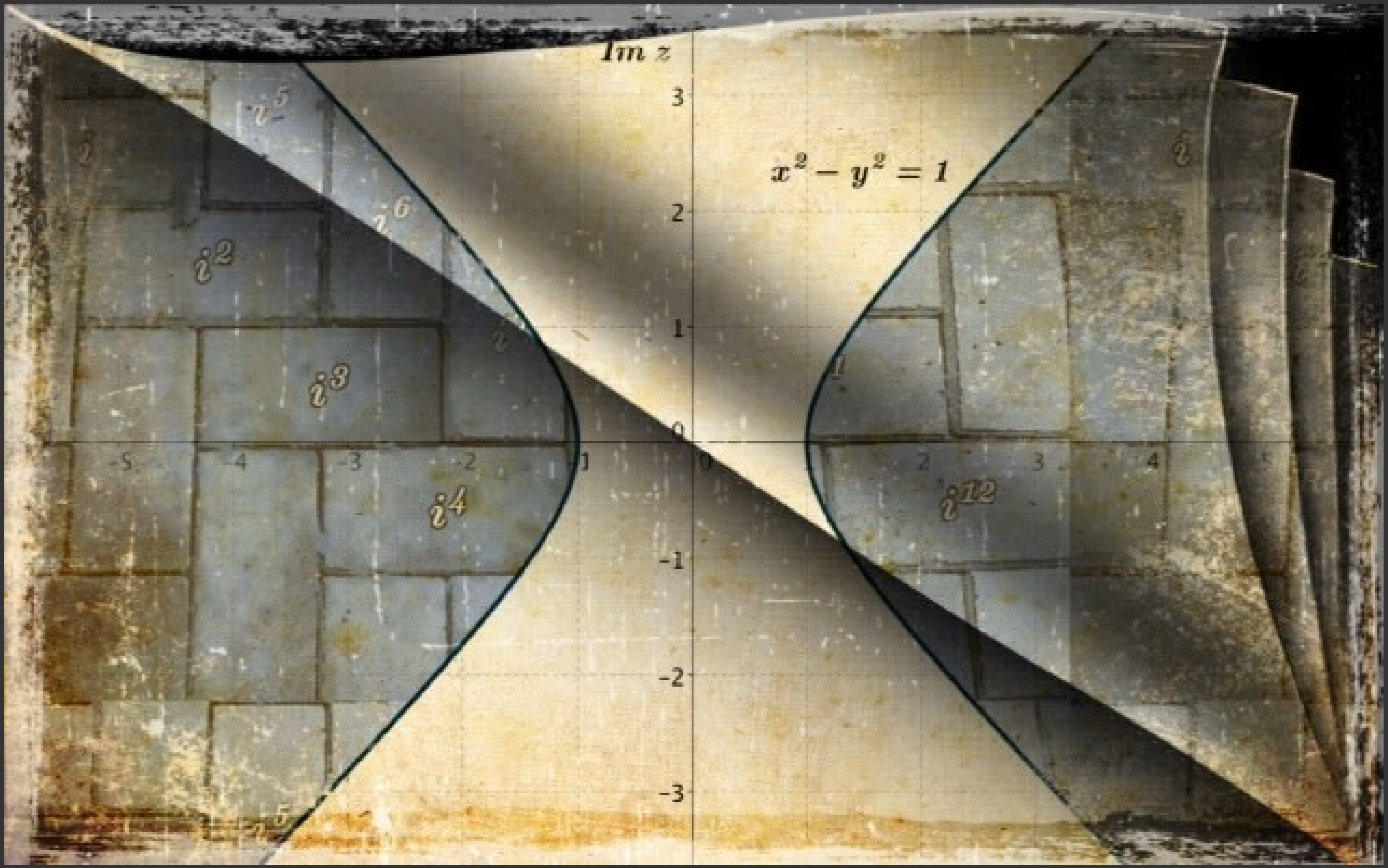

Komplexe Gleichungen

Welche Kurven werden durch folgende komplexe Gleichungen bestimmt?

Aufgabe 1: $\operatorname{Im}(z^2) = 2$

Aufgabe 2: $\operatorname{Re}\left((z^*)^2\right) = 1$

Aufgabe 3: $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 4: $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$

Aufgabe 5: $\operatorname{Im}\left(z^2 - z^*\right)^* = 2 - \operatorname{Im}(z)$

