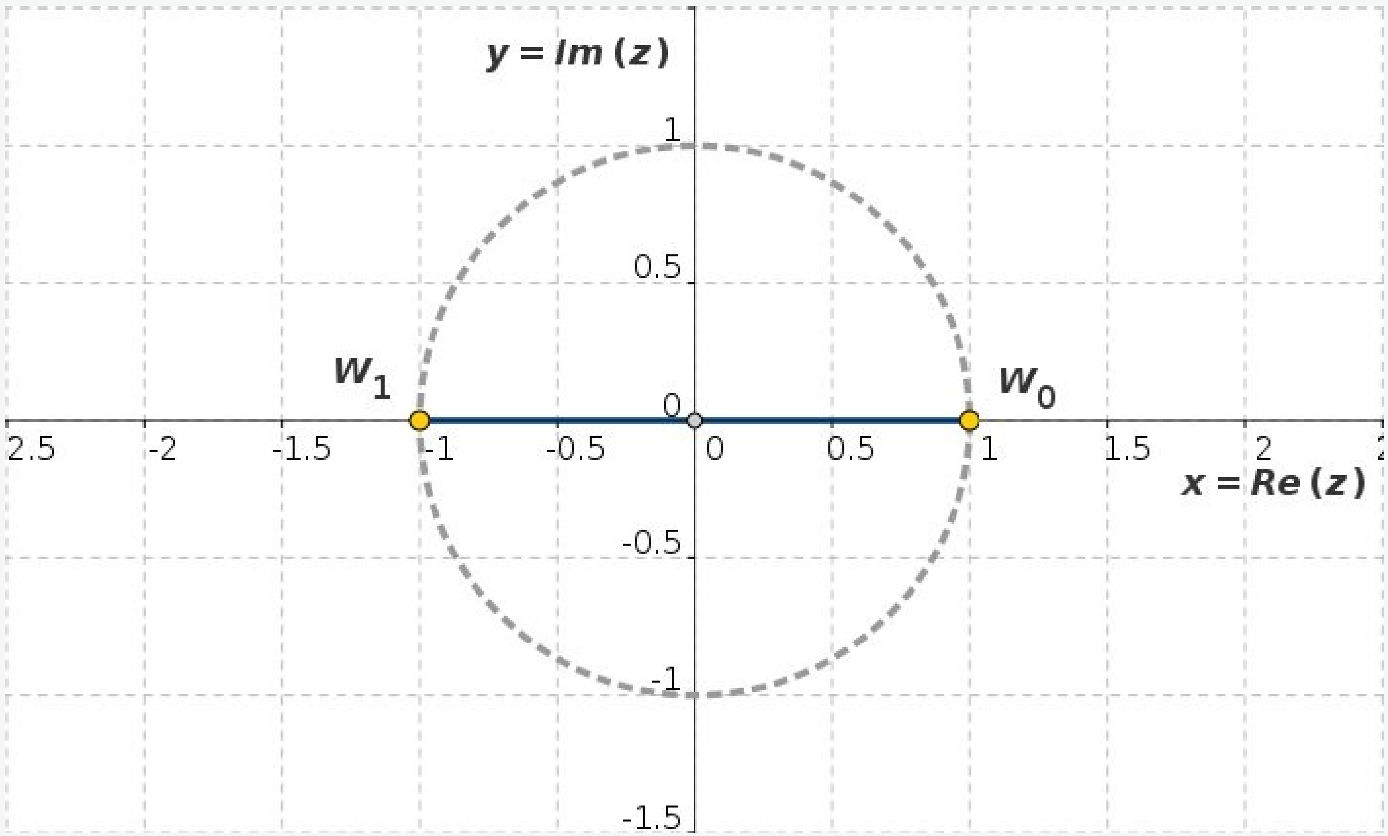


Abb. L-1a: Graphische Darstellung der 2. Wurzeln aus 1, die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = 1$ sind reell

$$\sqrt{1} = 1^{\frac{1}{2}} = \left(e^{i\ 2k\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\ k\pi} \qquad (k = 0,\ 1)$$

$$k = 0: \qquad W_0 = e^{i\cdot 0\cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \qquad W_1 = e^{i\cdot 1\cdot \pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}} = \left(e^{i\, 2k\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\,\frac{2k}{3}\pi} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2)$$

$$n = 3, \qquad n - 1 = 2$$

$$k = 0: \quad W_0 = e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \quad W_1 = e^{i\,\frac{2}{3}\pi} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

$$k = 2: \quad W_2 = e^{i\,\frac{4}{3}\pi} = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

