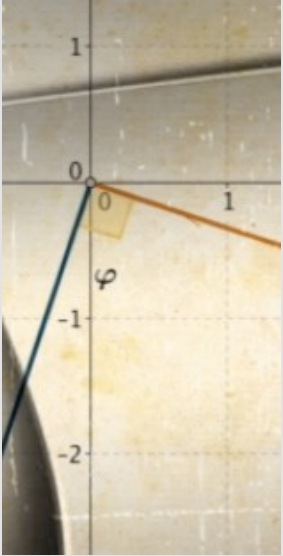


Komplexe Rechnung: Multiplikation

Multiplikation



$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = \\&= x_1 x_2 + i (x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2 = \\&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)\end{aligned}$$

Definition:

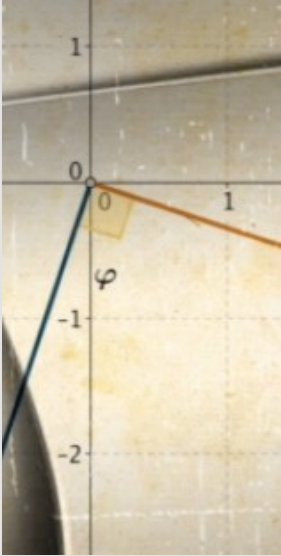
Unter dem Produkt zweier komplexer Zahlen

$$z_1 = x_1 + i y_1, \quad z_2 = x_2 + i y_2$$

wird die komplexe Zahl

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

verstanden.



Aufgabe 1:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke

a) $(1 + 5i) \cdot (1 - 2i)$

b) $(-3 + 6i) \cdot \left(1 - \frac{i}{3}\right)$

c) $(4 + 12i) \cdot \left(-3 + \frac{i}{2}\right)$

d) $(2 + 4i) \cdot \left(\frac{1}{2} - i\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + 3i\right)$

e) $(3 + 2i) \cdot (-1 + 3i) \cdot (4 - i)$

f) $(1 - 2i) \cdot (1 + 3i) \cdot (-2 + i) \cdot (-3 + 2i)$

g) $(1 - 2i^2 + i) \cdot (1 + 3i - i^3)$

Multiplikation: Lösung 1

$$a) (1 + 5i) \cdot (1 - 2i) = 11 + 3i$$

$$b) (-3 + 6i) \cdot \left(1 - \frac{i}{3}\right) = -1 + 7i$$

$$c) (4 + 12i) \cdot \left(-3 + \frac{i}{2}\right) = -18 - 34i$$

$$d) (2 + 4i) \cdot \left(\frac{1}{2} - i\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + 3i\right) = \frac{15}{2} + 15i$$

$$e) (3 + 2i) \cdot (-1 + 3i) \cdot (4 - i) = -29 + 37i$$

$$f) (1 - 2i) \cdot (1 + 3i) \cdot (-2 + i) \cdot (-3 + 2i) = 35 - 45i$$

$$g) (1 - 2i^2 + i) \cdot (1 + 3i - i^3) = -1 + 13i$$

Multiplikation: Aufgaben 2, 3



Aufgabe 2a: Berechnen Sie das Produkt $z \cdot z^*$.

Aufgabe 2b: Berechnen Sie folgende Produkte für reelle a und b :

$$1) (a + ib)(a - ib), \quad 2) (\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b})$$

$a, b \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$a) \quad z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 3 - 2i, \quad z_3 = 4 - 3i$$

$$b) \quad z_1 = 5 + i, \quad z_2 = -2 + 4i, \quad z_3 = 2i$$

die folgenden Terme

$$z_1 \cdot z_2, \quad 3 z_1 \cdot z_2^*, \quad 2 z_1^* \cdot z_2, \quad z_1^2, \quad z_1^* \cdot z_2 \cdot z_3^*$$

$$z_2^2, \quad z_1 \cdot z_3^* + z_1^* \cdot z_3, \quad (z_2 \cdot z_3)^*, \quad z_1 \cdot z_2^* + z_3^*$$

Lösung 2a:

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\sqrt{z \cdot z^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lösung 2b:

$$1) (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$2) (\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b}) = a + b$$