Aufgabe 6: $z^2 + (z^*)^2 = 1$

Aufgabe 7: $|z - i| + |z + i| = 4$

Aufgabe 8: $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$

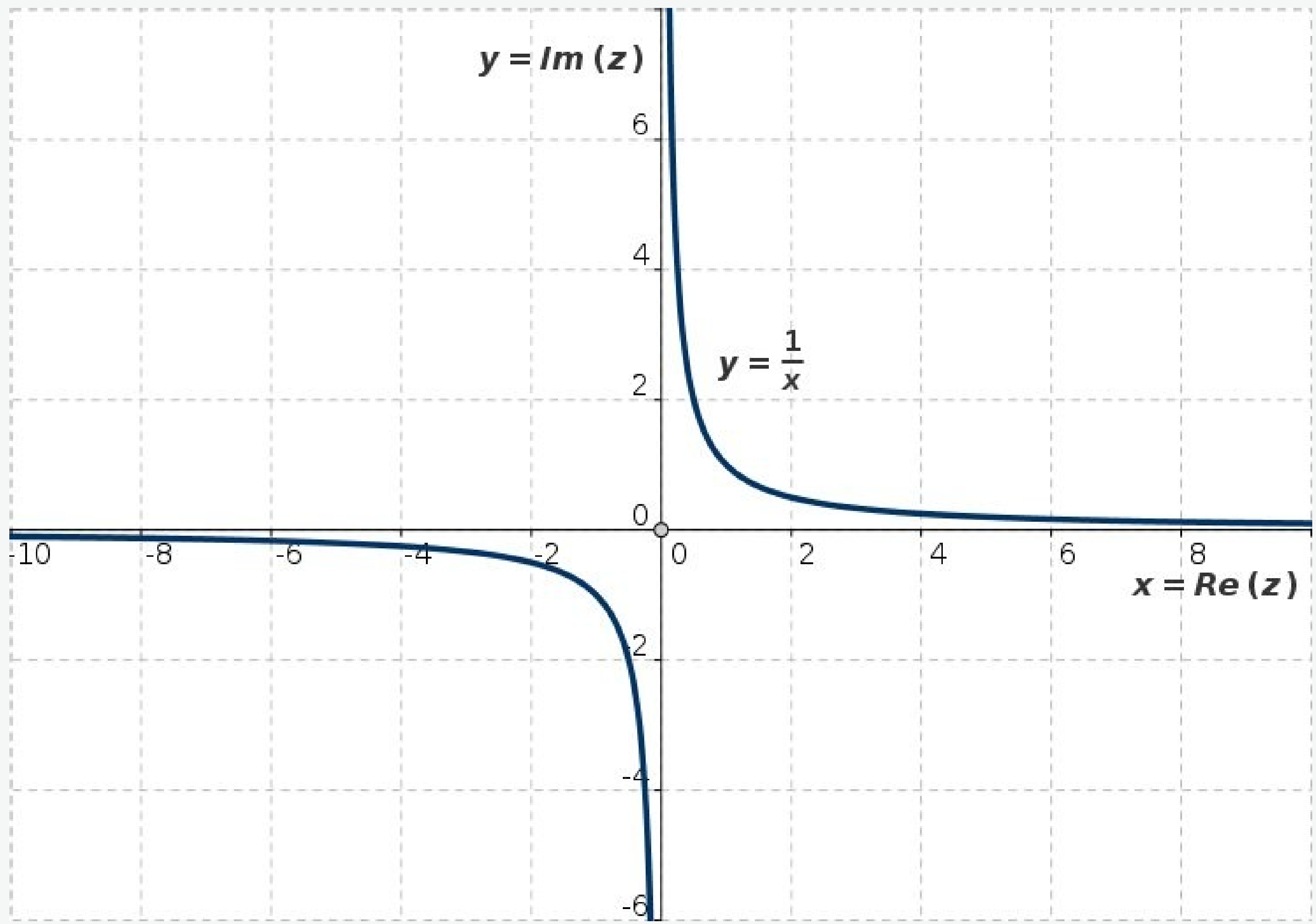

Abb. L1: Graphische Darstellung der Lösung der komplexen Gleichung (Hyperbel)

$$\mathrm{Im}\,(z^2) = \mathrm{Im}\,(x + i\,y)^2 = \mathrm{Im}\,(x^2 + 2\,i\,x\,y - y^2) = 2\,x\,y = 2 \quad \Rightarrow$$

$$x\,y = 1, \qquad y = \frac{1}{x}$$

$$\mathrm{Re}\left((z^*)^2\right) = 1$$

$$(z^*)^2 = (x - i\,y)^2 = x^2 - 2\,i\,x\,y - y^2$$

$$\mathrm{Re}\left((z^*)^2\right) = \mathrm{Re}\left(x^2 - 2\,i\,x\,y - y^2\right) = x^2 - y^2$$