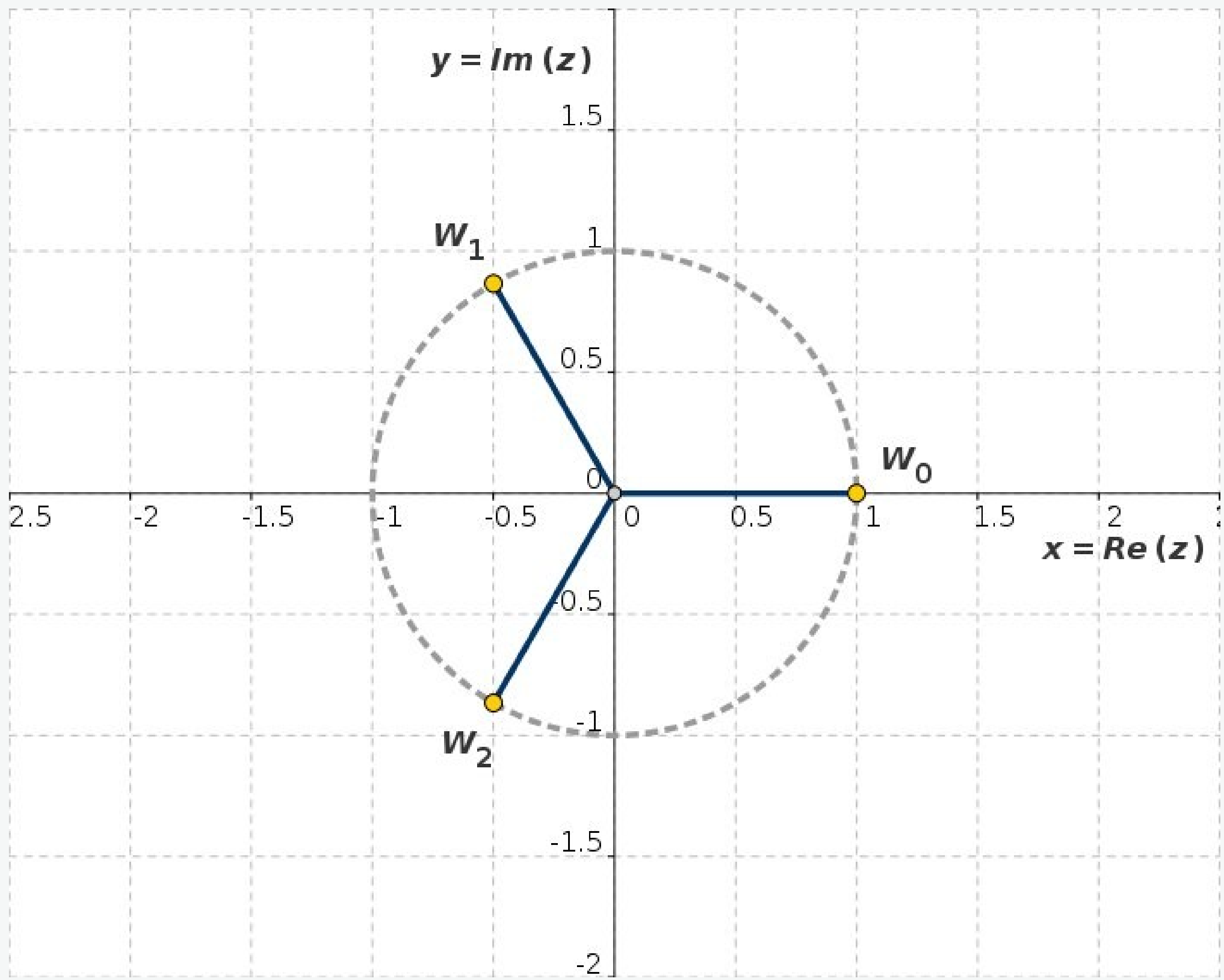
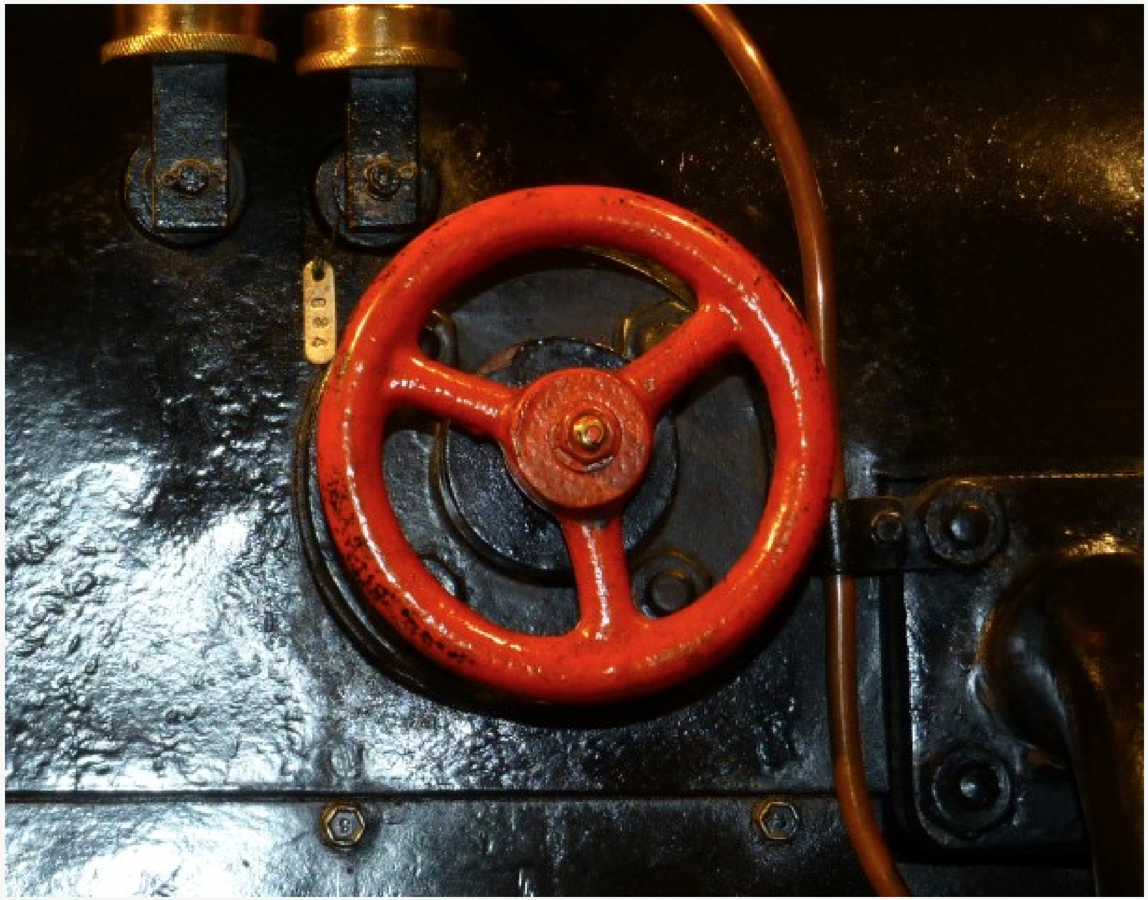


