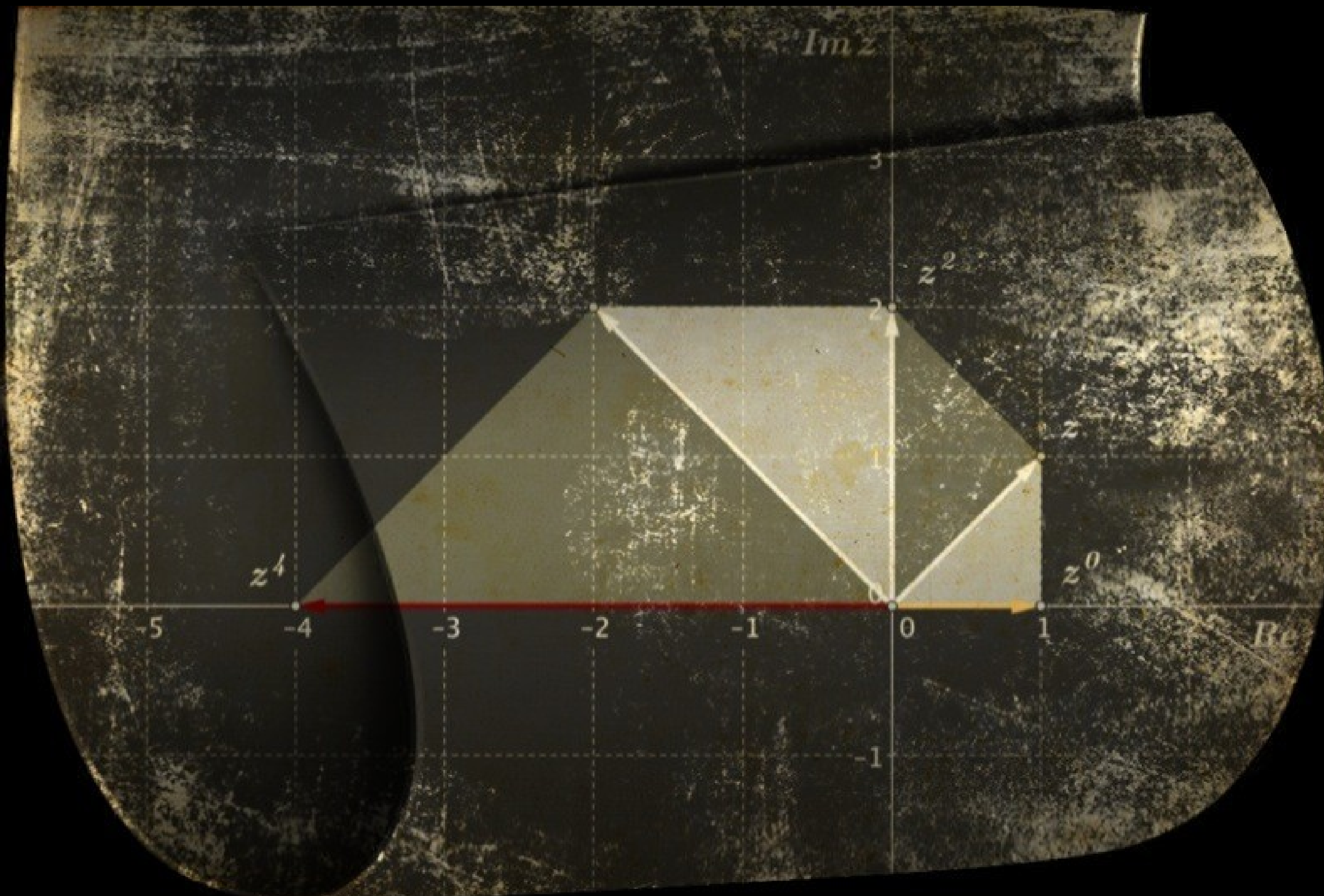
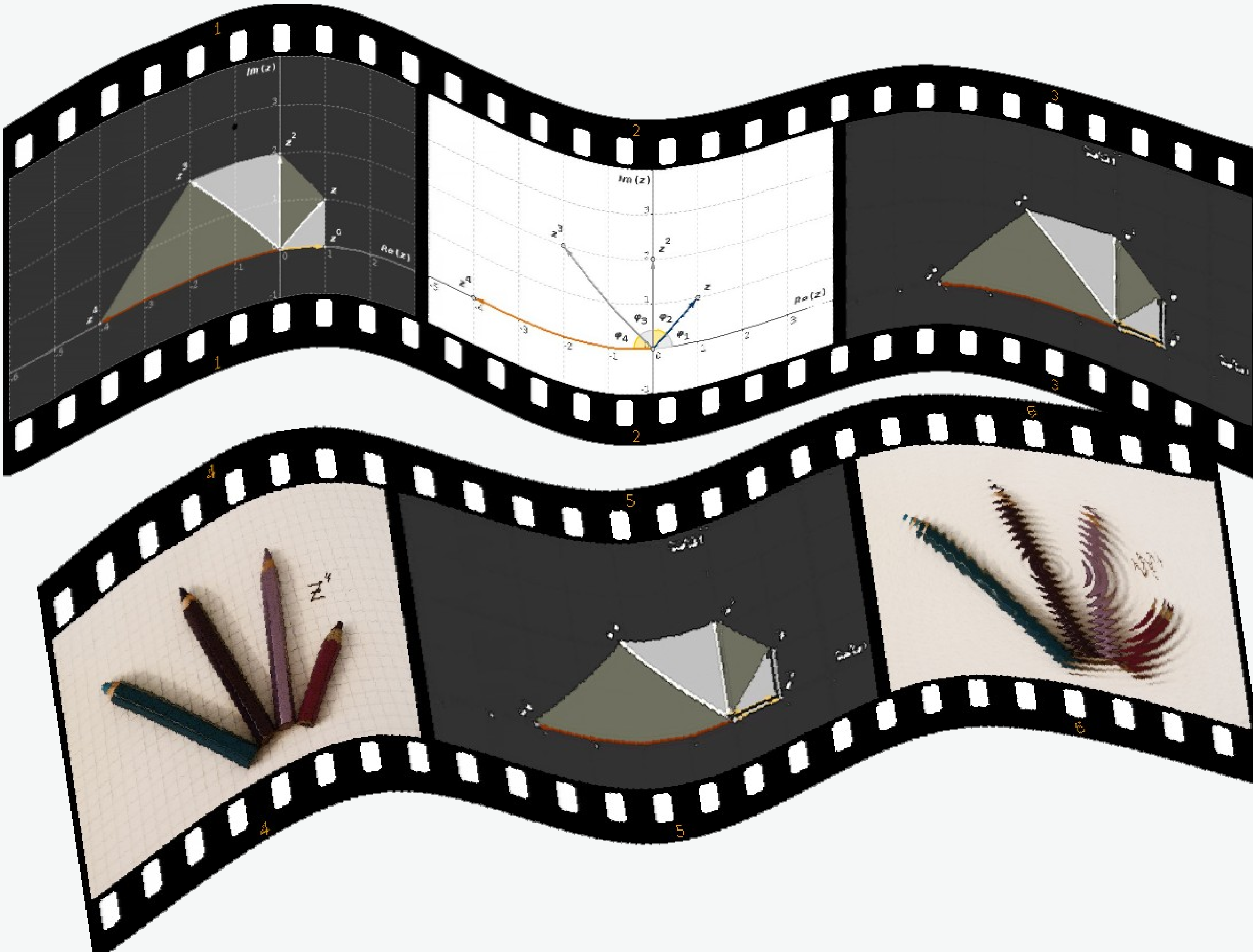
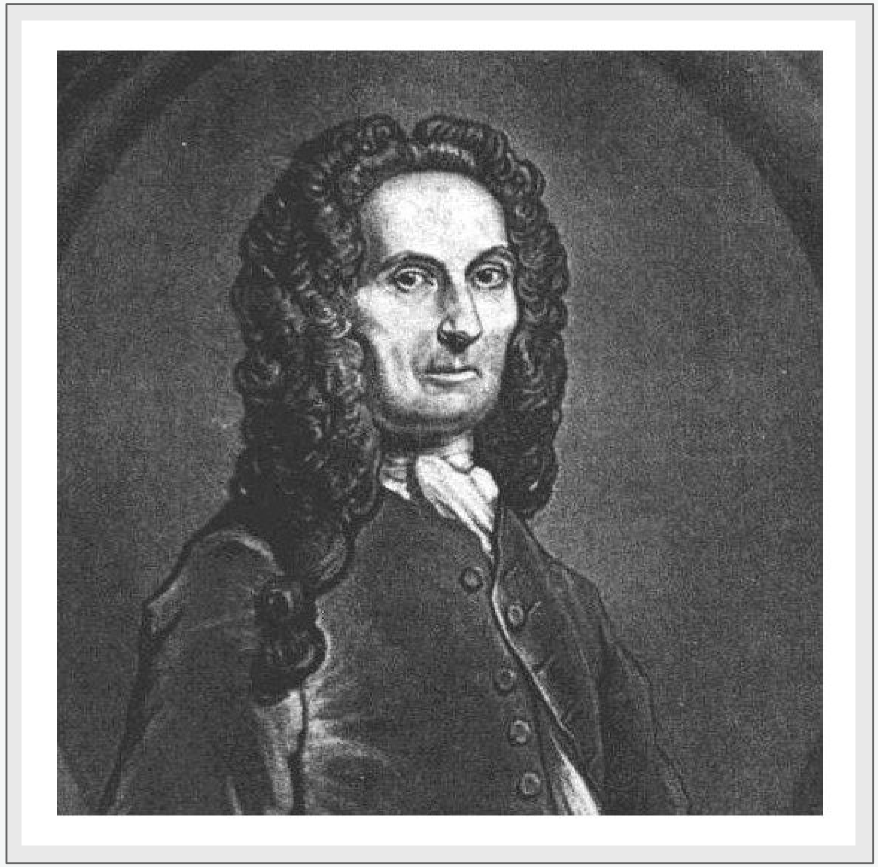


Potenzen einer komplexen Zahl



Im (z)
Re (z)
z
z^2
z^3
z^4
z^0
φ_1
φ_2
φ_3
φ_4
Z^4



Abraham de Moivre (1667 – 1754), französischer Mathematiker

Abraham de Moivre, der als Emigrant in London lebte, gilt als einer der Pioniere der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Speziell seine Untersuchungen zu Sterblichkeits- und Rentenproblemen bildeten eine Grundlage für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie durch Laplace.