$$\mathrm{Re}\left((z^*)^2\right) = 1, \qquad x^2 - y^2 = 1$$

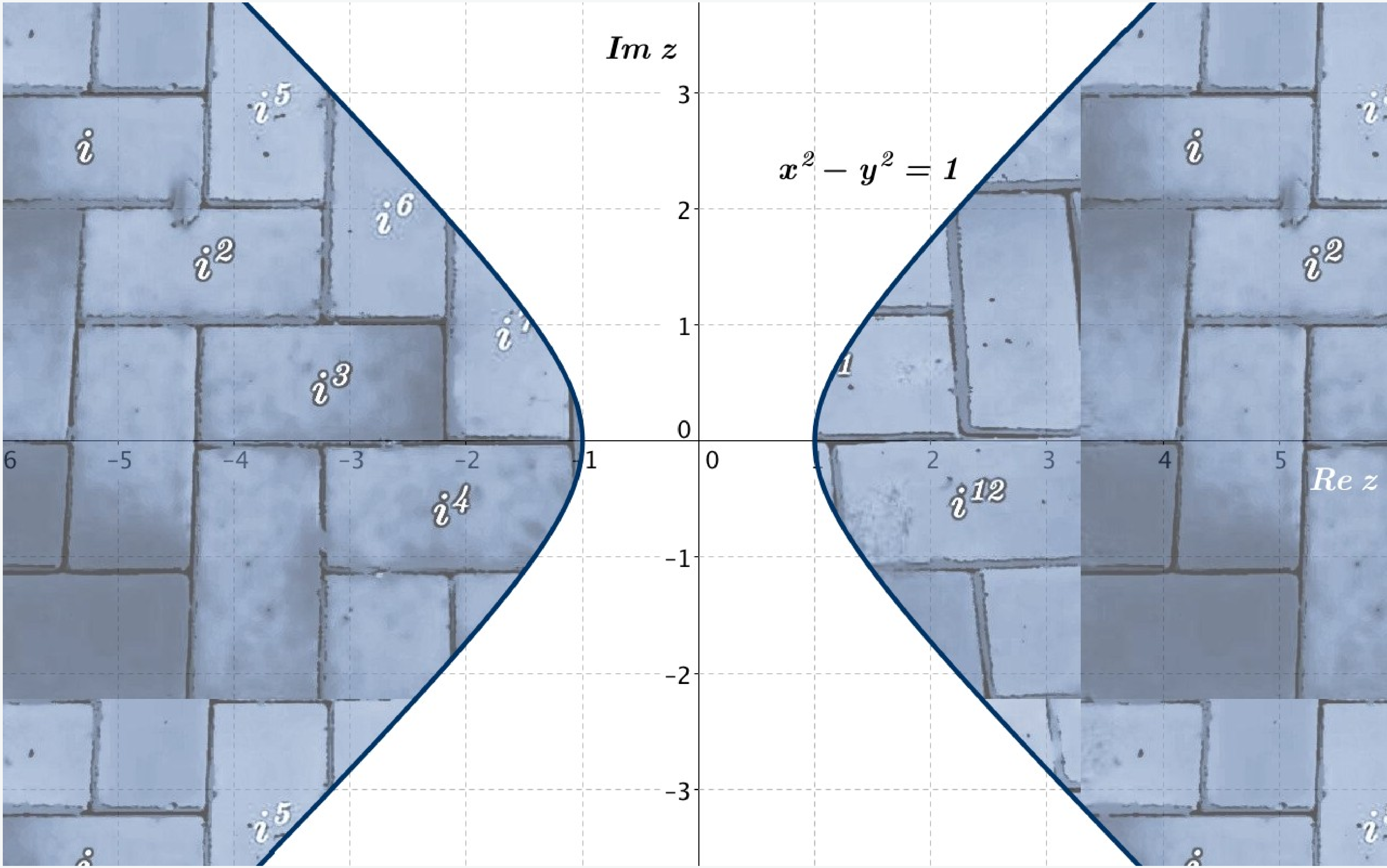

Abb. L2: Graphische Darstellung der Lösung der komplexen Gleichung (Hyperbel)

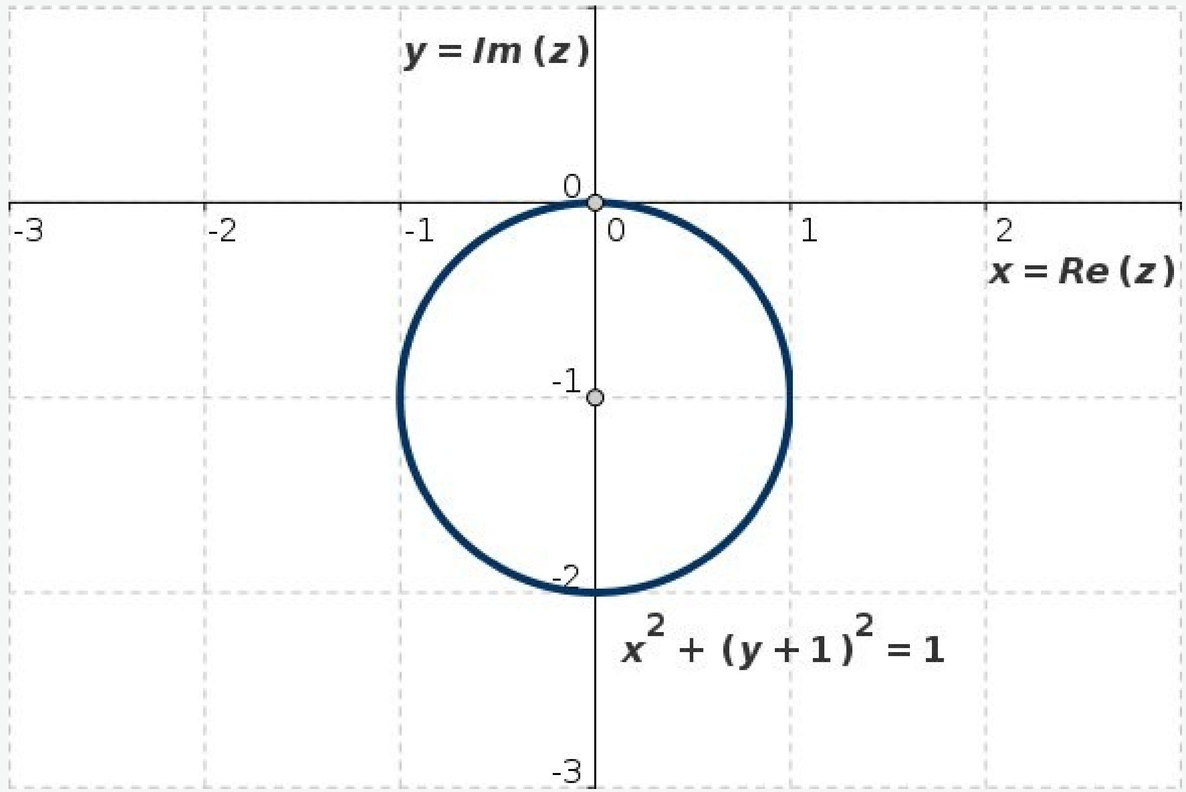

Abb. L3: Graphische Darstellung der Lösung der komplexen Gleichung: Kreis mit Mittelpunkt (0, -1) und Radius 1

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + i\, y} = \frac{x - i\, y}{(x + i\, y)\,(x - i\, y)} = \frac{x - i\, y}{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x - i\, y}{x^2 + y^2}\right) = - \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