Abb. L-1b: Graphische Darstellung der 3. Wurzeln aus 1, die erste Lösung der Gleichung $z^3 = 1$ ist reell, die zwei anderen konjugiert komplex zueinander

Wurzelziehen: Lösung 1b



$$\sqrt[4]{1} = 1^{\frac{1}{4}} = e^{i \frac{k}{2} \pi} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

$$k = 0: \qquad W_0 = e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \qquad W_1 = e^{i \frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$$

$$k = 2: \qquad W_2 = e^{i \pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k = 3: \qquad W_3 = e^{i \frac{3}{2} \pi} = \cos\left(\frac{3}{2} \pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{2} \pi\right) = 0 - i = -i$$

Reelle Lösungen: $W_0,\ W_2$

Imaginäre Lösungen: $W_1,\ W_3$

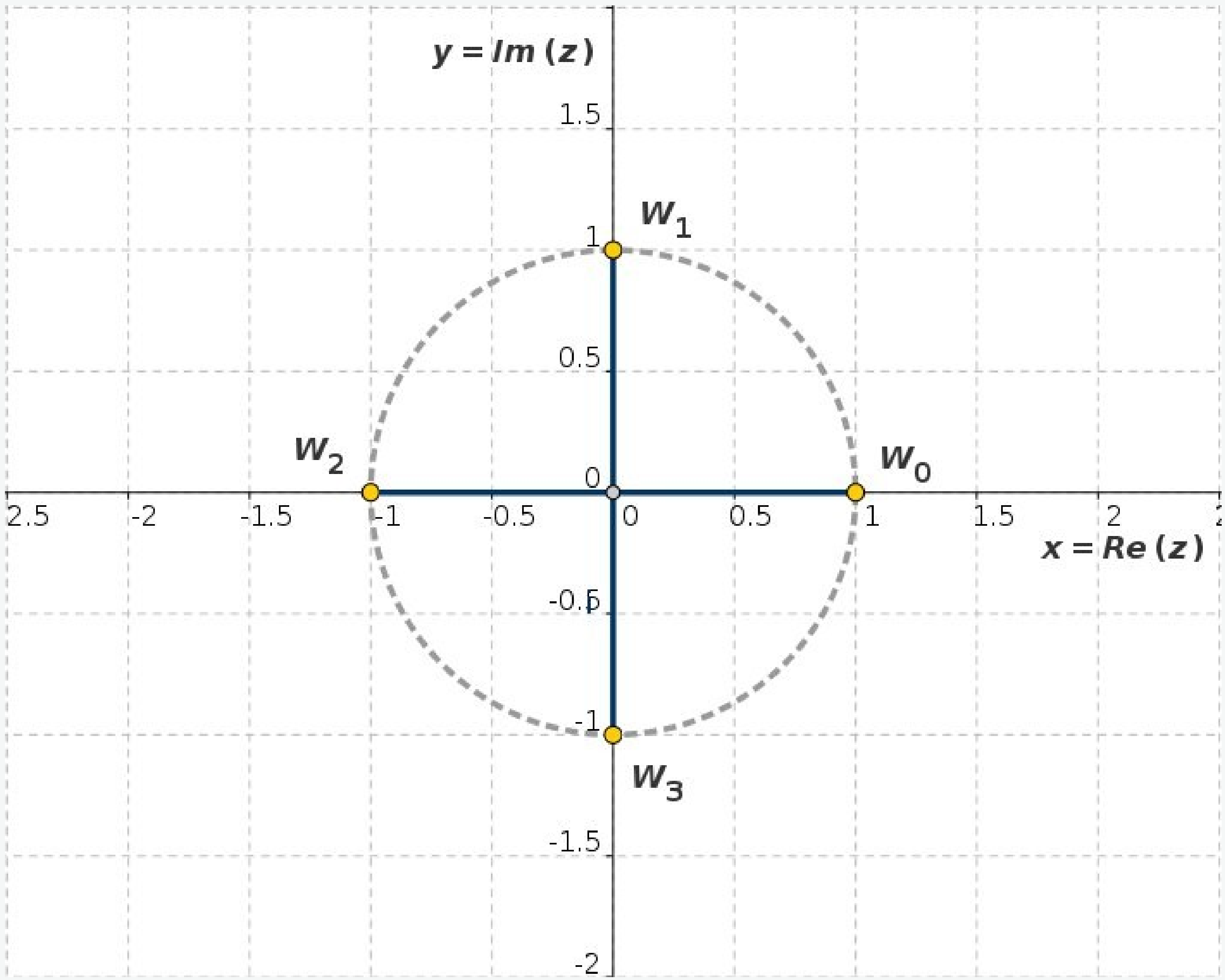
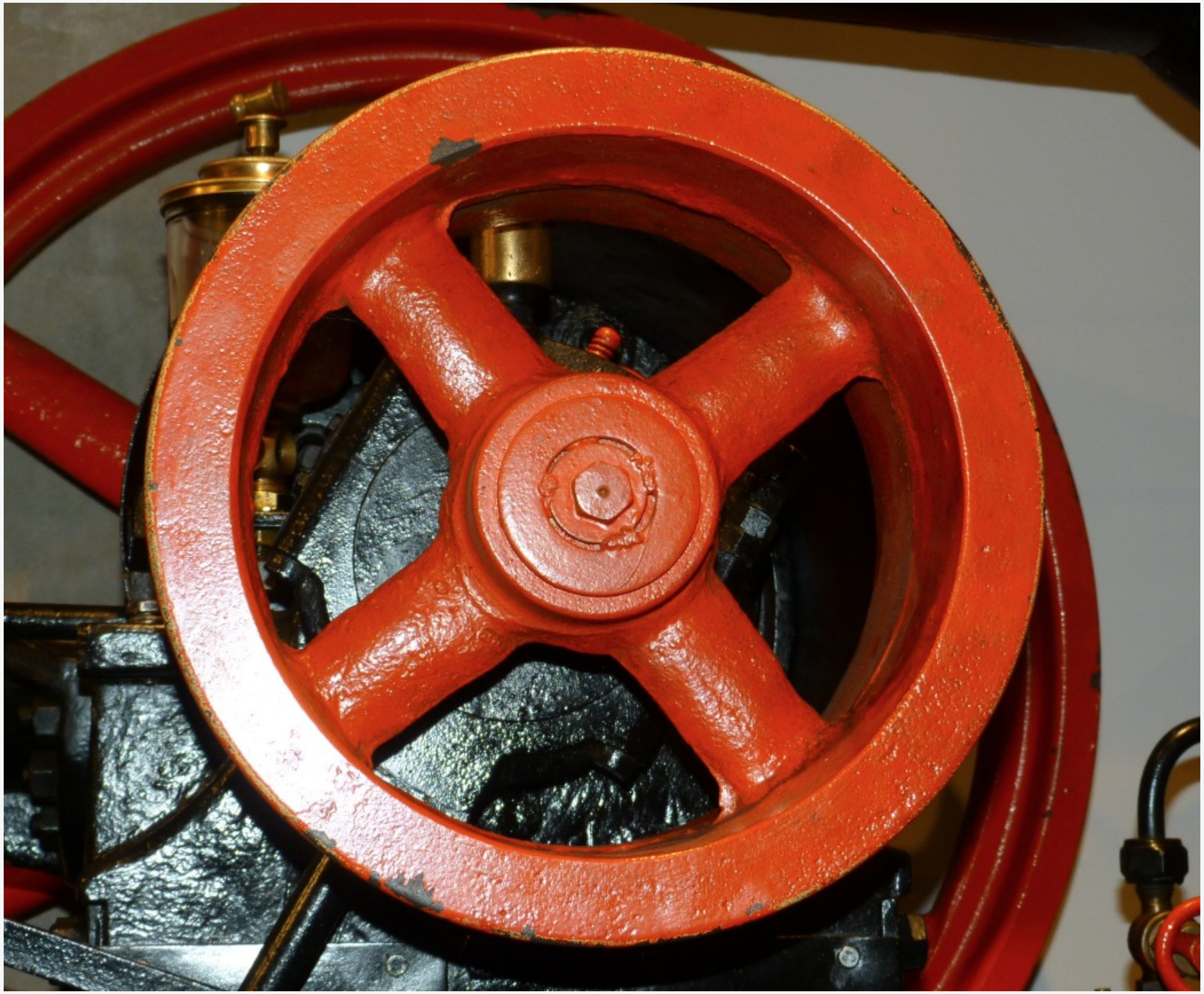