Vergleich mit den reellen Zahlen:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Lösung 3a:

$$z_1 \cdot z_2 = 7 + 4i, \quad 3 z_1 \cdot z_2^* = -3 + 24i, \quad 2 z_1^* \cdot z_2 = -2 - 16i$$

$$z_1^2 = -3 + 4i, \quad z_1^* \cdot z_2 \cdot z_3^* = 20 - 35i, \quad z_2^2 = 5 - 12i$$

$$z_1 \cdot z_3^* + z_1^* \cdot z_3 = -4, \quad (z_2 \cdot z_3)^* = 6 + 17i, \quad z_1 \cdot z_2^* + z_3^* = 3 + 11i$$

Lösung 3b:

$$z_1 \cdot z_2 = -14 + 18i, \quad 3 z_1 \cdot z_2^* = -18 - 66i, \quad 2 z_1^* \cdot z_2 = -12 + 44i$$

$$z_1^2 = 24 + 10i, \quad z_1^* \cdot z_2 \cdot z_3^* = 44 + 12i, \quad z_2^2 = -12 - 16i$$

$$z_1 \cdot z_3^* + z_1^* \cdot z_3 = 4, \quad (z_2 \cdot z_3)^* = -8 + 4i, \quad z_1 \cdot z_2^* + z_3^* = -6 - 24i$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$a) (1 + 2i)^2, \quad (2 + 4i)^2$$

$$b) (1 - 3i)^2, \quad (3 - 9i)^2$$

$$c) (2 + i)^3, \quad (4 + 2i)^3$$

$$d) (1 - 2i)^2 \cdot (1 + 2i)^2, \quad (1 - 2i)^2 \cdot (1 + 2i)^3$$

$$e) (1 + 3i)^2 \cdot (1 - 3i)^2, \quad (1 + 3i)^2 \cdot (1 - 3i)^3$$

$$f) (1 - i)^2 \cdot (1 + 3i)^2, \quad (2 - 2i)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}\right)^2$$

$$g) (1 + 5i)^2 \cdot (1 + i)^3, \quad (1 + 5i)^3 \cdot (1 + i)^3$$

$$h) (8 + 4i)^2 \cdot \left(1 - \frac{i}{2}\right)^2, \quad (8 + 4i)^2 \cdot \left(1 - \frac{i}{2}\right)^3$$

Multiplikation: Lösung 4 a-e)

$$a) (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 2i + (2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$$

$$(2 + 4i)^2 = 2^2 (1 + 2i)^2 = 4(-3 + 4i) = -12 + 16i$$

$$b) (1 - 3i)^2 = -8 - 6i = -2(4 + 3i)$$

$$(3 - 9i)^2 = -72 - 54i = -18(4 + 3i)$$

$$c) (2 + i)^3 = 2 + 11i$$

$$(4 + 2i)^3 = 2^3 (2 + i)^3 = 8(2 + 11i) = 16 + 88i$$

$$d) (1 - 2i)^2 \cdot (1 + 2i)^2 = ((1 - 2i) \cdot (1 + 2i))^2 = 5^2 = 25$$

$$(1 - 2i)^2 \cdot (1 + 2i)^3 = (1 - 2i)^2 \cdot (1 + 2i)^2 \cdot (1 + 2i) = \\ = 25(1 + 2i) = 25 + 50i$$

$$e) (1 + 3i)^2 \cdot (1 - 3i)^2 = ((1 + 3i) \cdot (1 - 3i))^2 = 10^2 = 100$$

$$(1 + 3i)^2 \cdot (1 - 3i)^3 = (1 + 3i)^2 \cdot (1 - 3i)^2 \cdot (1 - 3i) = \\ = 100(1 - 3i) = 100 - 300i$$

$$f) (1 - i)^2 \cdot (1 + 3i)^2 = 12 + 16i = 4(3 + 4i)$$

$$\begin{aligned} (2 - 2i)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}\right)^2 &= 2^2 (1 - i)^2 \cdot \frac{(1 + 3i)^2}{2^2} = (1 - i)^2 \\ &= (1 - i)^2 \cdot (1 + 3i)^2 = 4(3 + 4i) \end{aligned}$$

$$g) (1 + 5i)^2 \cdot (1 + i)^3 = 28 - 68i = 4(7 - 17i)$$

$$\begin{aligned} (1 + 5i)^3 \cdot (1 + i)^3 &= 4(7 - 17i) \cdot (1 + 5i) = \\ &= 368 + 72i = 8(46 + 9i) \end{aligned}$$