$$-2\, y = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y + 1)^2 = 1$$

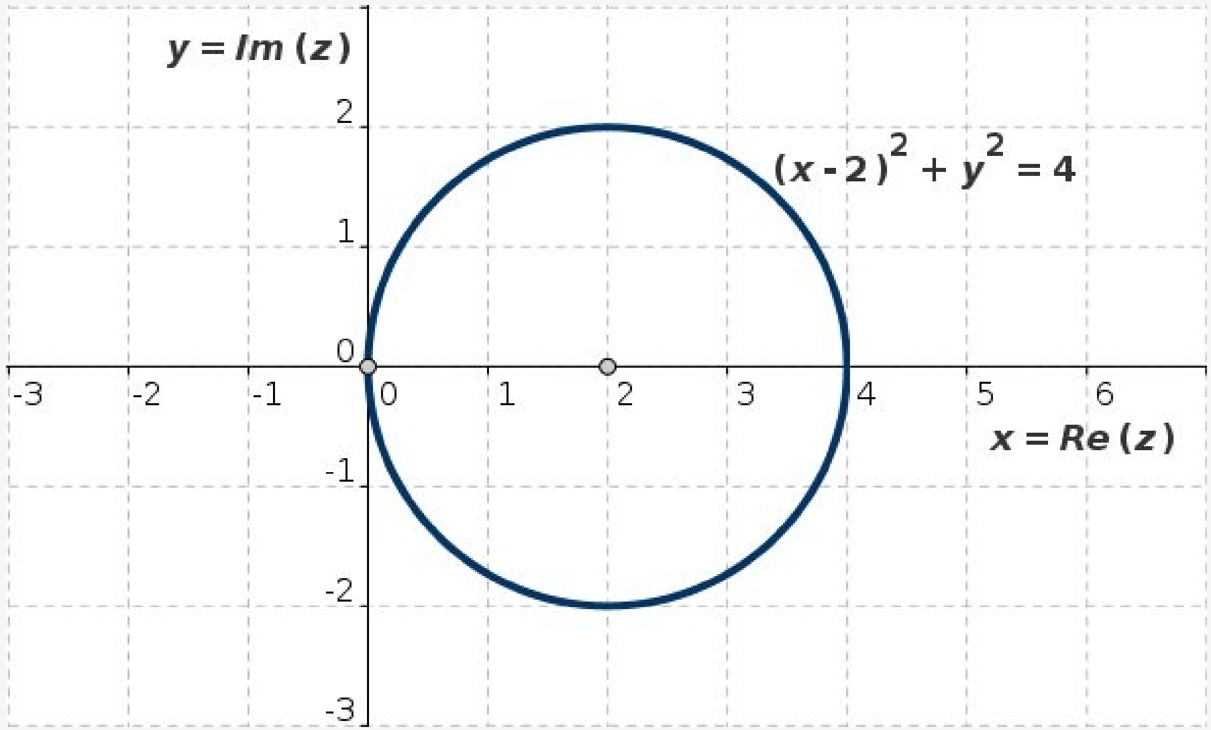

Abb. L4: Graphische Darstellung der Lösung der komplexen Gleichung: Kreis mit Mittelpunkt (2, 0) und Radius 2

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + i\,y} = \frac{x - i\,y}{(x + i\,y)\,(x - i\,y)} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x - i\,y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}$$

$$4\,x = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

Komplexe Gleichungen: Lösung 5

$$\mathrm{Im}\left(z^2 - z^*\right)^* = 2 - \mathrm{Im}(z)$$

$$z^2 - z^* = (x + i\,y)^2 - (x - i\,y) = x^2 + 2\,i\,x\,y - y^2 - x + i\,y =$$

$$= x^2 - y^2 - x + i\,(2\,x\,y + y)$$

$$\left(z^2 - z^*\right)^* = x^2 - y^2 - x - i\,(2\,x\,y + y)$$

$$\mathrm{Im}\left(z^2 - z^*\right)^* = \mathrm{Im}\left(x^2 - y^2 - x - i\,(2\,x\,y + y)\right) = -2\,x\,y - y$$

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x + i\,y) = y$$

$$\mathrm{Im}\left(z^2 - z^*\right)^* = 2 - \mathrm{Im}(z) \quad \Leftrightarrow \quad -2\,x\,y - y = 2 - y$$