Satz von Moivre

Ist z eine komplexe Zahl

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \left(\cos\varphi + i \sin\varphi \right)$$

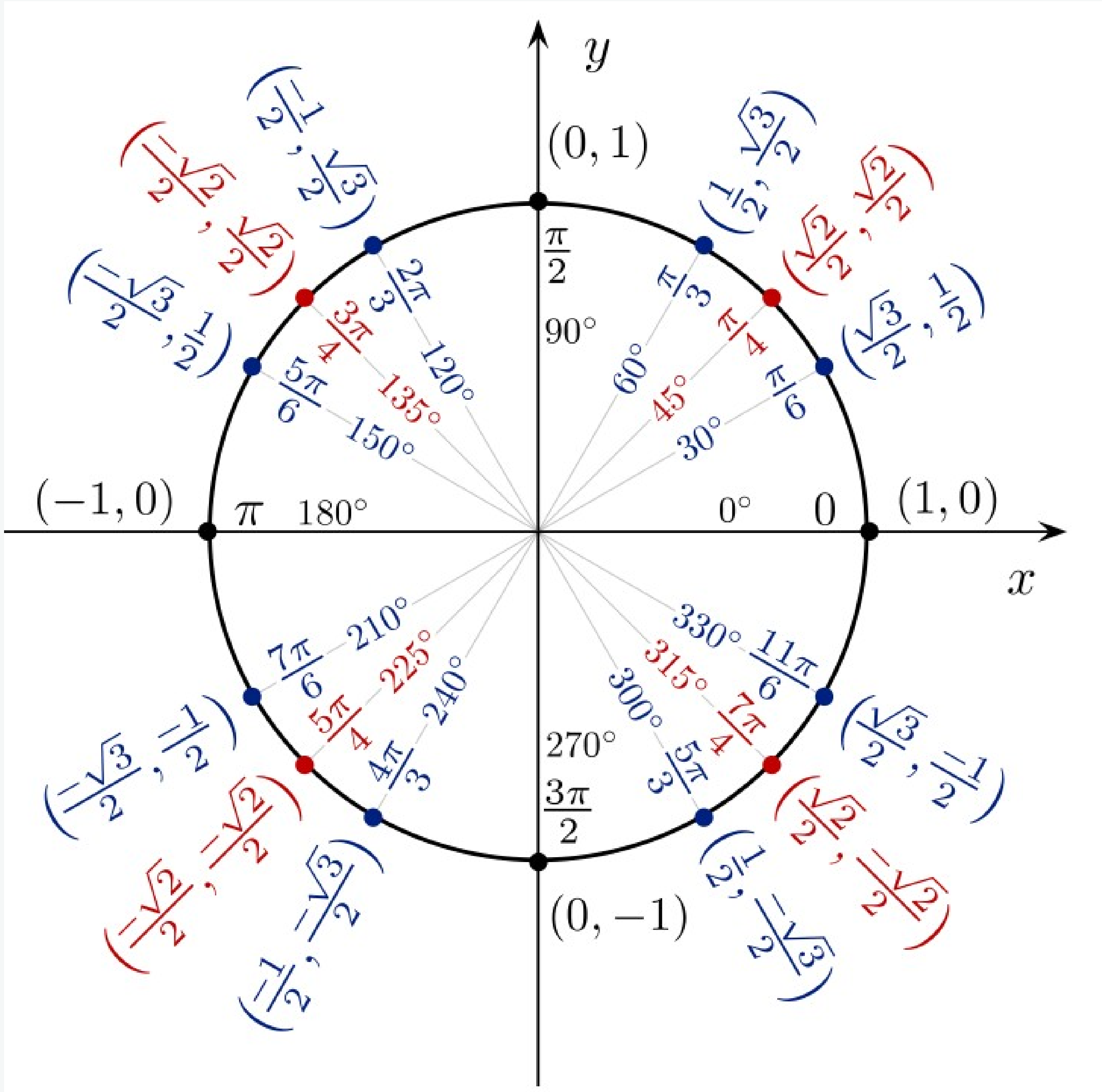
und n eine natürliche Zahl, dann gilt:

$$\boxed{z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{in\varphi}}$$

oder in trigonometrischer Form:

$$\boxed{z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \right)}$$

Die Potenz einer komplexen Zahl ergibt sich besonders einfach in der Polarform.



Punkte mit Kosinus- und Sinuswerten auf dem Einheitskreis (Wikipedia)

Erheben Sie die komplexe Zahl z in die n-te Potenz

Aufgabe 1: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \quad n = 3$

Aufgabe 2: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad n = 4$

Aufgabe 3: $z = 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}, \quad n = 5$

Aufgabe 4: $z = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right), \quad n = 5$

Aufgabe 5: $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad n = 6$

Aufgabe 6: $z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\right)$

$n = 12$

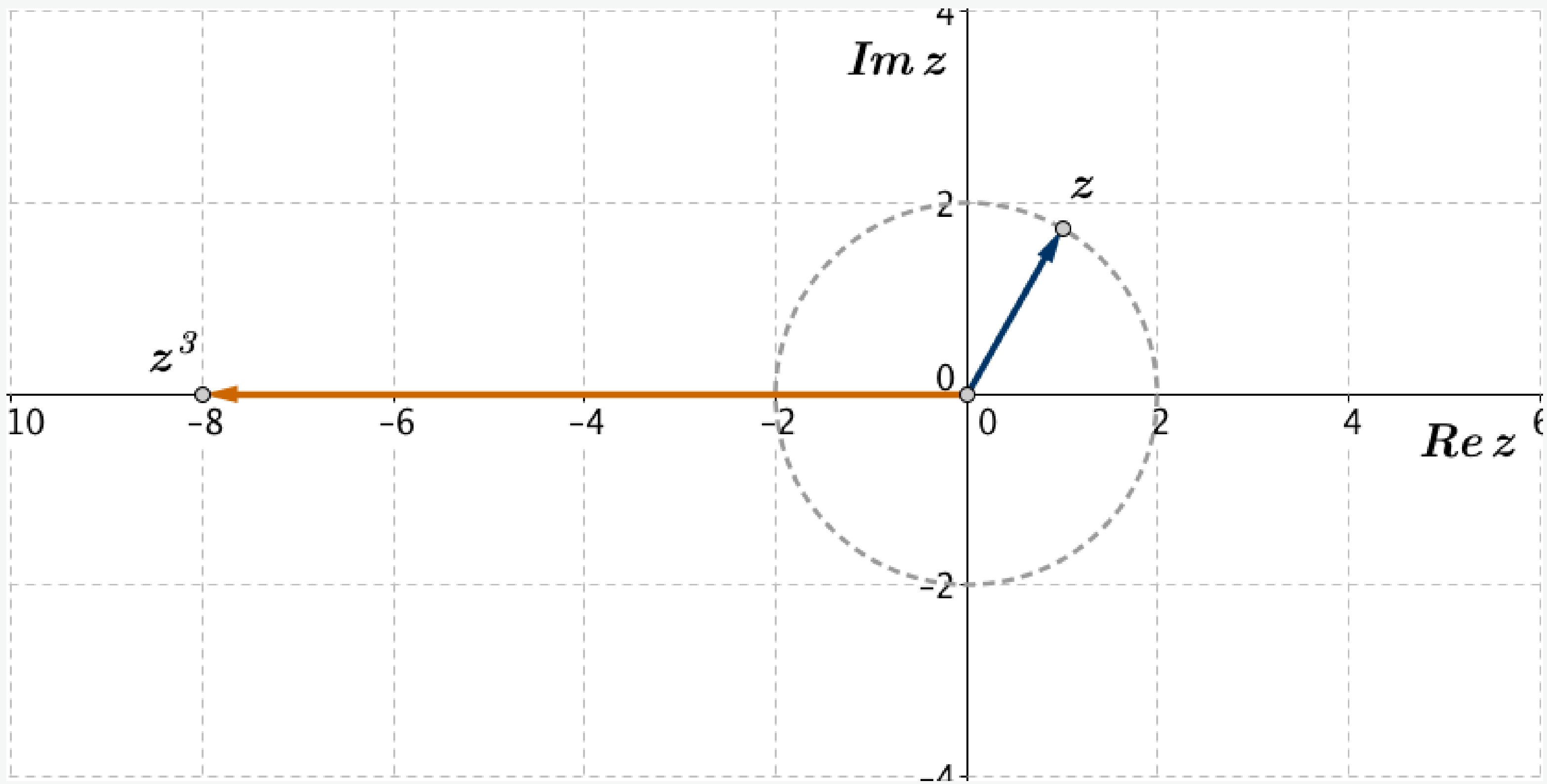


Abb. L1-a: Darstellung der komplexen Zahl z und der dritten Potenz von z

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}\,, \qquad n = 3$$

$$z^3 = \left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 2^3\,e^{i\frac{\pi}{3}\,3} = 2^3\,e^{i\pi} =$$

$$= 8\,(\cos\pi + i\sin\pi) = 8\,(-1 + i\,0) = -8$$

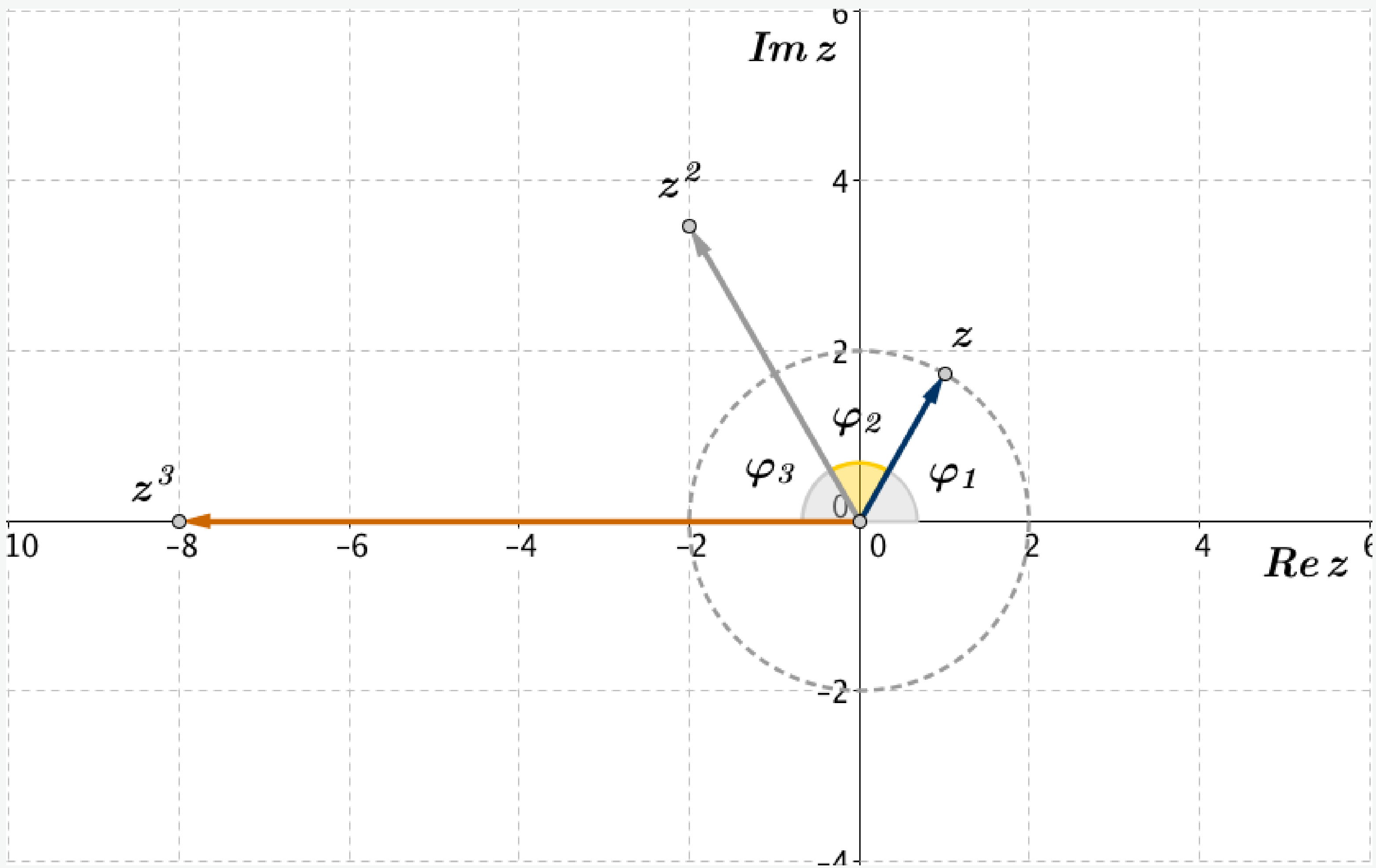


Abb. L1-b: Darstellung der komplexen Zahl z und der zweiten und dritten Potenz von z

$$|\, z \,| = 2, \qquad |\, z^2 \,| = 4, \qquad |\, z^3 \,| = 8$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{3}$$