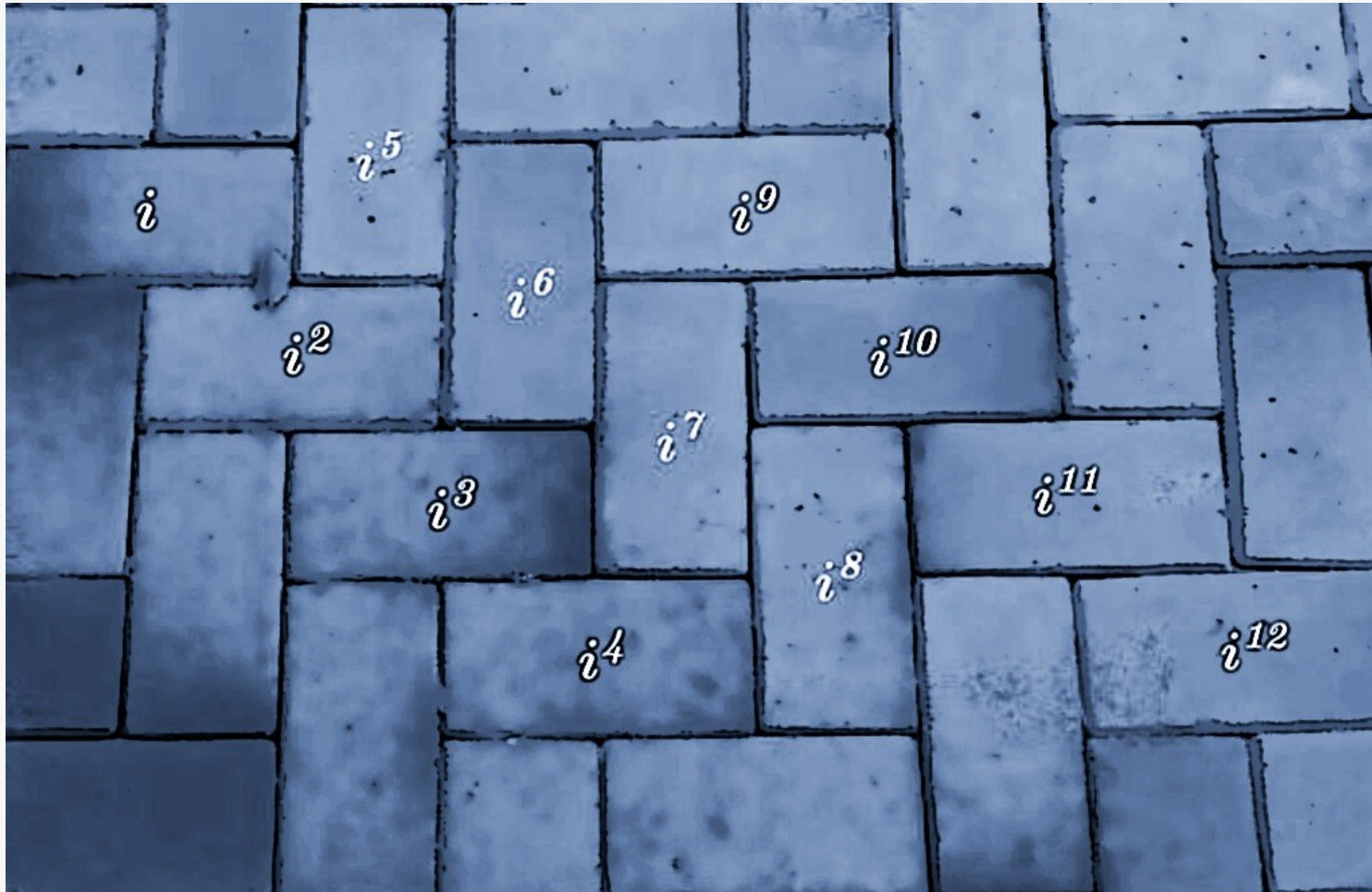
$$h) (8 + 4i)^2 \cdot \left(1 - \frac{i}{2}\right)^2 = 4^2 (2 + i)^2 \cdot \frac{(2 - i)^2}{2^2} =$$

$$= 4(2 + i)^2 \cdot (2 - i)^2 = 100$$

$$(8 + 4i)^2 \cdot \left(1 - \frac{i}{2}\right)^3 = (8 + 4i)^2 \cdot \left(1 - \frac{i}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{i}{2}\right) =$$

$$= 100 \left(1 - \frac{i}{2}\right) = 100 - 50i$$

Multiplikation: Aufgabe 5



Aufgabe 5: Berechnen Sie die ersten 12 Potenzen von i .