$$y = -\frac{1}{x}$$

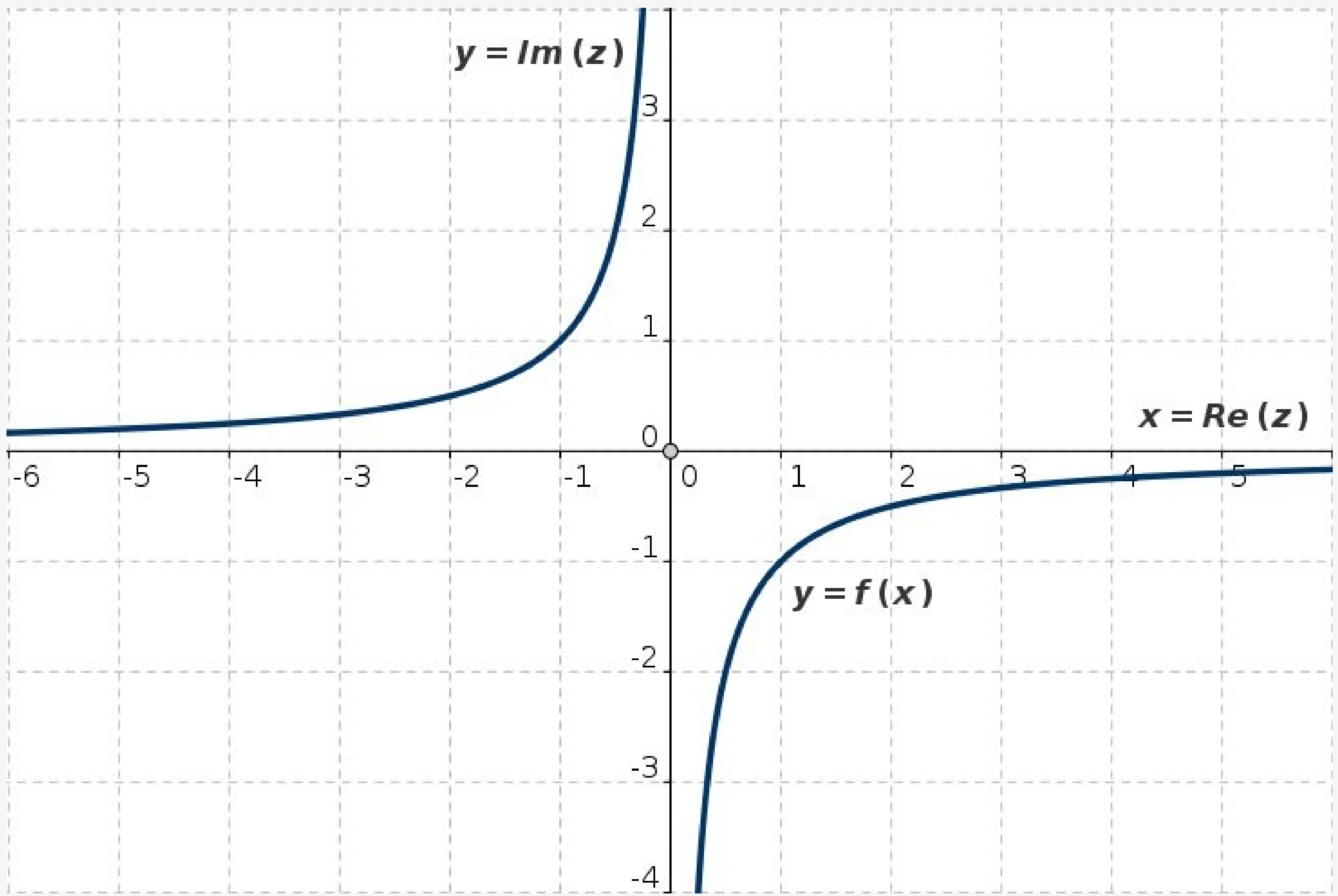

Abb. L5: Graphische Darstellung der Lösung der komplexen Gleichung (Hyperbel)

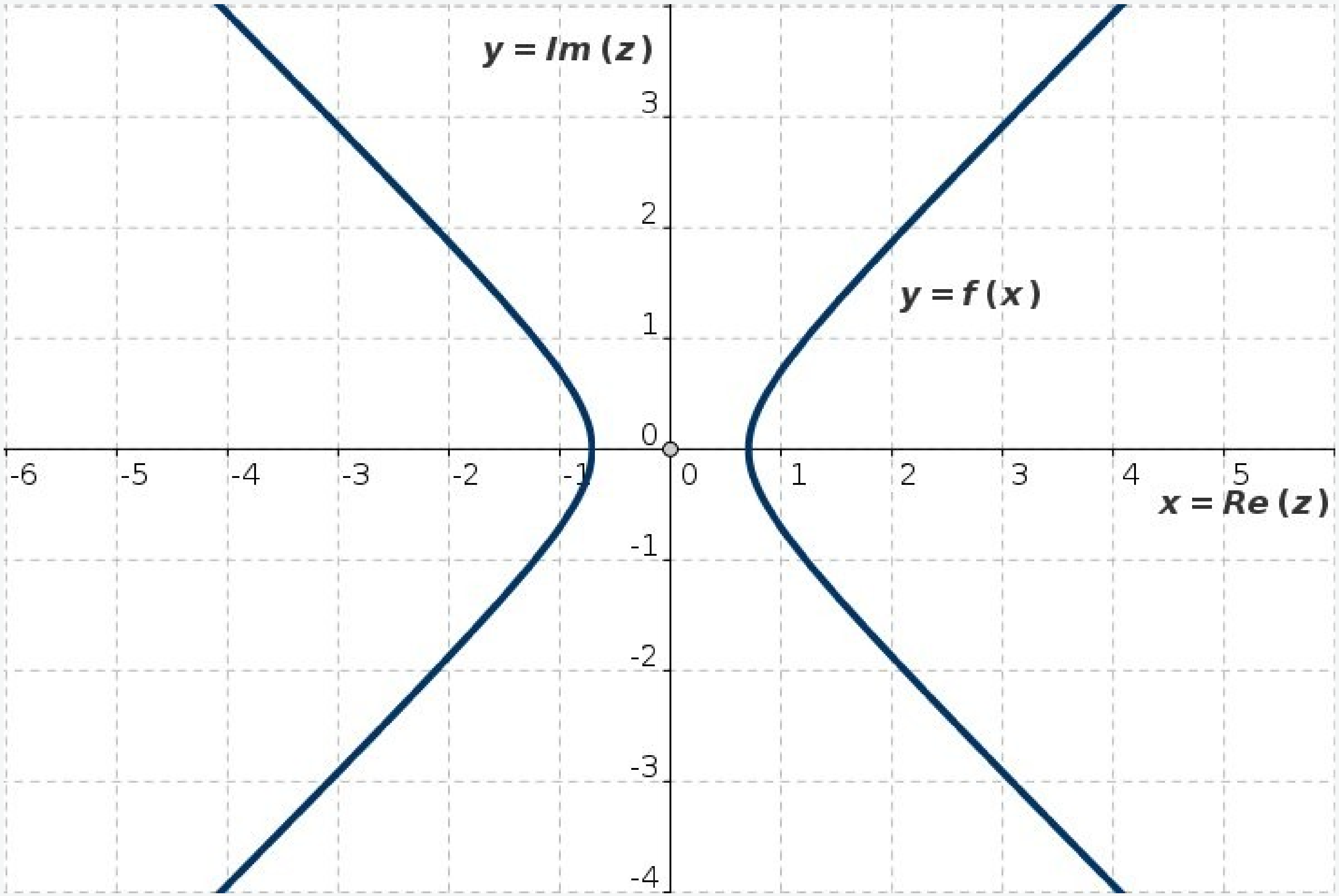

Abb. L6: Graphische Darstellung der Lösung der komplexen Gleichung (Hyperbel)

$$z^2 + (z^*)^2 = (x + i\,y)^2 + (x - i\,y)^2 =$$

$$= x^2 + 2\,i\,x\,y - y^2 + x^2 - 2\,i\,x\,y - y^2 = 2\,(x^2 - y^2) = 1$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$

$$|z - i| + |z + i| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x + i(y-1)| + |x + i(y+1)| = 4$$

$$|x + i(y-1)| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$|x + i(y+1)| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = \left(4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + x^2 + (y+1)^2$$