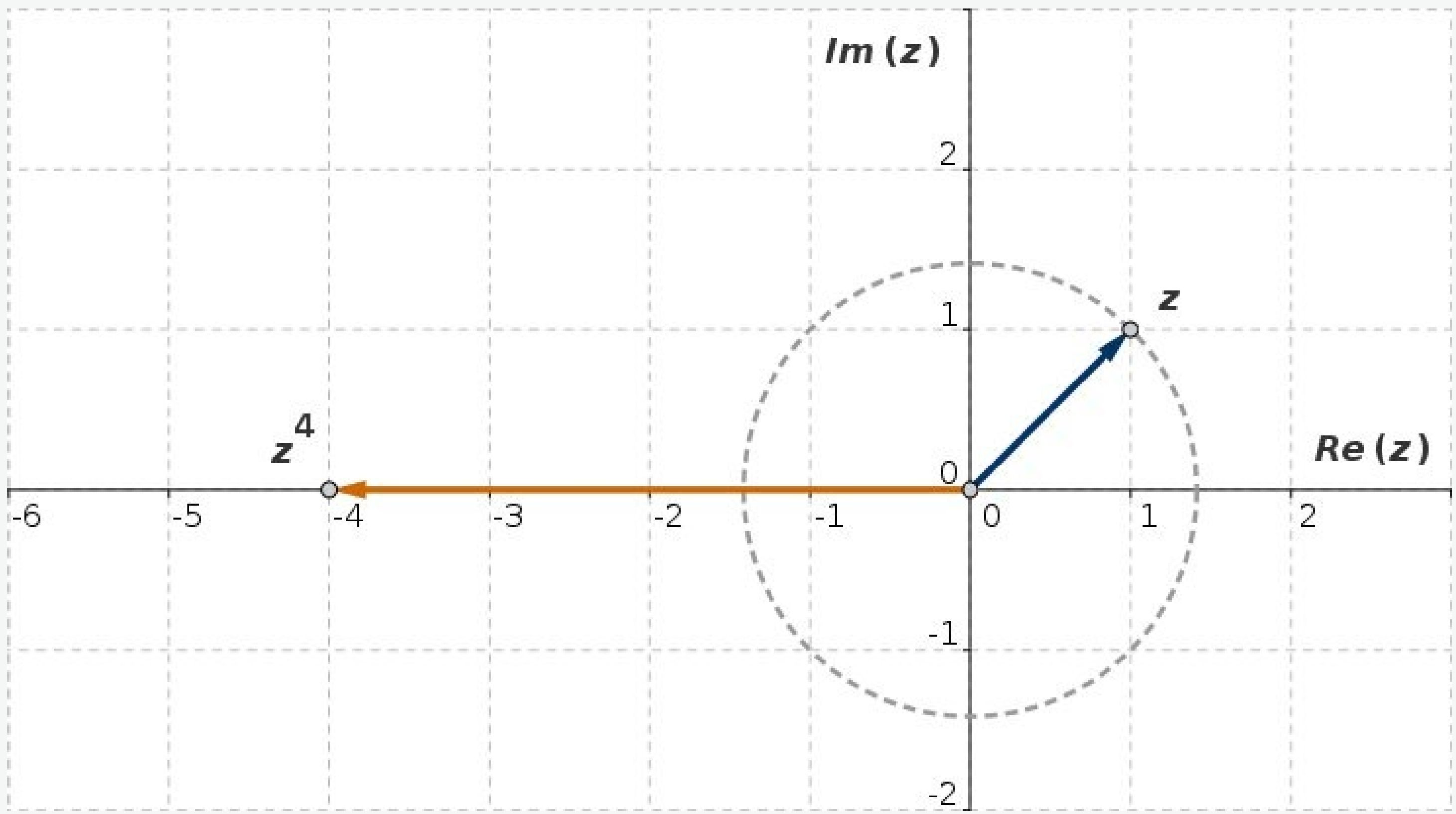


Abb. L2-a: Darstellung der komplexen Zahl z und der vierten Potenz von z

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\frac{1}{2}}\,e^{i\,\frac{\pi}{4}} = 1 + i\,, \qquad n = 4$$

$$z^4 = \left(2^{\frac{1}{2}}\,e^{i\,\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 2^2\;e^{i\,\pi} = 4\;(\cos\pi + i\,\sin\pi) =$$

$$= 4\;(-1 + i\,0) = -4$$

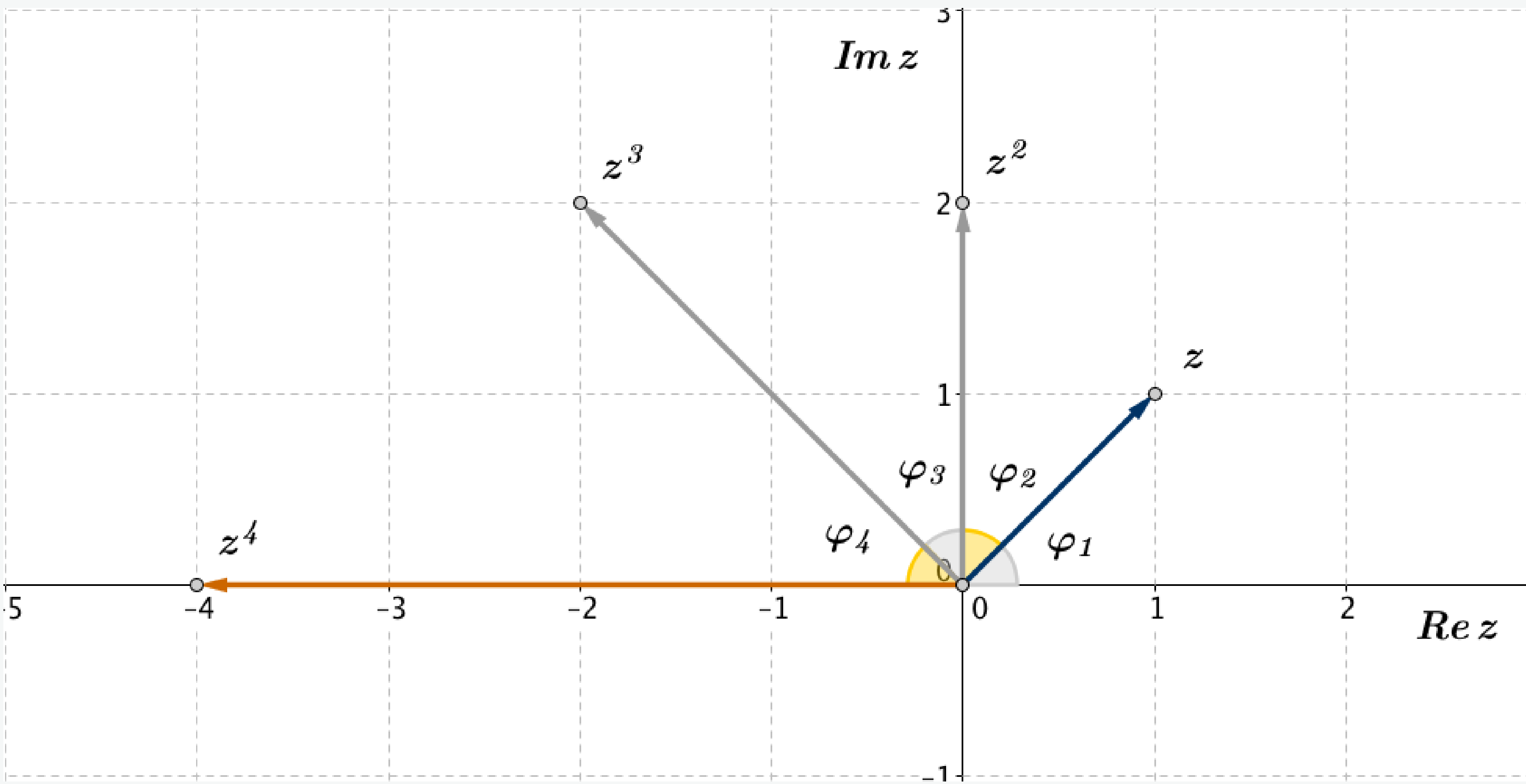


Abb. L2-b: Darstellung der komplexen Zahl z und der zweiten, dritten und vierten Potenz von z

$$|z| = \sqrt{2}, \qquad |z^2| = 2, \qquad |z^3| = 2\sqrt{2}, \qquad |z^4| = 4$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{\pi}{4}$$