Multiplikation: Lösung 5

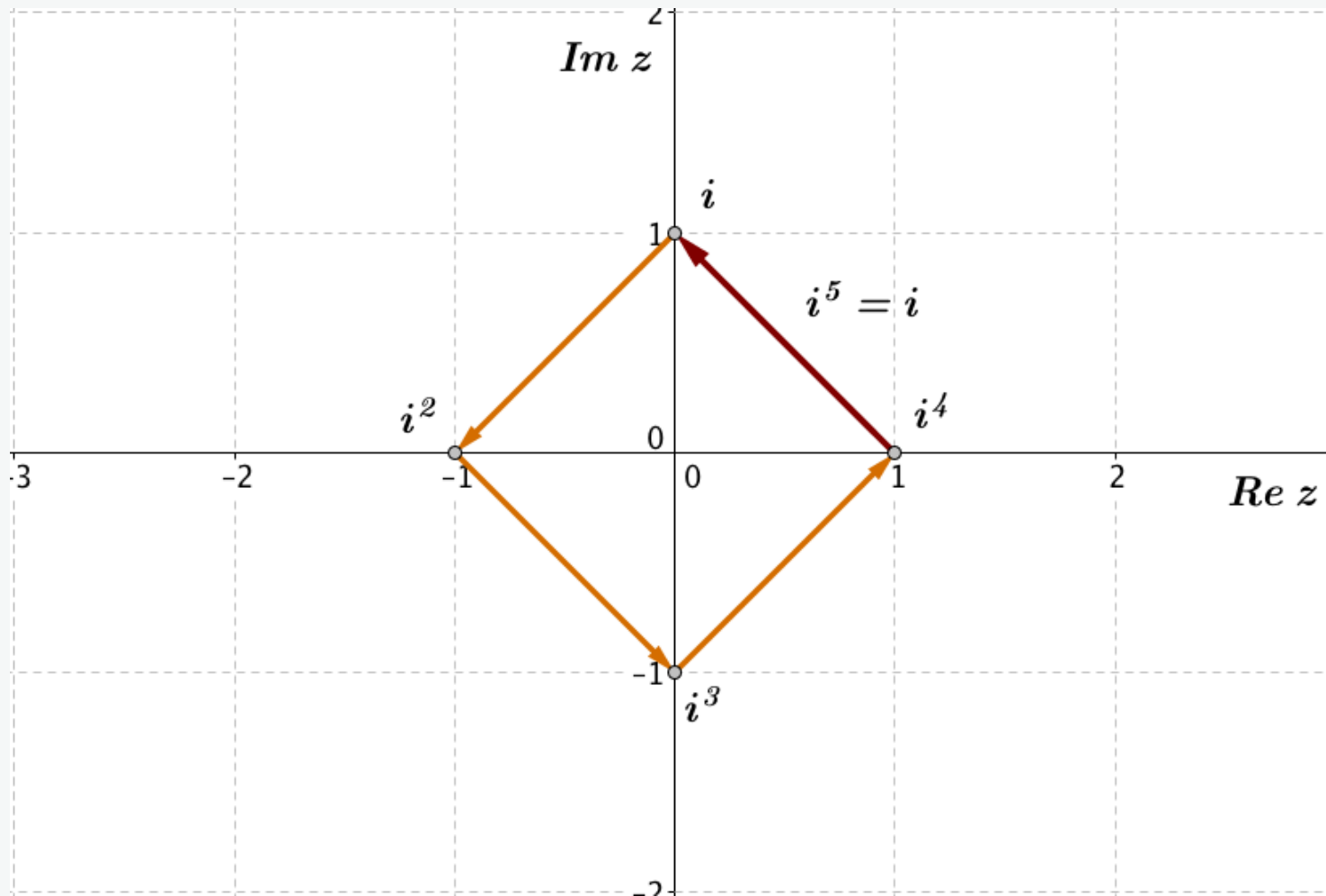


Abb. 5: Erste fünf Potenzen von i

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \dots$$

$$i^{1+4n} = i, \quad i^{2+4n} = -1, \quad i^{3+4n} = -i, \quad i^{4+4n} = 1$$

Aufgabe 6: Beweisen Sie folgende Eigenschaft der komplexen Zahlen

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

Aufgabe 7: Geben Sie eine geometrische Interpretation der Multiplikation einer komplexen Zahl mit i .