$$2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4 + y$$

$$4\left(x^2 + (y+1)^2\right) = 16 + 8y + y^2$$

$$4x^2 + 3y^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

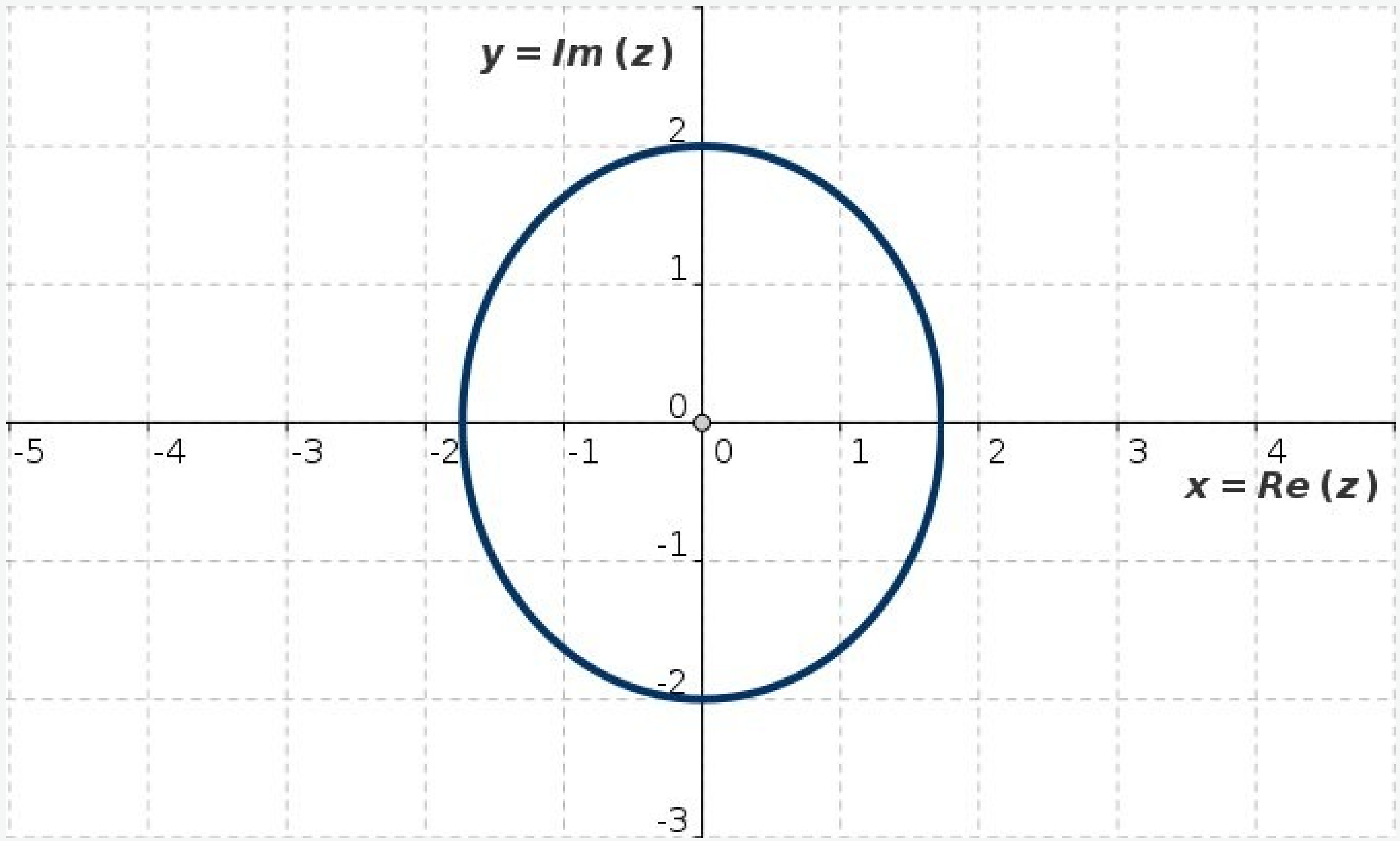

Abb. L7: Graphische Darstellung der Lösung der komplexen Gleichung (Ellipse)