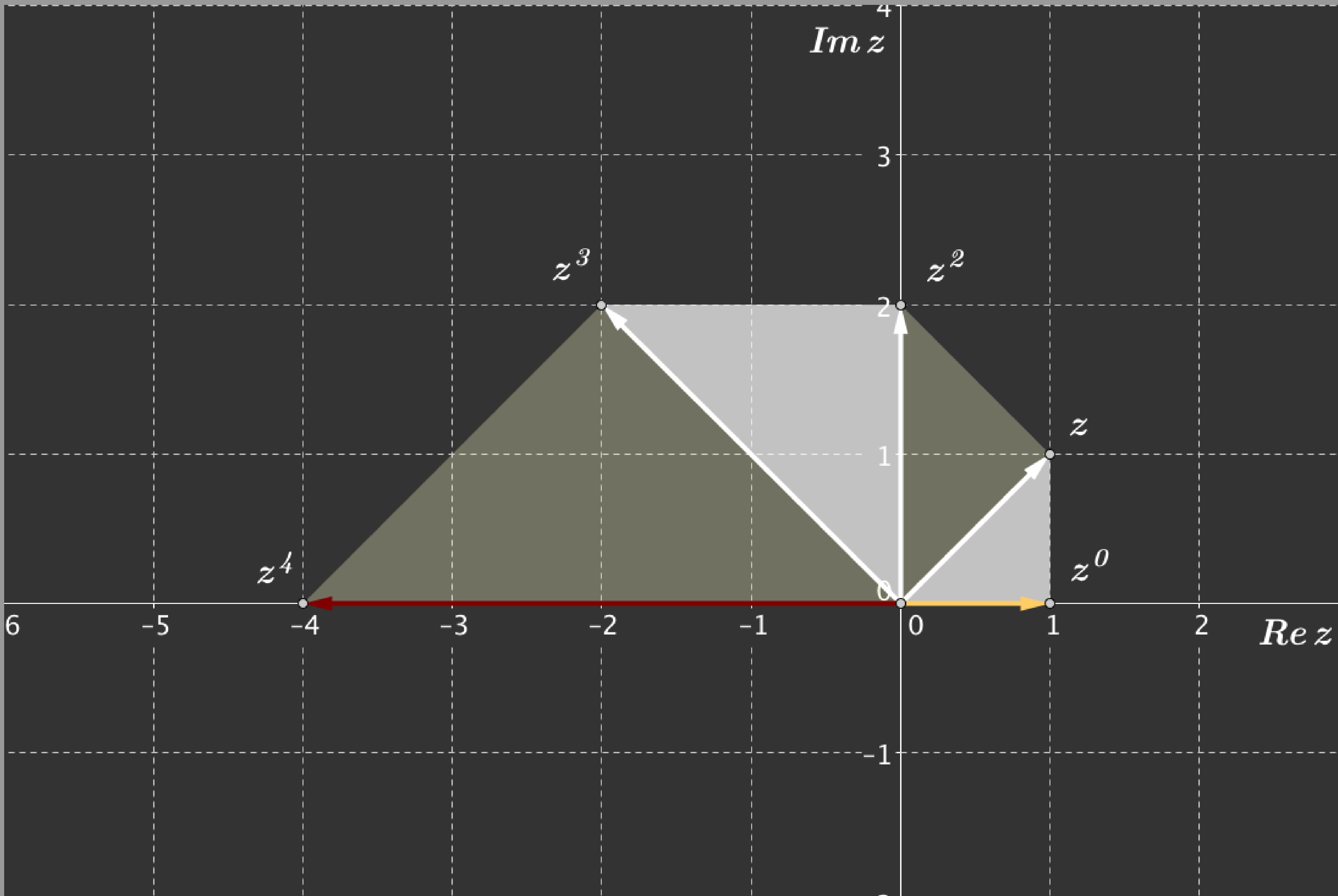


Abb. L2-c: Darstellung der komplexen Zahl z und der ersten drei Potenzen von z

Potenzen: Lösung 3

$$z = 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,(1 + i)\,, \qquad n = 5$$

Wir bestimmen die Polarform der komplexen Zahl

$$r = |\,z\,| = \sqrt{4 \cdot 2 + 4 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2} = 4\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^5 = 4^5\,e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 5} = 1024 \cdot e^{i\frac{5}{4}\pi} = -1024\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= -\frac{1024}{\sqrt{2}}\,(1 + i) = -724.08\,(1 + i)$$

Potenzen: Lösung 4

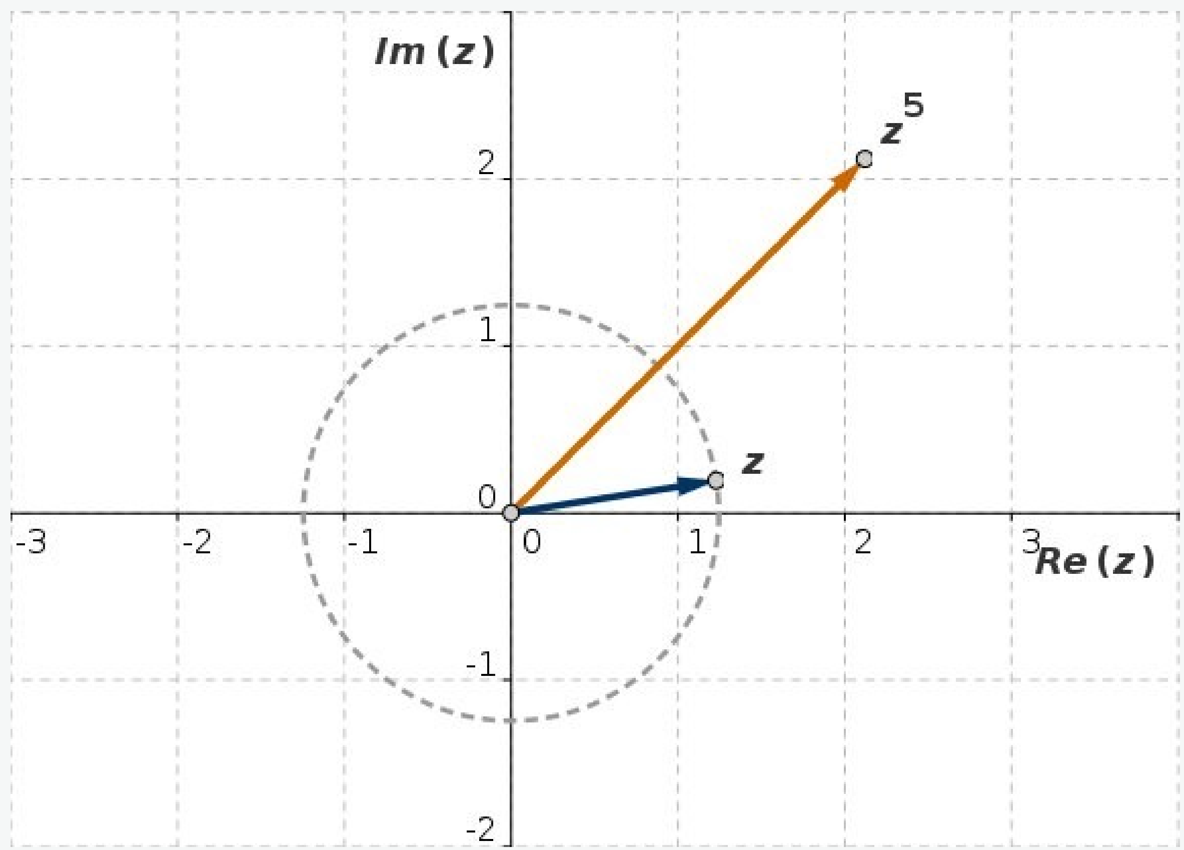


Abb. L4-a: Darstellung der komplexen Zahl z und der fünften Potenz von z

$$z = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\,\sin\frac{\pi}{20}\right) = 3^{\frac{1}{5}}\, e^{i\,\frac{\pi}{20}}, \qquad n = 5$$

$$z^{5} = 3\, e^{i\,\frac{\pi}{20}\,5} = 3\, e^{i\,\frac{\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}\,(1 + i)$$

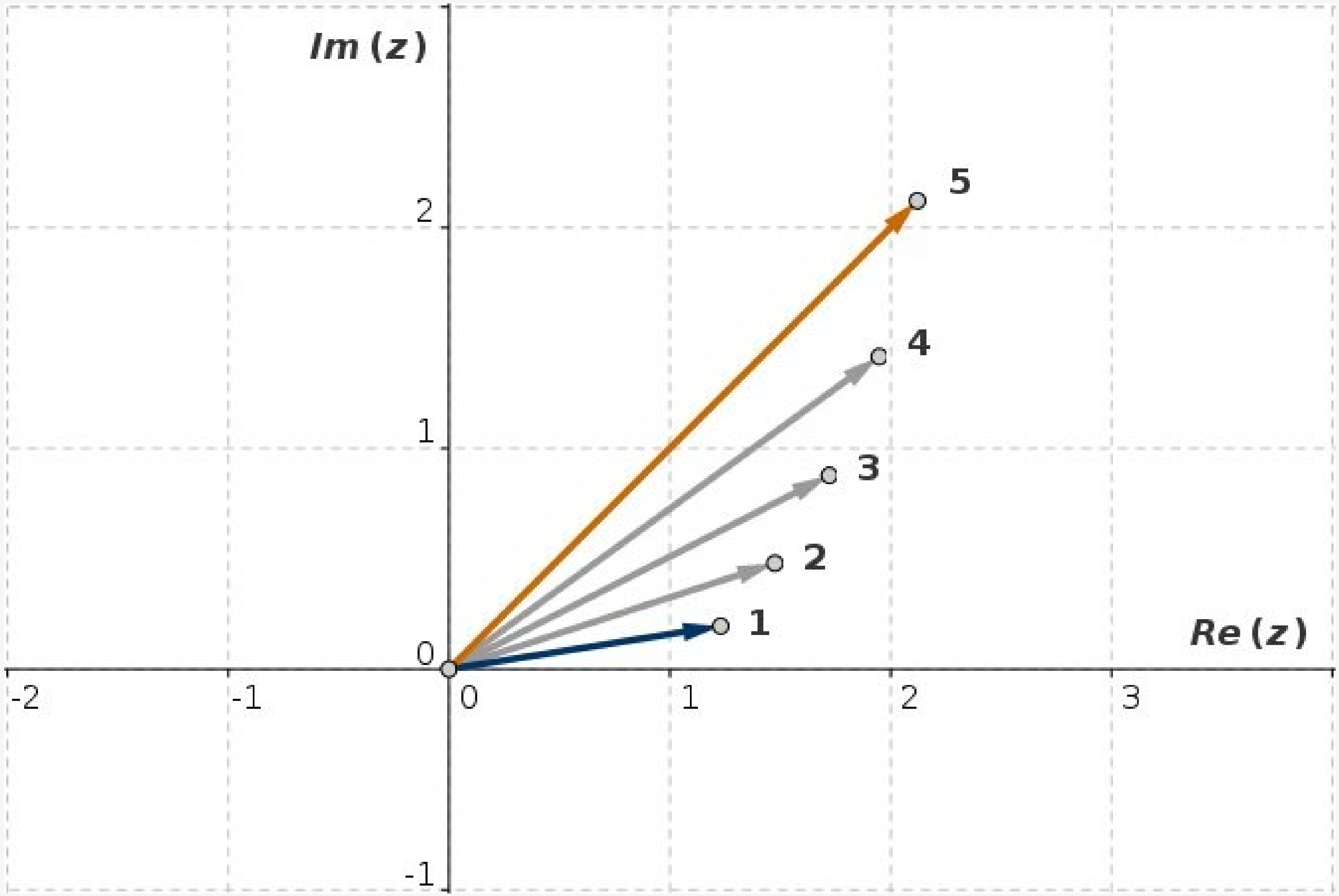


Abb. L4-b: Darstellung der komplexen Zahl z und der ersten vier Potenzen von z

$$|\, z \,| = \sqrt[5]{3}\,, \qquad |\, z^5 \,| = 3$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y = -\frac{1}{2}, \qquad n = 6$$