Abb. L-1c: Graphische Darstellung der 4. Wurzeln aus 1

Wurzelziehen: *Lösung 1c*



$$\sqrt[6]{1} = 1^{\frac{1}{6}} = e^{i \frac{k}{3} \pi} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

$$k = 0: \quad W_0 = e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \quad W_1 = e^{i \frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \frac{1 + \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$k = 2: \quad W_2 = e^{i \frac{2}{3} \pi} = \cos\left(\frac{2}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3} \pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$k = 3: \quad W_3 = e^{i \pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k = 4: \quad W_4 = e^{i \frac{4}{3} \pi} = \cos\left(\frac{4}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3} \pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = -\frac{(1 + \sqrt{3}\, i)}{2}$$

$$k = 5: \quad W_5 = e^{i \frac{5}{3} \pi} = \cos\left(\frac{5}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3} \pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \frac{1 - \sqrt{3}\, i}{2}$$

Reelle Lösungen: $W_0,\ W_3$

Konjugiert komplexe Lösungen: $W_2,\ W_4; \quad W_1,\ W_5$

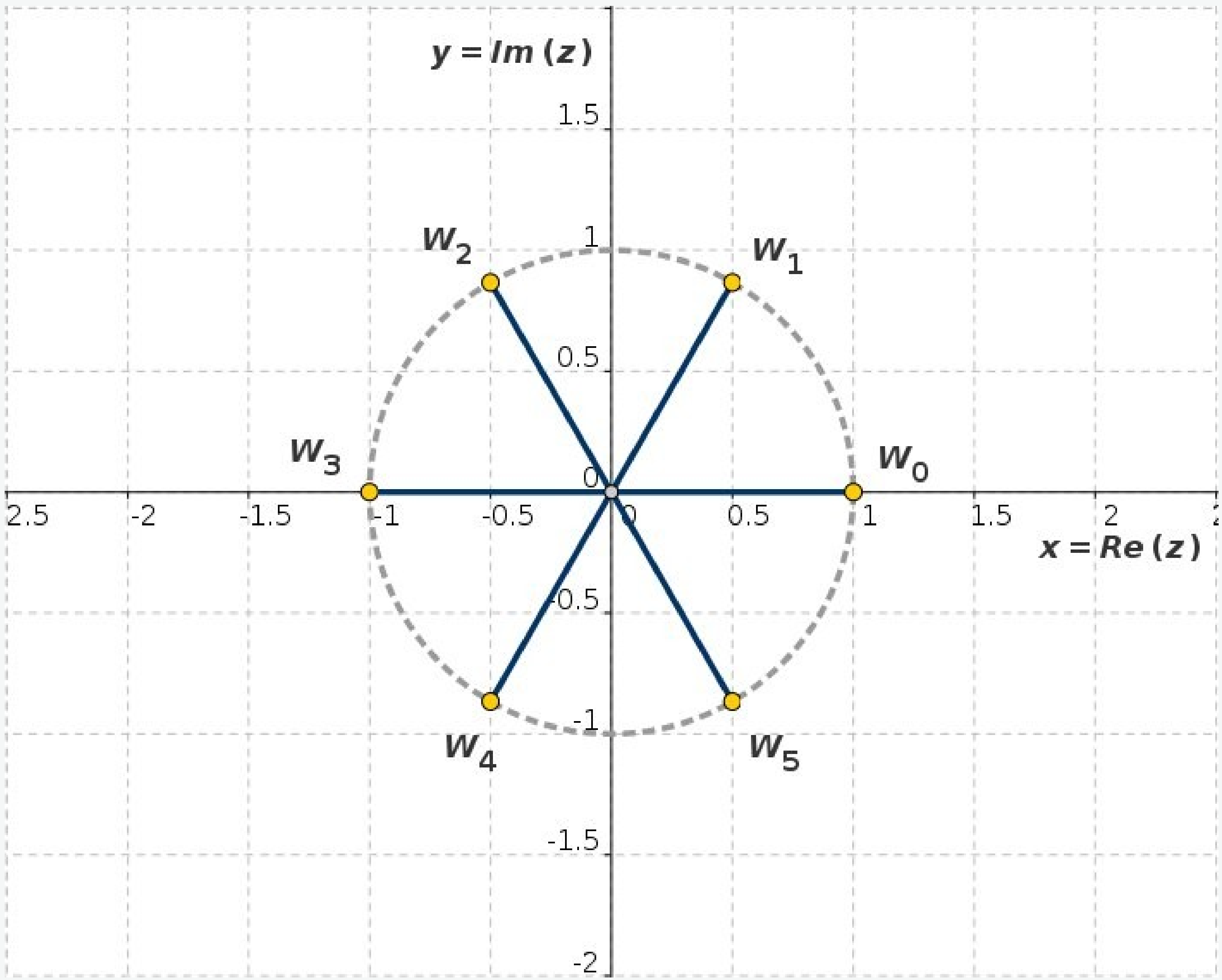


Abb. L-1d-1: Graphische Darstellung der 6. Wurzeln aus 1

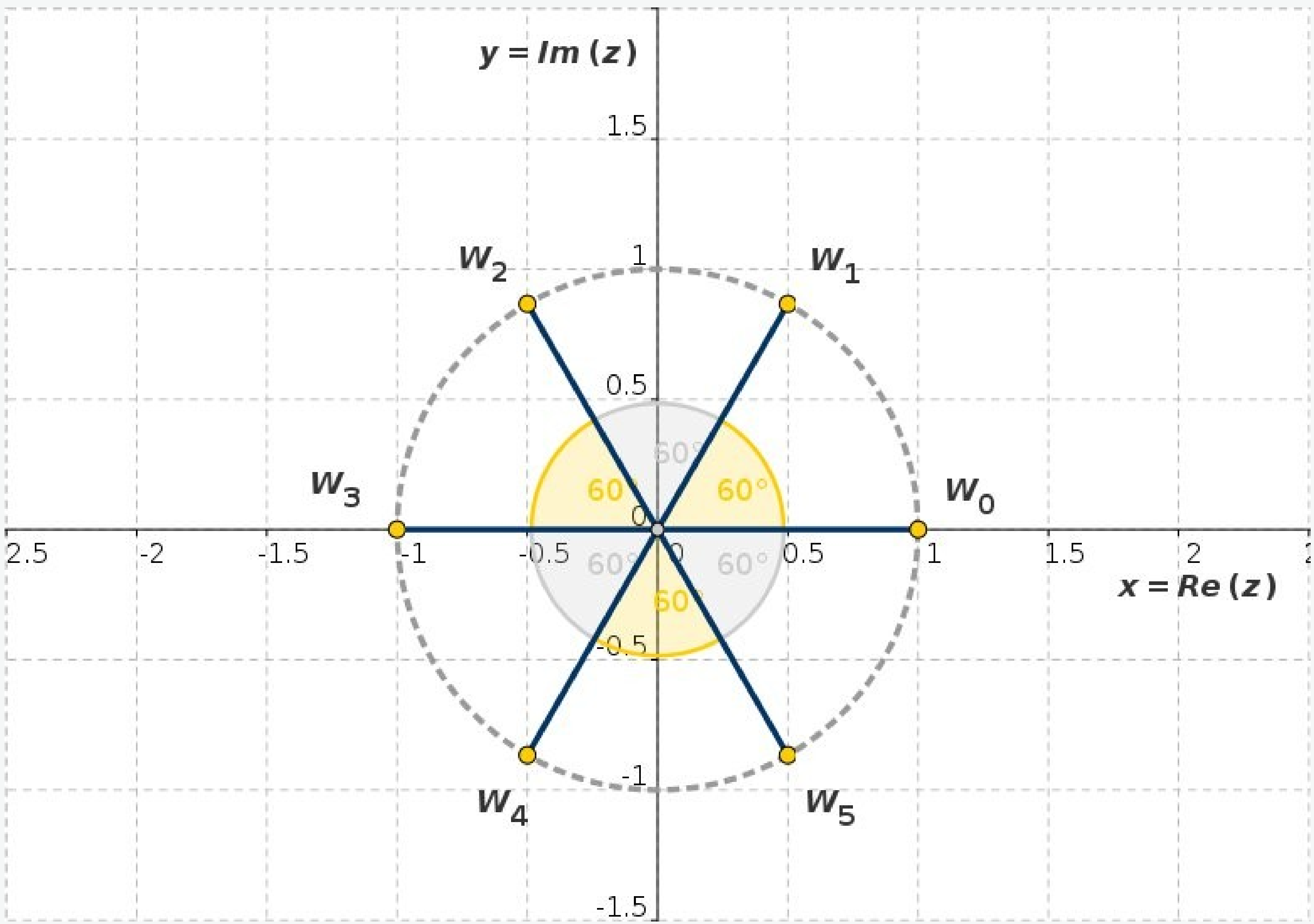


Abb. L-1d-2: Graphische Darstellung der 6. Wurzeln aus 1

$$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2\,e^{i\,\frac{k}{2}\,\pi} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