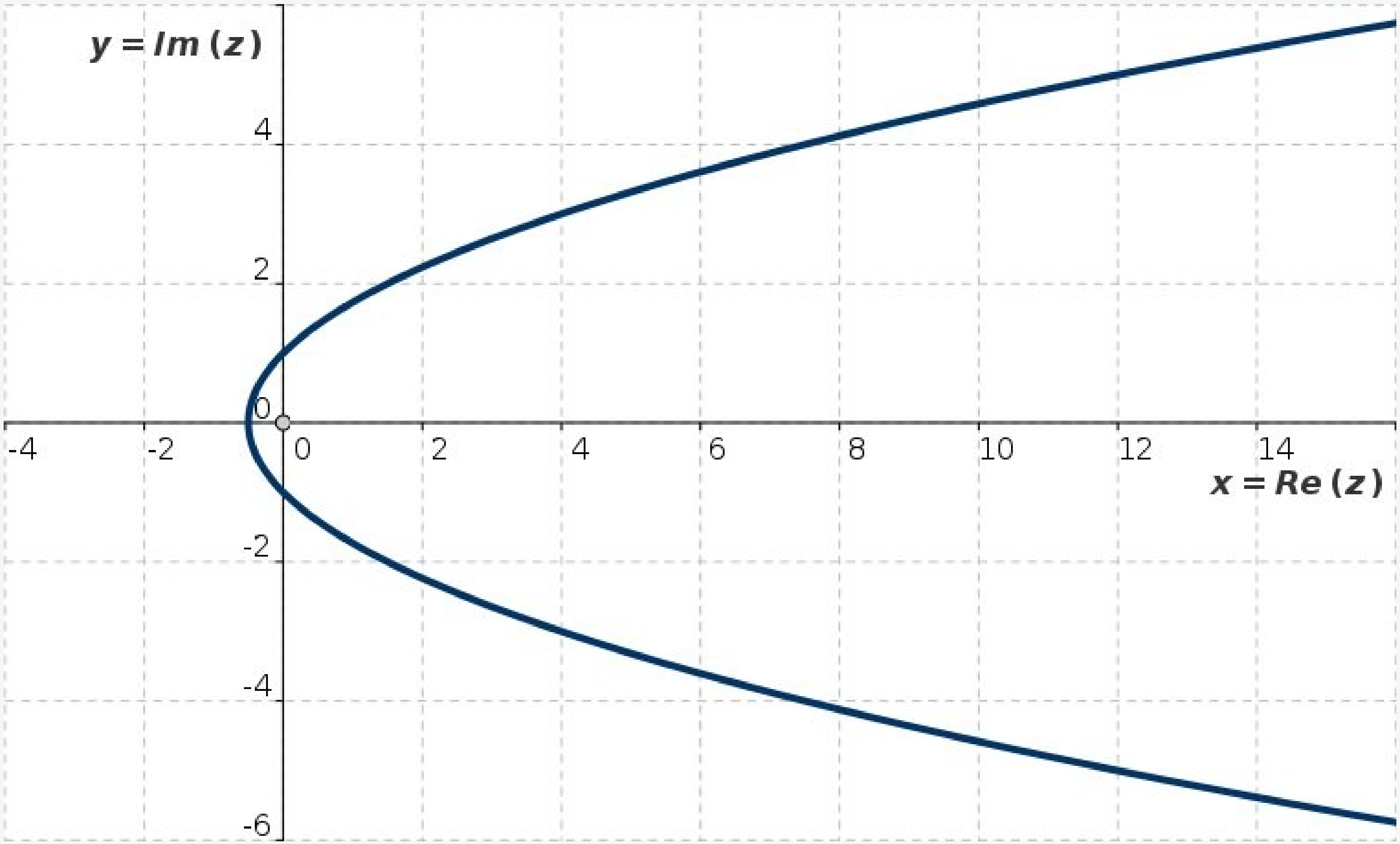

Abb. L8: Graphische Darstellung der Lösung der komplexen Gleichung (Parabel)

$$\mathrm{Re}\,(1 + z) = |\,z\,| \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(1 + x + i\,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1 + x = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad (1 + x)^2 = x^2 + y^2, \qquad y^2 = 1 + 2\,x$$

Wir schreiben in der komplexen Form die Gleichung einer Geraden:

$$A x + B y + C = 0$$

$$z = x + i y, \quad z^* = x - i y, \quad x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{i}{2}(z^* - z)$$

$$A x + B y + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{2}(z + z^*) + \frac{i B}{2}(z^* - z) + C = 0$$

$$(A - i B) z + (A + i B) z^* + 2 C = 0$$

$$\boxed{a^* z + a z^* + 2 C = 0, \qquad a \equiv A + i B}$$

Aufgabe 9:

Schreiben Sie in der komplexen Form die Gleichung eines Kreises:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$$

Aufgabe 10:

Welche Kurve in der x,y-Ebene wird durch die Gleichung

$$z z^* + i(z - z^*) - 2 = 0$$

bestimmt?

Aufgabe 11:

Schreiben Sie in der komplexen Form die Gleichung

a) einer Geraden $y = x$,

b) einer Geraden $y = a x + b$, wo a und b reelle Zahlen Sind,

c) einer Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$.

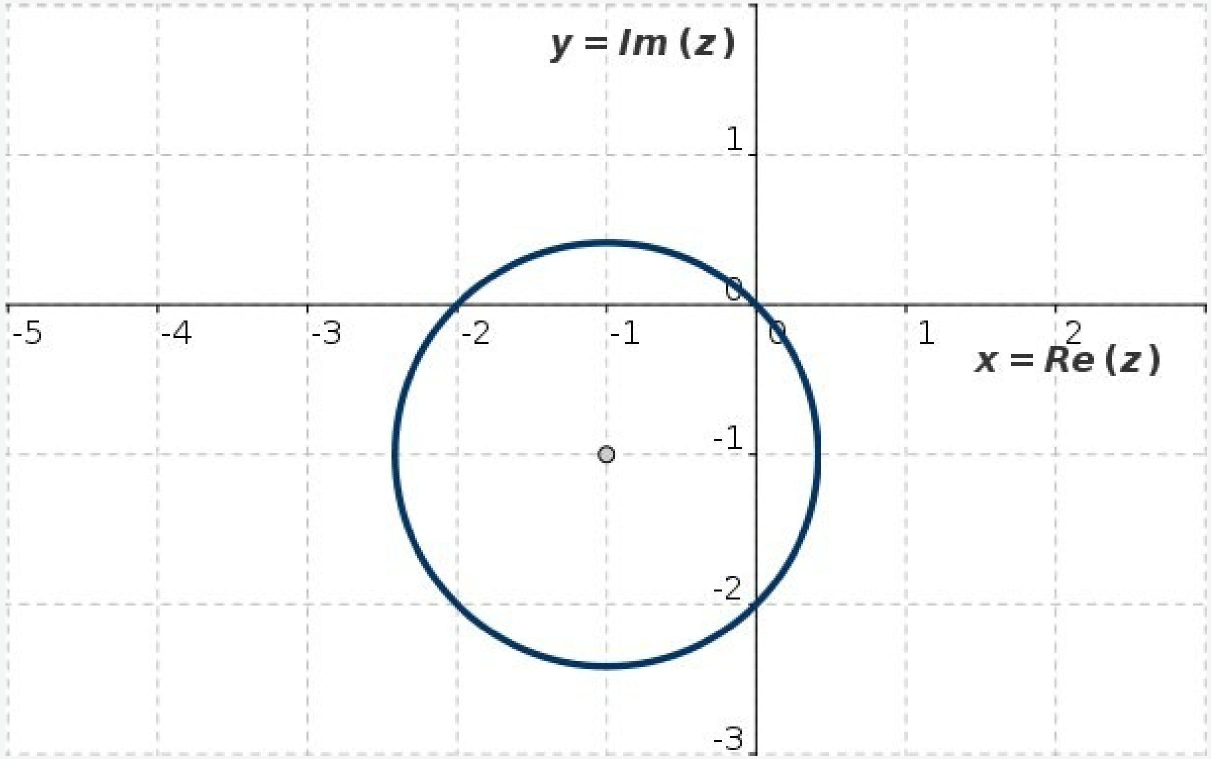

Abb. L9: Der Kreis mit dem Radius √2 und dem Mittelpunkt (-1, -1)