$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3 + 1} = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{|y|}{r} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} \qquad (x > 0, \quad y < 0)$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{i\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \qquad z^6 = e^{-i\pi} = -1$$

$$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$$

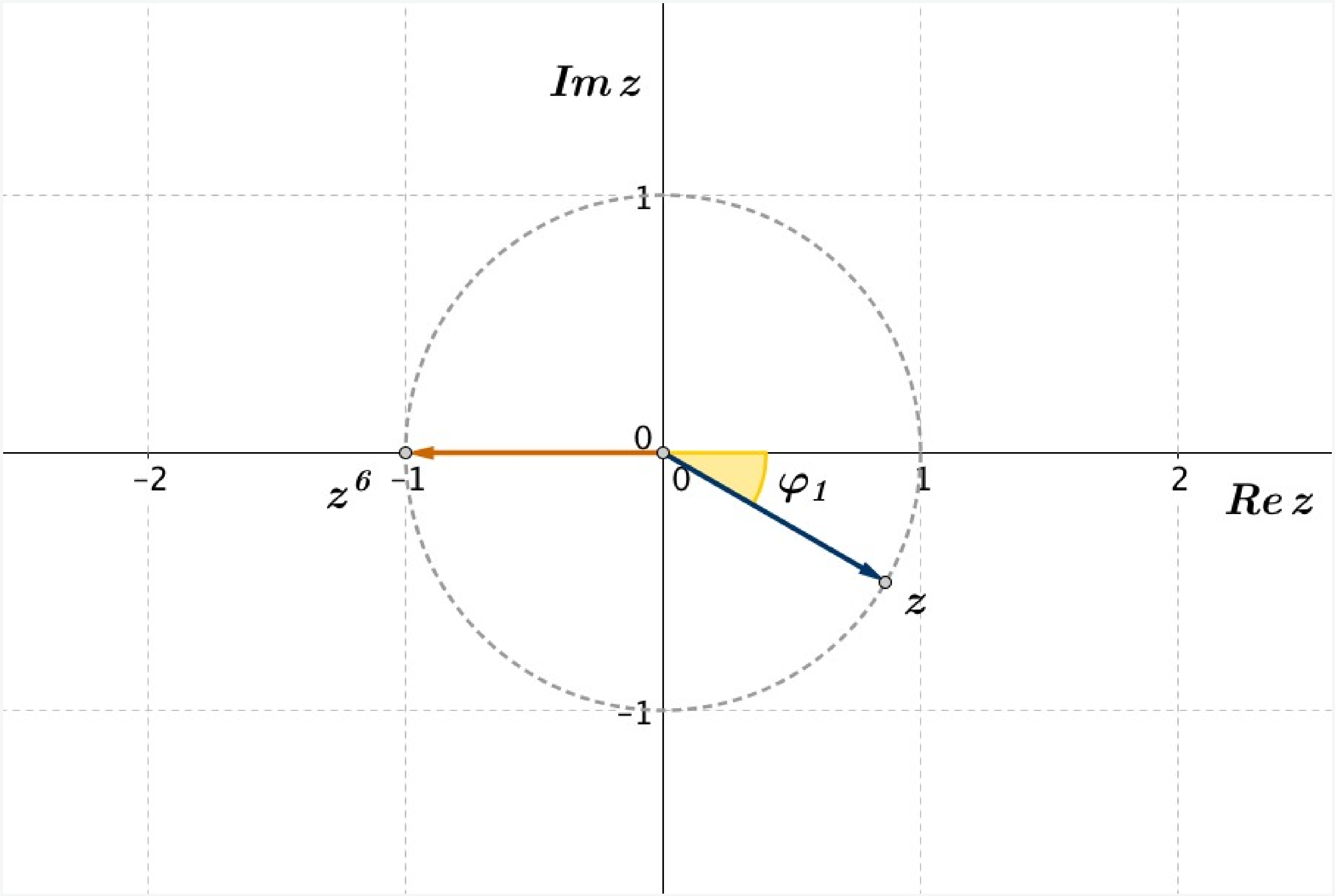


Abb. L5-b: Darstellung der komplexen Zahl z und der sechsten Potenz von z

$$z = e^{-i\,\frac{\pi}{6}}$$

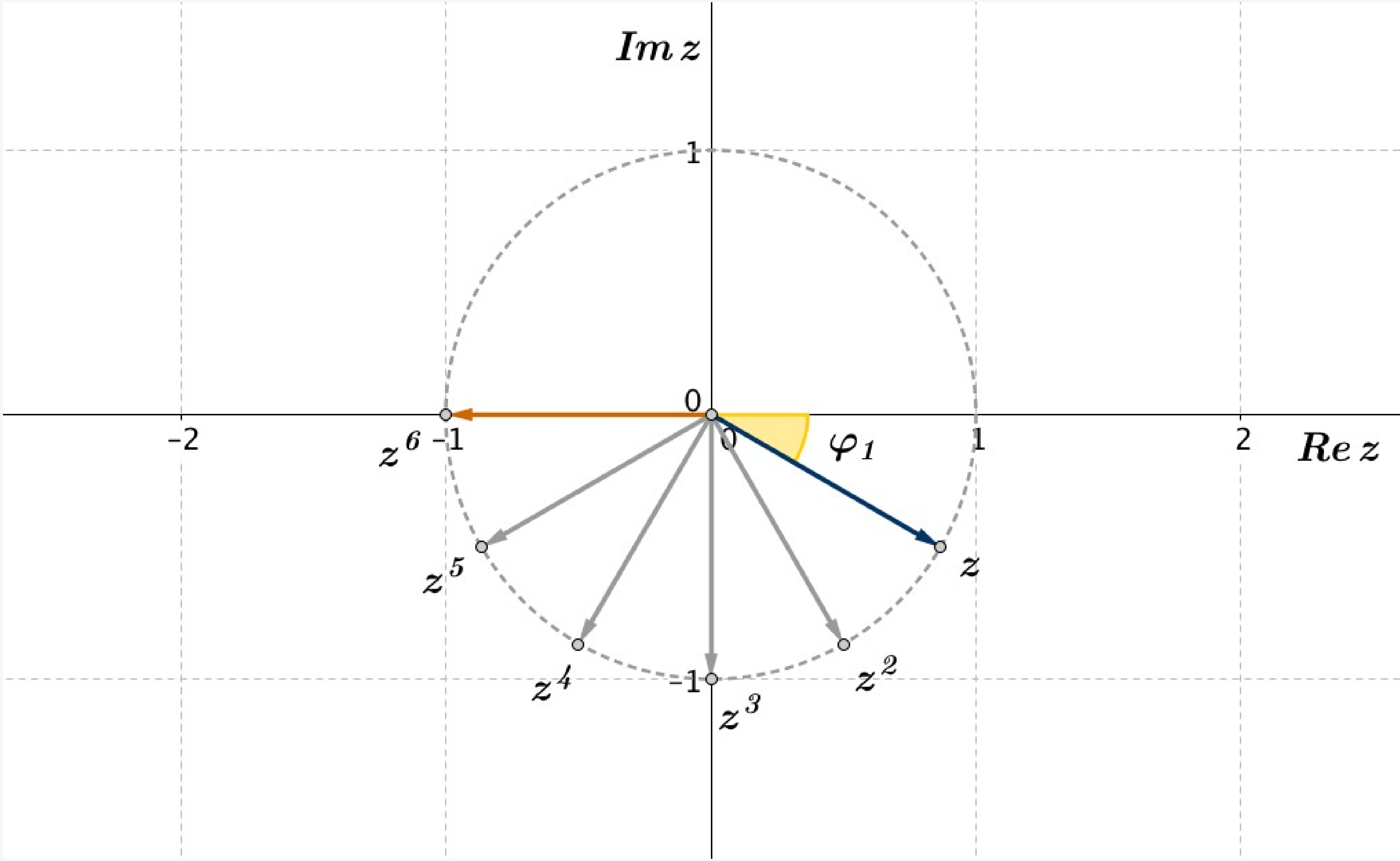


Abb. L5-c: Darstellung der komplexen Zahl z und der ersten fünf Potenzen von z. Alle Zahlen befinden sich auf dem Kreis mit Radius 1

$$| z | = | z^2 | = \ldots | z^6 | = 1, \qquad \varphi_1 = - \frac{\pi}{6}$$

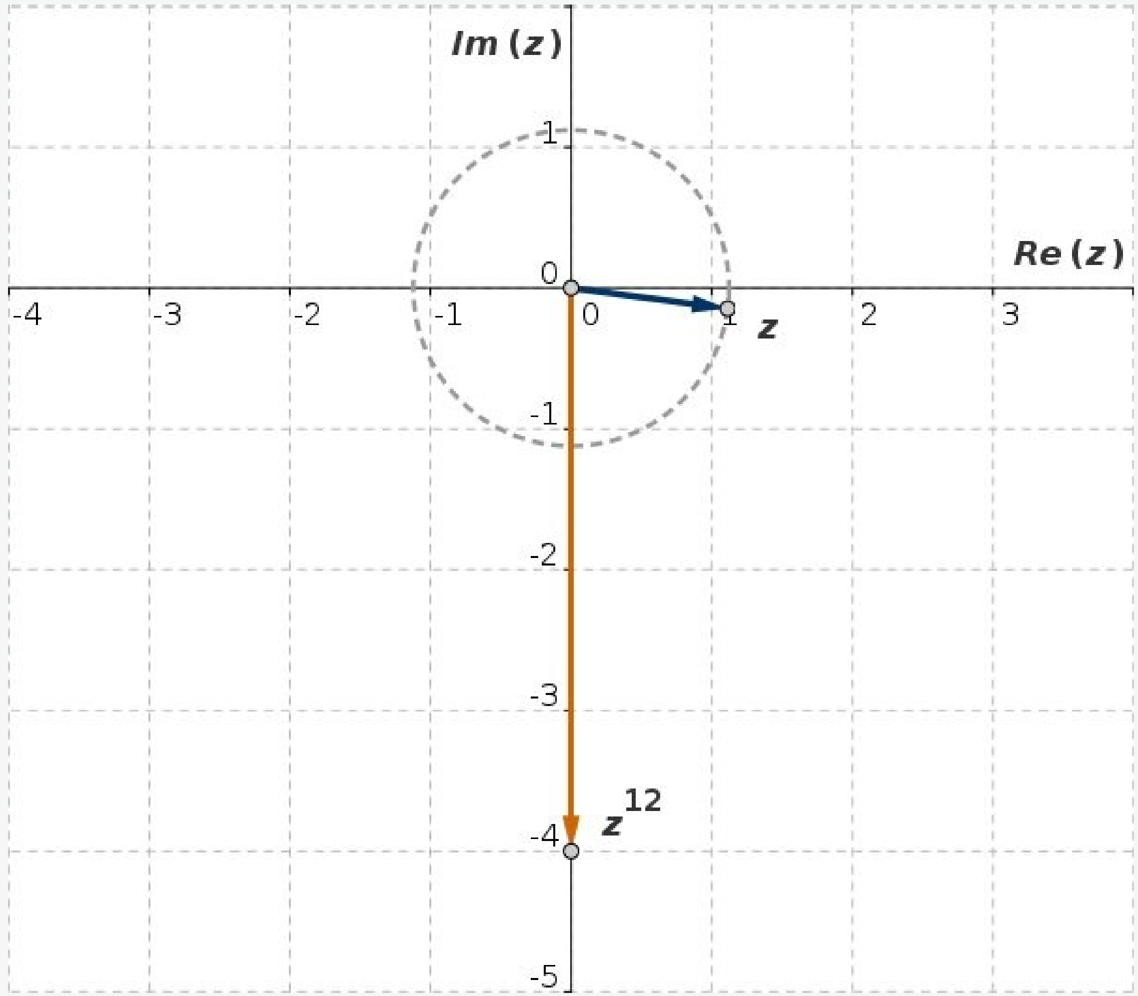


Abb. L6: Darstellung der komplexen Zahl z und der zwölften Potenz von z

$$z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2^{\frac{1}{6}}\, e^{-i\frac{\pi}{24}}, \qquad n = 12$$

$$z^{12} = 2^{\frac{12}{6}}\, e^{-i\frac{\pi}{24}\,12} = 2^{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -4\,i$$