$$k = 0: \qquad W_0 = 2\,e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 2$$

$$k = 1: \qquad W_1 = e^{i\,\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\,(0 + i) = 2\,i$$

$$k = 2: \qquad W_2 = 2\,e^{i\,\pi} = 2\,(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$k = 3: \qquad W_3 = 2\,e^{i\,\frac{3}{2}\,\pi} = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = 2\,(0 - i) = -2\,i$$

Reelle Lösungen: $W_0,\ W_2$

Imaginäre Lösungen: $W_1,\ W_3$

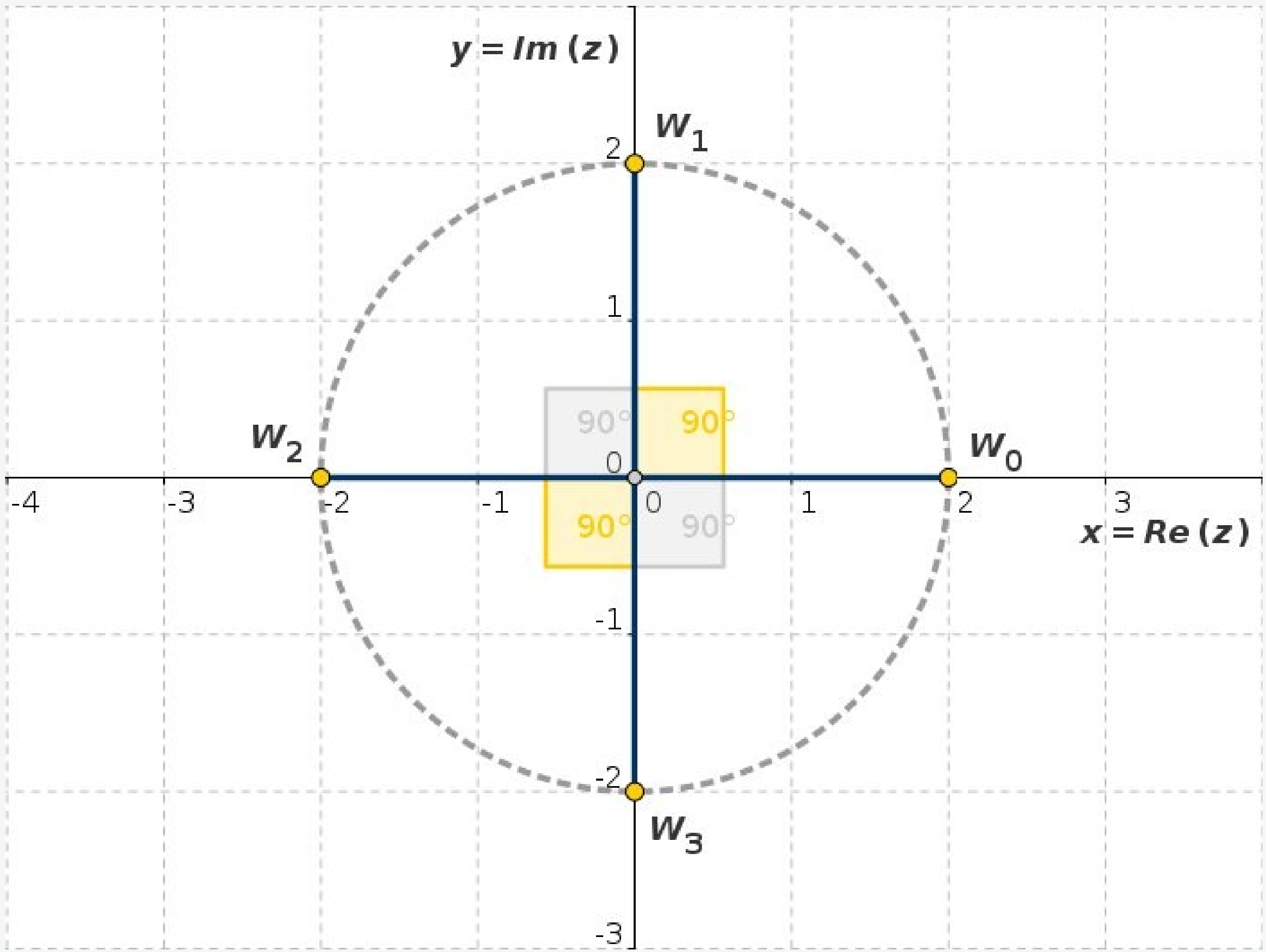


Abb. L-2a: Graphische Darstellung der 4. Wurzeln aus 16

$$\sqrt[6]{16} = 16^{\frac{1}{6}} \cdot e^{i \frac{k}{3} \pi} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$k = 0: \quad W_0 = \sqrt[6]{16}$$

$$k = 1: \quad W_1 = \sqrt[6]{16} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$k = 2: \quad W_2 = \sqrt[6]{16} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$k = 3: \quad W_3 = -\sqrt[6]{16}$$

$$k = 4: \quad W_4 = -\sqrt[6]{16} \cdot \frac{(1 + \sqrt{3}\, i)}{2}$$

$$k = 5: \quad W_5 = \sqrt[6]{16} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}\, i}{2}$$