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z z^*, \quad 2x = z + z^*, \quad 2y = i(z^* - z)$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0, \qquad z z^* + z + z^* + i(z^* - z) = 0$$

$$z z^* + (1 - i) z + (1 + i) z^* = 0$$

$$z\,z^{*} + i\,(z - z^{*}) - 2 = 0$$

$$z\,z^{*} = x^{2} + y^{2}, \qquad i\,(z - z^{*}) = -2\,y$$

$$z\,z^{*} + i\,(z - z^{*}) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^{2} + y^{2} - 2\,y - 2 = 0$$

$$\boxed{x^{2} + (y - 1)^{2} = 3}$$

Die komplexe Gleichung entspricht dem Kreis mit dem Radius $\sqrt{3}$ und dem Mittelpunkt $(0,\ 1)$.

$$a)\quad y = x, \qquad \frac{i}{2}\,(z^* - z) = \frac{1}{2}\,(z + z^*)$$

$$z + z^* + i\,(z - z^*) = 0$$

$$b)\quad y = a\,x + b, \qquad \frac{i}{2}\,(z^* - z) = \frac{a}{2}\,(z + z^*) + b$$

$$a\,(z + z^*) + 2\,b + i\,(z - z^*) = 0$$

$$c)\quad x^2 - y^2 = a^2, \qquad x = \frac{1}{2}\,(z + z^*), \qquad y = \frac{i}{2}\,(z^* - z)$$

$$\frac{1}{4}\,(z + z^*)^2 - \frac{i^2}{4}\,(z^* - z)^2 = a^2$$

$$(z + z^*)^2 + (z^* - z)^2 = 4\,a^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + (z^*)^2 = 2\,a^2$$

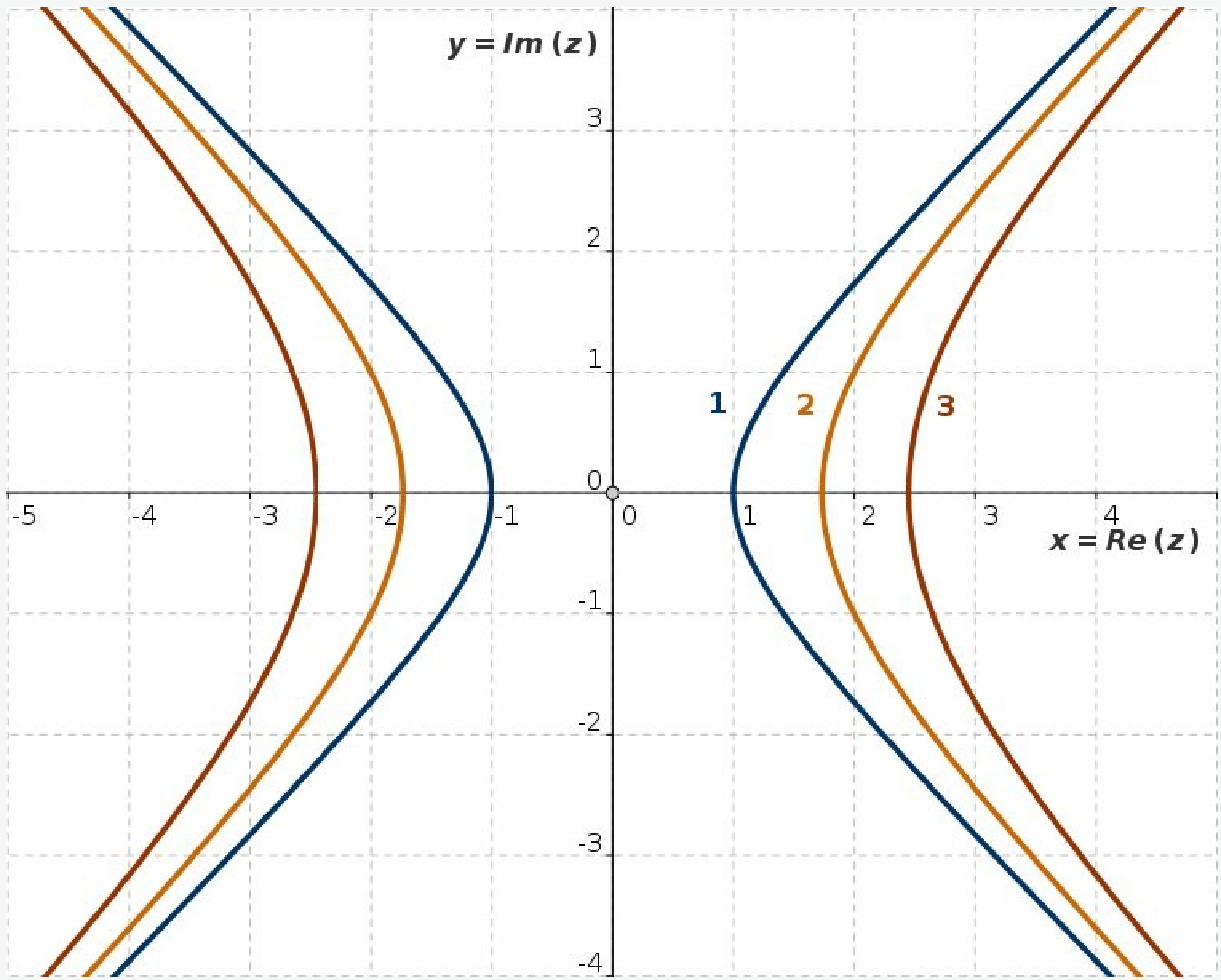

Abb. L11: Graphische Darstellung der Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$: 1) $a^2 = 1$, 2) $a^2 = 3$, 3) $a^2 = 6$