Erheben Sie die komplexe Zahl z in die *n-te* Potenz

Aufgabe 7: $z = 1 + i, \quad n = 8$

Aufgabe 8: $z = \sqrt{3} - i, \quad n = 6$

Aufgabe 9: $z = -1 + i\sqrt{3}, \quad a)\ n = 5, \quad b)\ n = 60$

Aufgabe 10: Bestimmen Sie die n-ten Potenzen der komplexen Zahl z:

$$a)\quad z = 0.9\, e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$z = 1.1\, e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$b)\quad z = 0.8\, e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$z = 1.2\, e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6$$

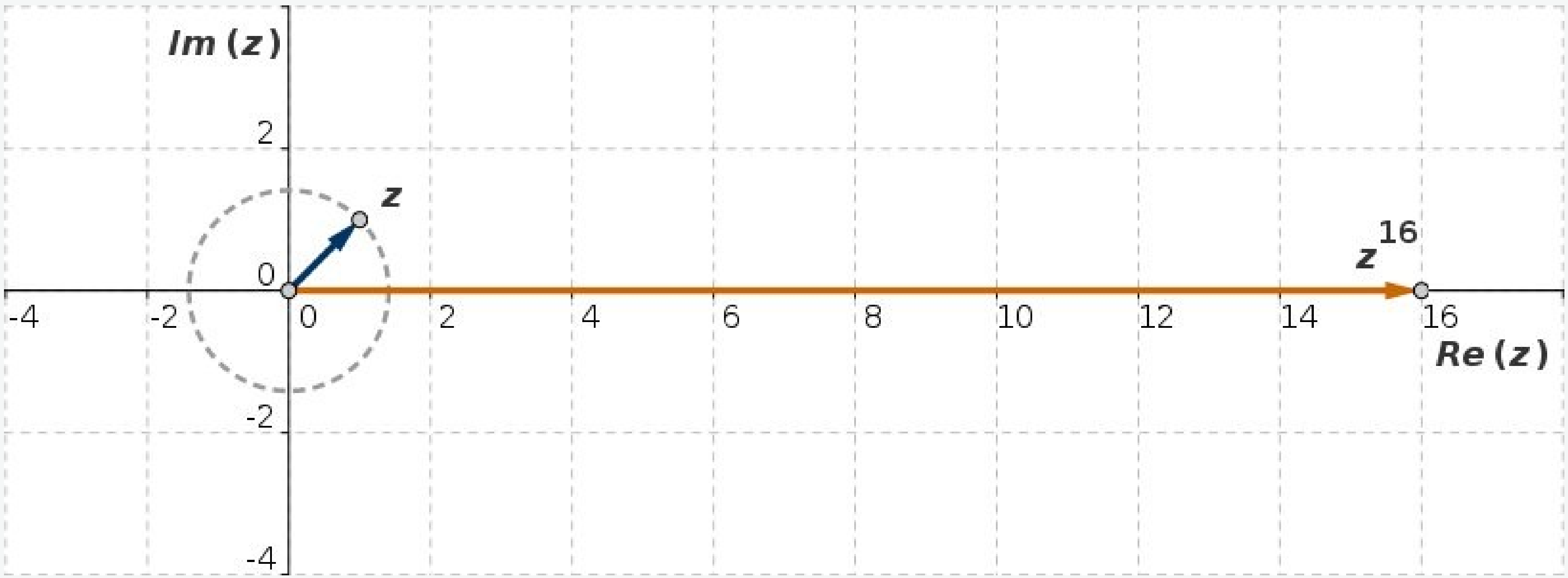


Abb. L7: Darstellung der komplexen Zahl z und der 8-ten Potenz von z

$$z = 1 + i\,, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad n = 8$$

$$r = |\,z\,| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\; e^{i\,\frac{\pi}{4}}$$

$$z^{\,8} = (1 + i)^{8} = (\sqrt{2})^{\,8}\; e^{2\,i\,\pi} = 2^{\,4}\,\left(\cos(2\,\pi) + i\sin(2\,\pi)\right) = 16$$

Lösung 7 mit dem Binomialsatz

$$(a+b)^n =$$

$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Binomialkoeffizienten (*"n über k"*):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (k,\ n \in \mathbb{N}, \qquad k \leqslant n)$$

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1$$

n Fakultät: $\quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \qquad 0! = 1$

$$(a+b)^8 = a^8 + \binom{8}{1} a^7 \cdot b + \binom{8}{2} a^6 \cdot b^2 + \binom{8}{3} a^5 \cdot b^3 + \binom{8}{4} a^4 \cdot b^4 +$$

$$+ \binom{8}{5} a^3 \cdot b^5 + \binom{8}{6} a^2 \cdot b^6 + \binom{8}{7} a \cdot b^7 + b^8$$

$$\binom{8}{1} = \frac{8!}{1!\,(8-1)!} = \frac{8!}{7!} = 8 = \binom{8}{7}$$

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28 = \binom{8}{6}$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56 = \binom{8}{5}$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

Lösung 7 mit dem Binomialsatz

Aufgabe 7 kann auch mit Hilfe des Binomischen Satzes gelöst werden:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8\,a^7 \cdot b + 28\,a^6 \cdot b^2 + 56\,a^5 \cdot b^3 + 70\,a^4 \cdot b^4 + 56\,a^3 \cdot b^5 +$$

$$+ 28\,a^2 \cdot b^6 + 8\,a \cdot b^7 + b^8$$

$$z = 1 + i\,, \quad a = 1, \quad b = i$$

$$(1+i)^8 = 1 + 8\,i + 28\,i^2 + 56\,i^3 + 70\,i^4 + 56\,i^5 + 28\,i^6 + 8\,i^7 + i^8 = 16$$

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i\,, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i\,, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i\,, \quad i^8 = 1$$

$$z = \sqrt{3} - i\,, \quad x = \sqrt{3}\,, \quad y = -1, \quad n = 6$$

$$r = |\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\sin\alpha = \frac{|\,y\,|}{r} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\,\pi$$

$$z = 2\,e^{i\frac{11}{6}\pi}, \qquad z^6 = \left(2\,e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^6 = 2^6\,e^{i\frac{11}{6}\pi\cdot 6} = 64\,e^{i\,11\,\pi} = 64\,e^{i\,\pi} = -64$$

$$z^6 = \left(\sqrt{3} - i\right)^6 = -64$$

$$n = 5, \quad z = -1 + i\sqrt{3}\,, \quad x = -1, \quad y = \sqrt{3}$$

$$r = |\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\sin\alpha = \frac{|\,y\,|}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}\,, \qquad \varphi = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\,\pi$$

$$z = 2\,e^{i\frac{2}{3}\pi}\,, \qquad z^5 = \left(2\,e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^5 = 2^5\,e^{i\frac{10}{3}\pi} = 2^5\,e^{i\left(2+\frac{4}{3}\right)\pi} = 32\,e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$a)\ z^5 = 32\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = 32\left(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ\right) =$$

$$= -16\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)$$

$$b)\ z^5 = 32\,e^{i\frac{4}{3}\pi} = 32\,e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 32\,e^{i\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -32\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -16\,(1 + \sqrt{3}\,i)$$

$$z = -1 + i\sqrt{3}\,, \qquad n = 60$$

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2\ e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$z^{60} = (-1 + i\sqrt{3})^{60} = 2^{60}\left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^{60} = 2^{60}\ e^{i\,40\,\pi} =$$