Reelle Lösungen: $W_0, \ W_3$

Konjugiert komplexe Lösungen: $W_2, \ W_4; \quad W_1, \ W_5$

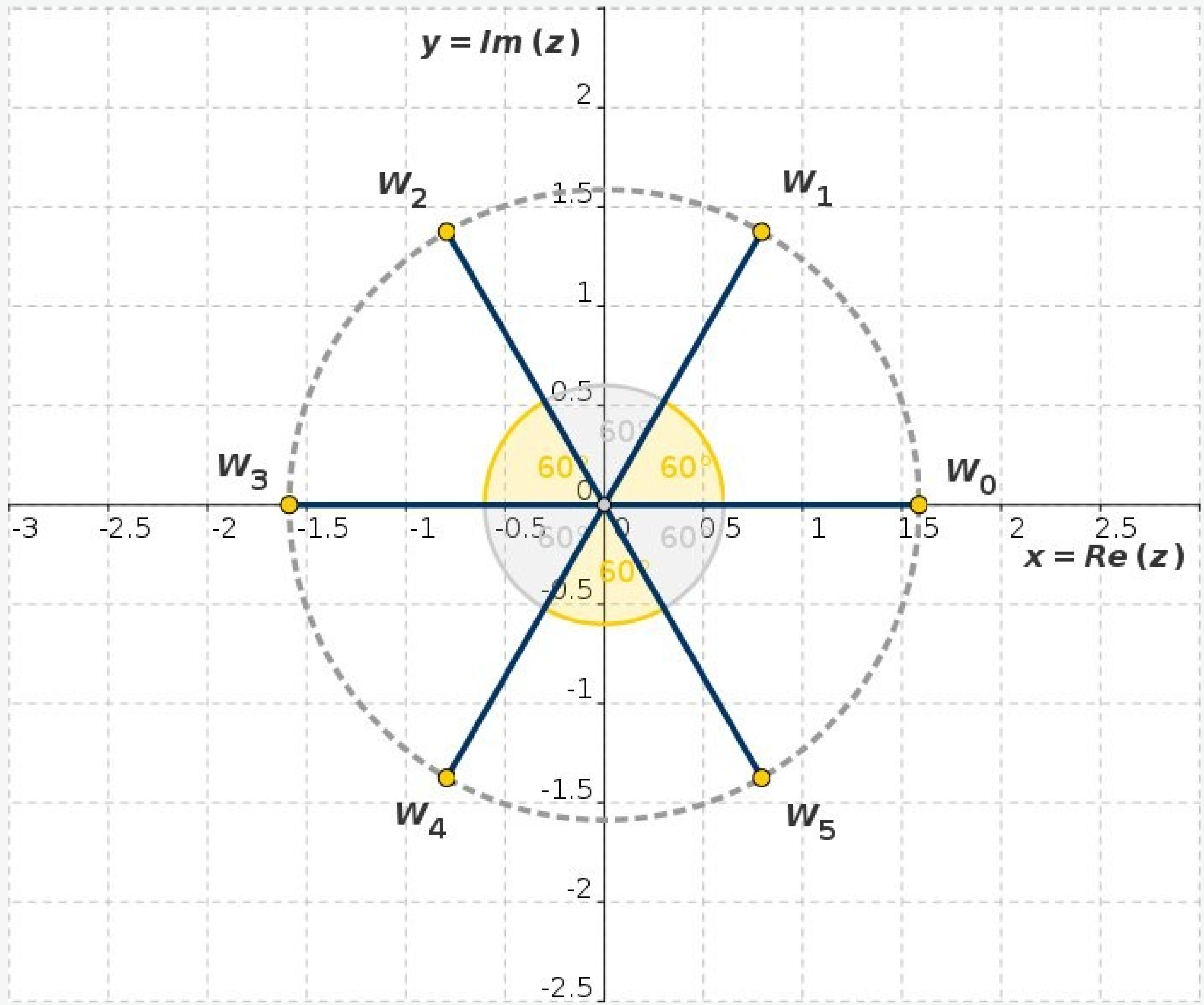


Abb. L-2b: Graphische Darstellung der 6. Wurzeln aus 16