$$= 2^{60}\ e^{i\,(0\,+\,2\cdot 20\,\pi)} = 2^{60}\ e^{i\,0} = 2^{60}$$

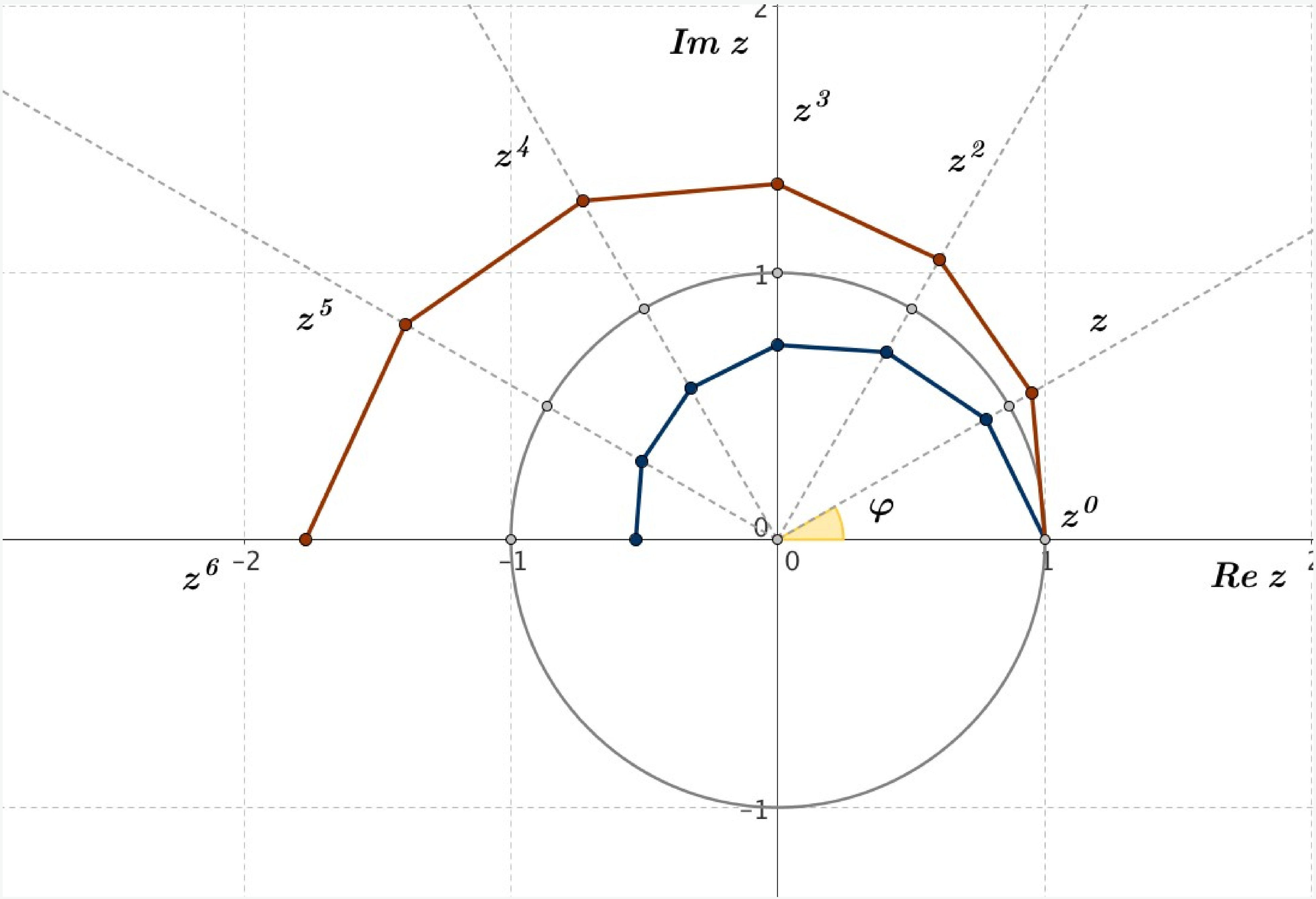


Abb. L-10a: Graphische Darstellung der Aufgabe

$$z = 0.9\, e^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$z^2 = (0.9)^2\, e^{i \frac{\pi}{6} \cdot 2} = 0.81\, e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$z^3 = (0.9)^3\, e^{i \frac{\pi}{6} \cdot 3} \simeq 0.73\, e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$z^4 = (0.9)^4\, e^{i \frac{\pi}{6} \cdot 4} \simeq 0.66\, e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$z^5 = (0.9)^5\, e^{i \frac{\pi}{6} \cdot 5} \simeq 0.59\, e^{i \frac{5\pi}{6}}$$

$$z^6 = (0.9)^6\, e^{i \frac{\pi}{6} \cdot 6} \simeq 0.53\, e^{i \pi} = -0.53$$

Die komplexe Zahl z und ihre fünf Potenzen sind durch blaue Punkte in Abb. L-10a dargestellt. Da der Betrag der komplexen Zahl z kleiner als 1 ist, wird der Betrag von Potenz zu Potenz immer kleiner. Das Argument wird um $\pi/6$ größer.

$$z = 1.1\, e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}$$

$$z^2 = (1.1)^2\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 2} = 1.21\, e^{\,i\,\frac{\pi}{3}}$$

$$z^3 = (1.1)^3\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 3} \simeq 1.33\, e^{\,i\,\frac{\pi}{2}}$$

$$z^4 = (1.1)^4\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 4} \simeq 1.46\, e^{\,i\,\frac{2\pi}{3}}$$

$$z^5 = (1.1)^5\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 5} \simeq 1.61\, e^{\,i\,\frac{5\pi}{6}}$$

$$z^6 = (1.1)^6\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 6} \simeq 1.77\, e^{\,i\,\pi} = -1.77$$

Die komplexe Zahl z und ihre fünf Potenzen sind durch rote Punkte in Abb. L-10a dargestellt. Da der Betrag der komplexen Zahl z größer als 1 ist, wird der Betrag von Potenz zu Potenz immer größer. Das Argument wird um $\pi/6$ größer.

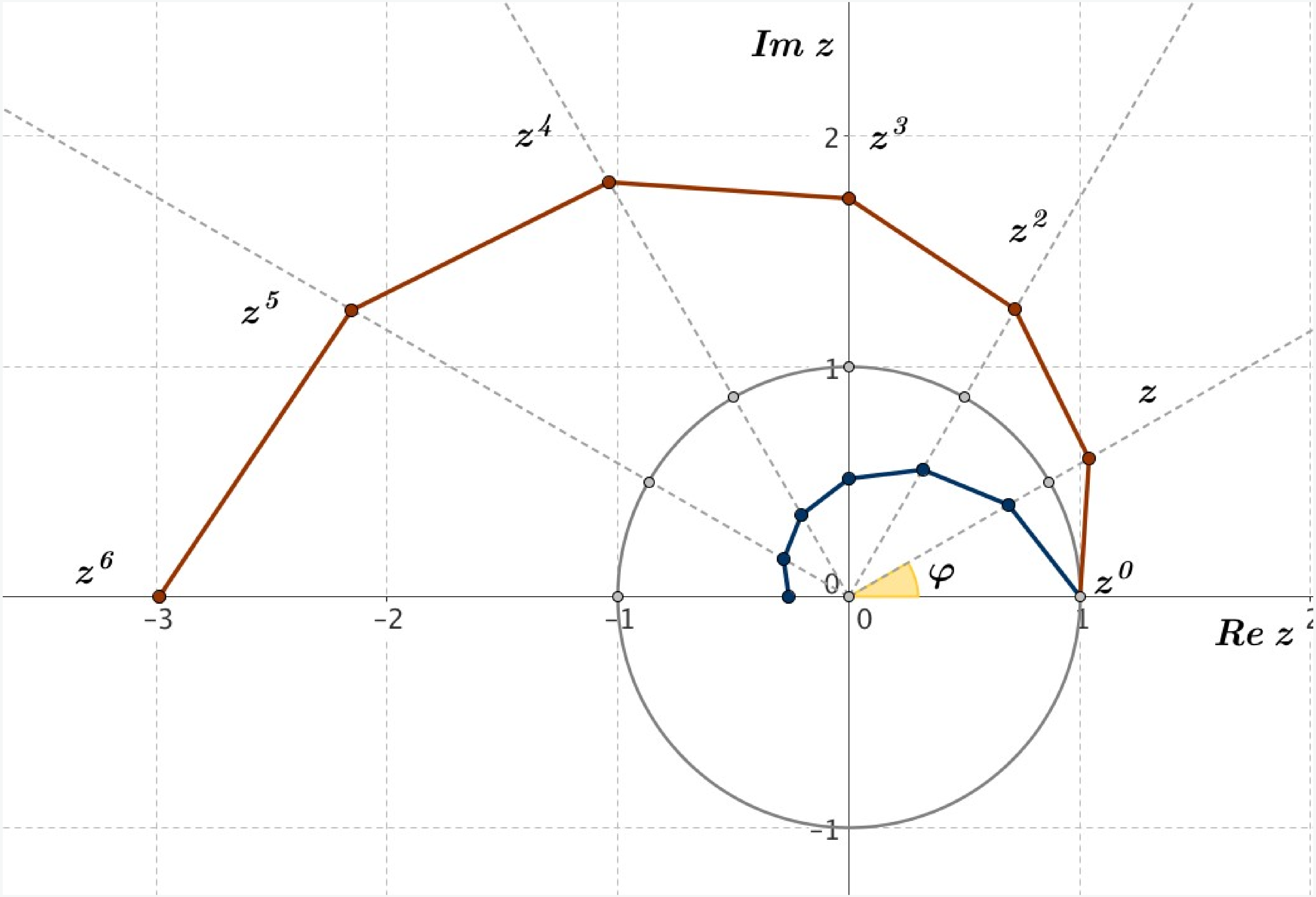


Abb. L-10b: Graphische Darstellung der Aufgabe

$$z = 0.8\, e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}$$

$$z^2 = (0.8)^2\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 2} = 0.64\, e^{\,i\,\frac{\pi}{3}}$$

$$z^3 = (0.8)^3\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 3} \simeq 0.51\, e^{\,i\,\frac{\pi}{2}}$$

$$z^4 = (0.8)^4\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 4} \simeq 0.41\, e^{\,i\,\frac{2\pi}{3}}$$

$$z^5 = (0.8)^5\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 5} \simeq 0.33\, e^{\,i\,\frac{5\pi}{6}}$$

$$z^6 = (0.8)^6\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 6} \simeq 0.26\, e^{\,i\,\pi} = -0.26$$

Die komplexe Zahl z und ihre fünf Potenzen sind durch blaue Punkte in Abb. L-10b dargestellt. Da der Betrag der komplexen Zahl z kleiner als 1 ist, wird der Betrag von Potenz zu Potenz immer kleiner. Das Argument wird um $\pi/6$ größer.

$$z = 1.2\, e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}$$

$$z^2 = (1.2)^2\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 2} = 1.44\, e^{\,i\,\frac{\pi}{3}}$$

$$z^3 = (1.2)^3\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 3} \simeq 1.73\, e^{\,i\,\frac{\pi}{2}}$$

$$z^4 = (1.2)^4\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 4} \simeq 2.07\, e^{\,i\,\frac{2\pi}{3}}$$

$$z^5 = (1.2)^5\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 5} \simeq 2.49\, e^{\,i\,\frac{5\pi}{6}}$$

$$z^6 = (1.2)^6\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}\cdot 6} \simeq 2.99\, e^{\,i\,\pi} = -2.99$$

Die komplexe Zahl z und ihre fünf Potenzen sind durch rote Punkte in Abb. L-10b dargestellt. Da der Betrag der komplexen Zahl z größer als 1 ist, wird der Betrag von Potenz zu Potenz immer größer. Das Argument wird um $\pi/6$ größer.

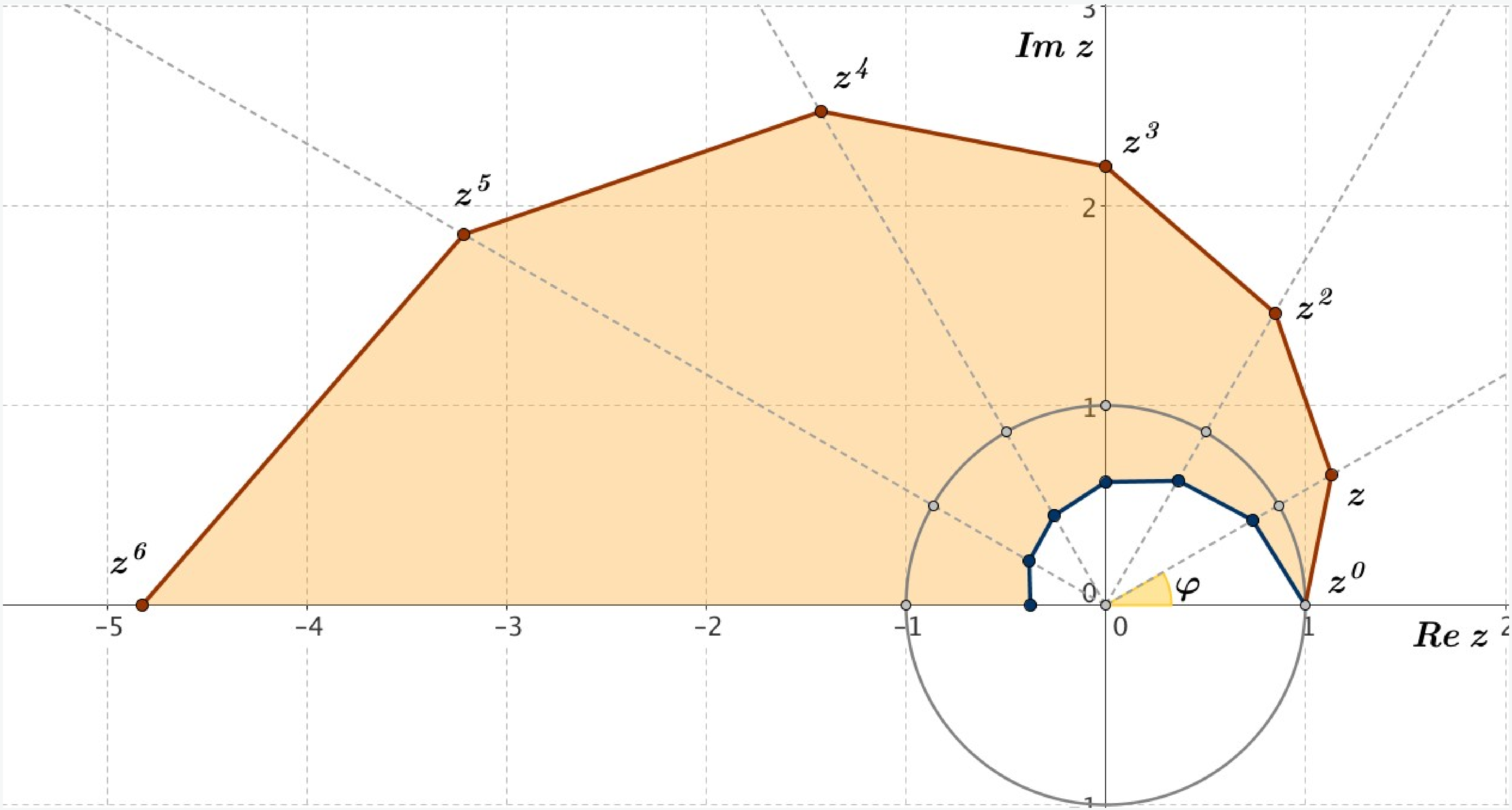
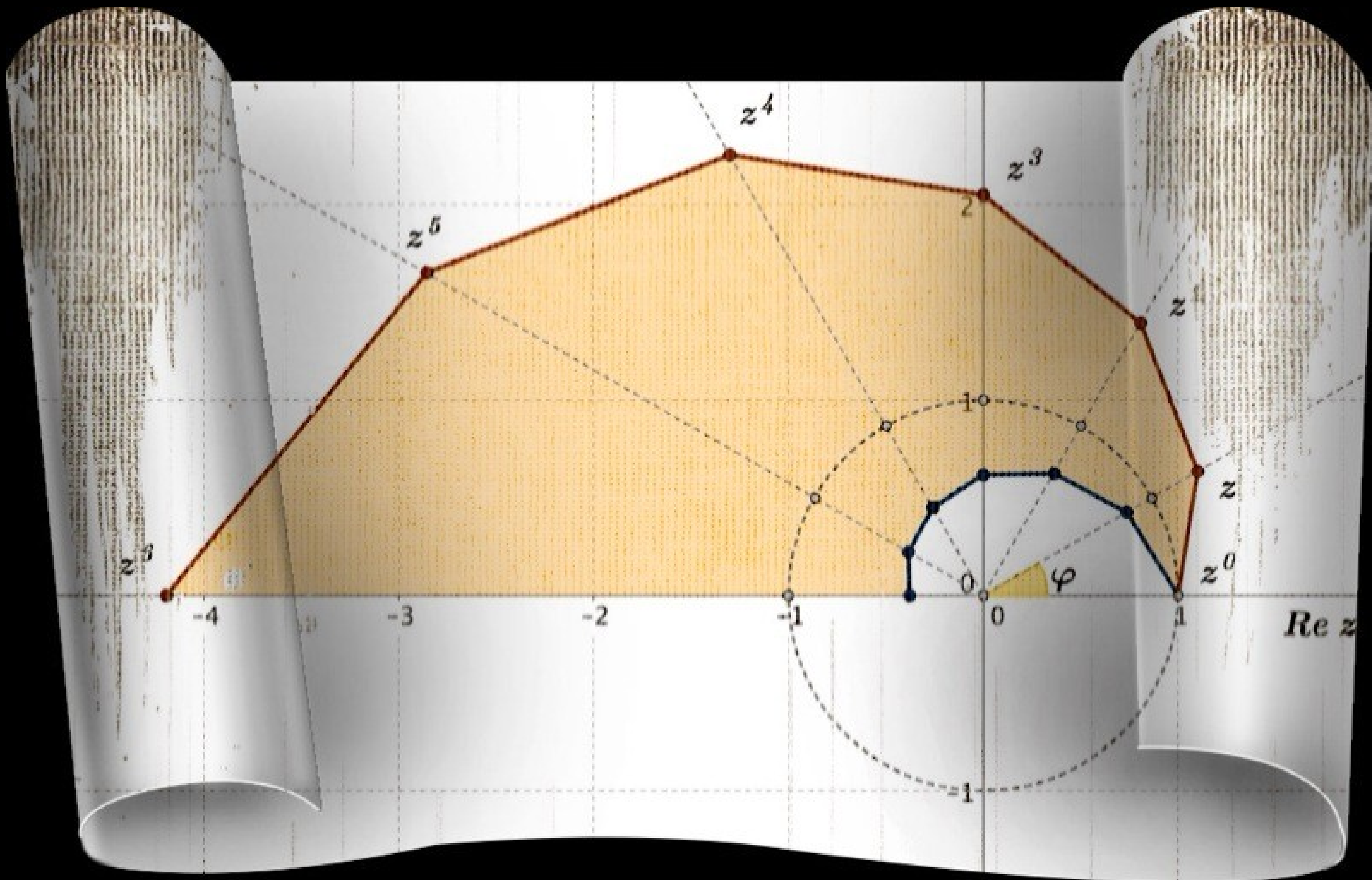
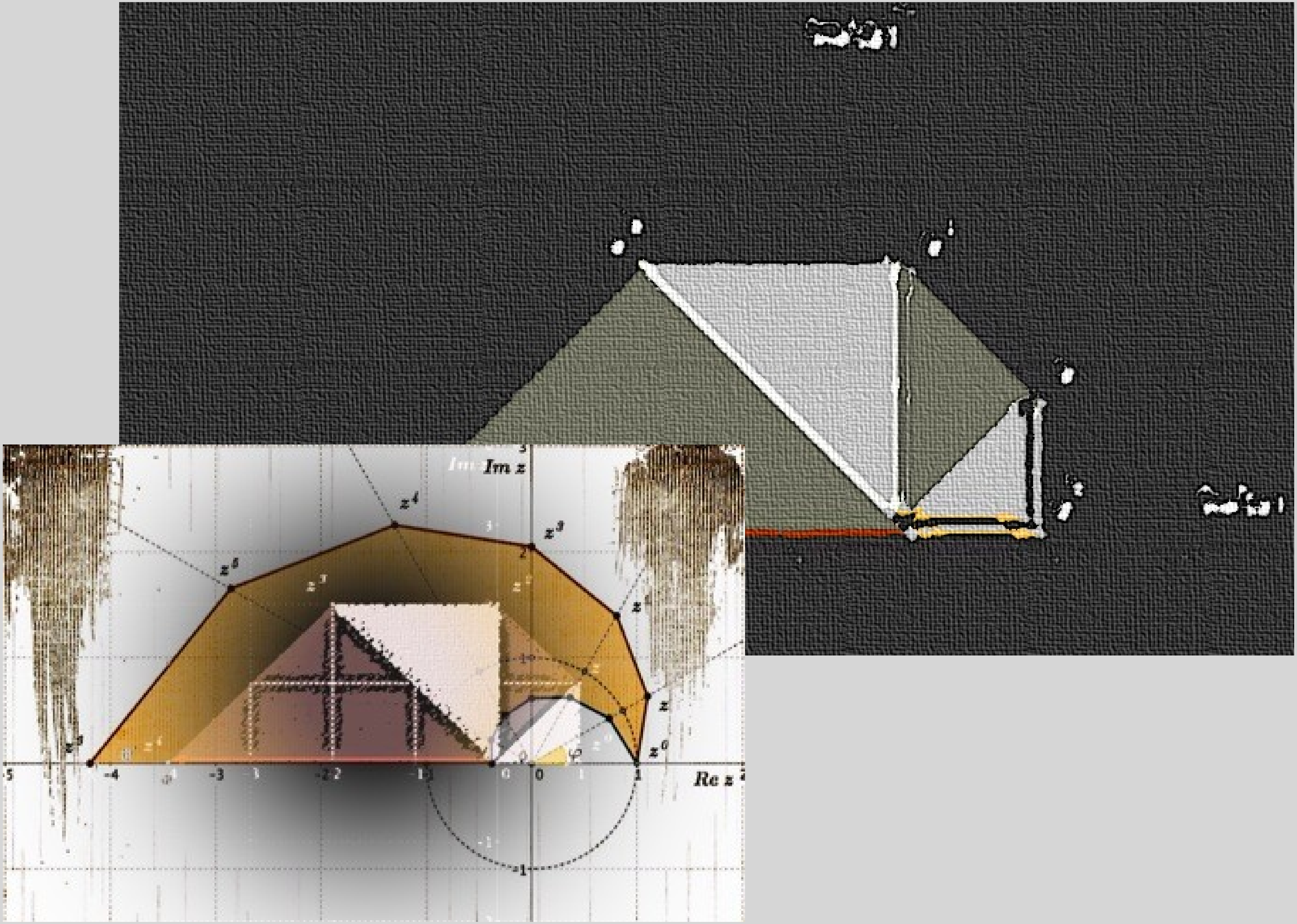


Abb.: Die blauen Punkte entsprechen den ersten 6 Potenzen der komplexen Zahl $z = 0.85 \exp(i\, \pi/6)$, die grauen Punkte den ersten 6 Potenzen der komplexen Zahl $z = \exp(i\, \pi/6)$ und die roten Punkte den ersten 6 Potenzen der komplexen Zahl $z = 1.3 \exp(i\, \pi/6)$



z^4
z^3
z^5
z^6
z^0
φ
Re z
-4
-3
-2
-1
0
1
2
-1



Im z
Re z