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1^* \cdot z_2^* = (x_1 - i y_1) \cdot (x_2 - i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

Multiplikation mit i : Lösung 7

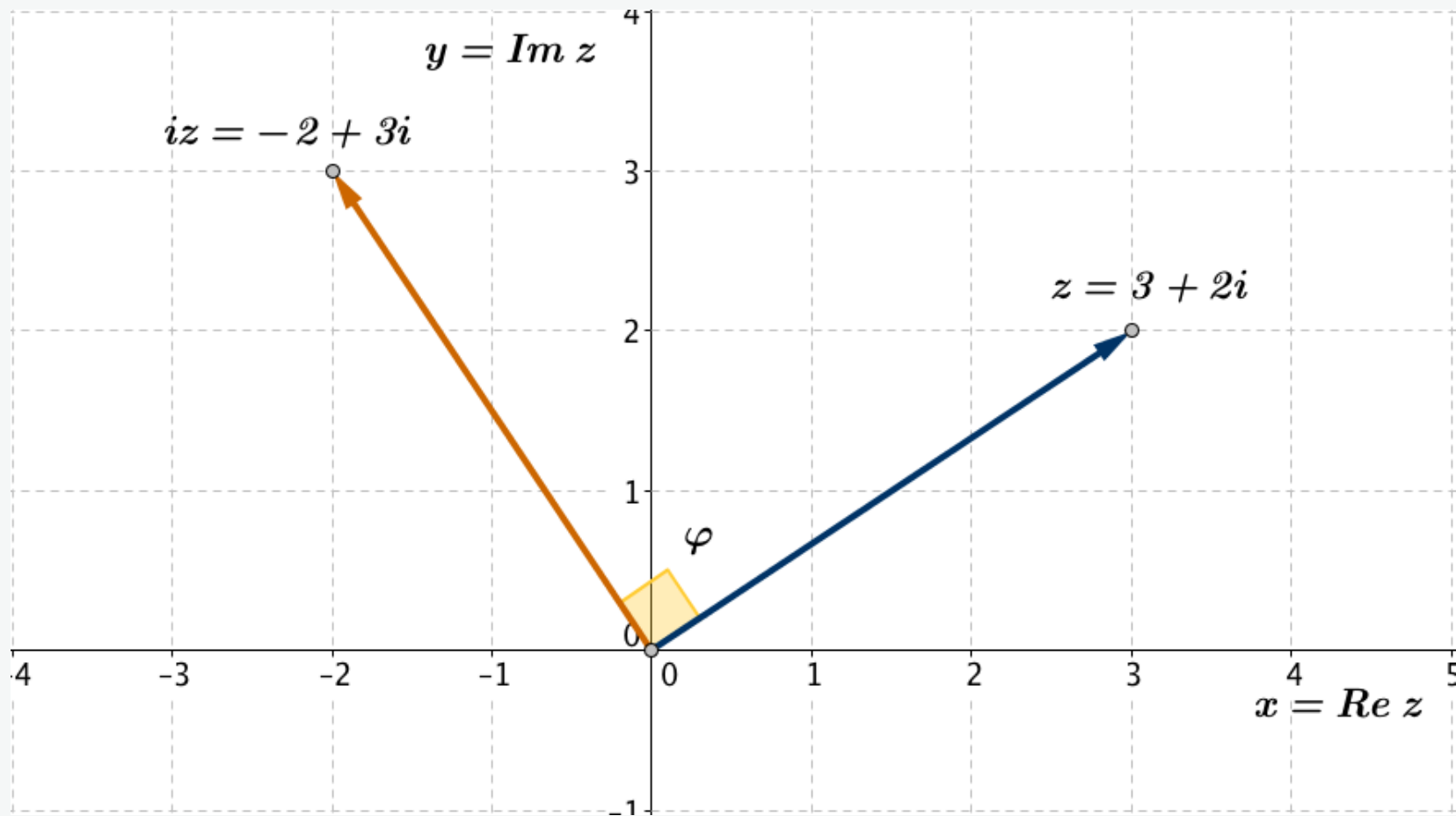


Abb. 7-1: Komplexe Zahlen $z = 3 + 2i$ und $iz = -2 + 3i$. Der Winkel zwischen beiden Zeigern ist $\pi/2$

Multiplikation mit i : Lösung 7

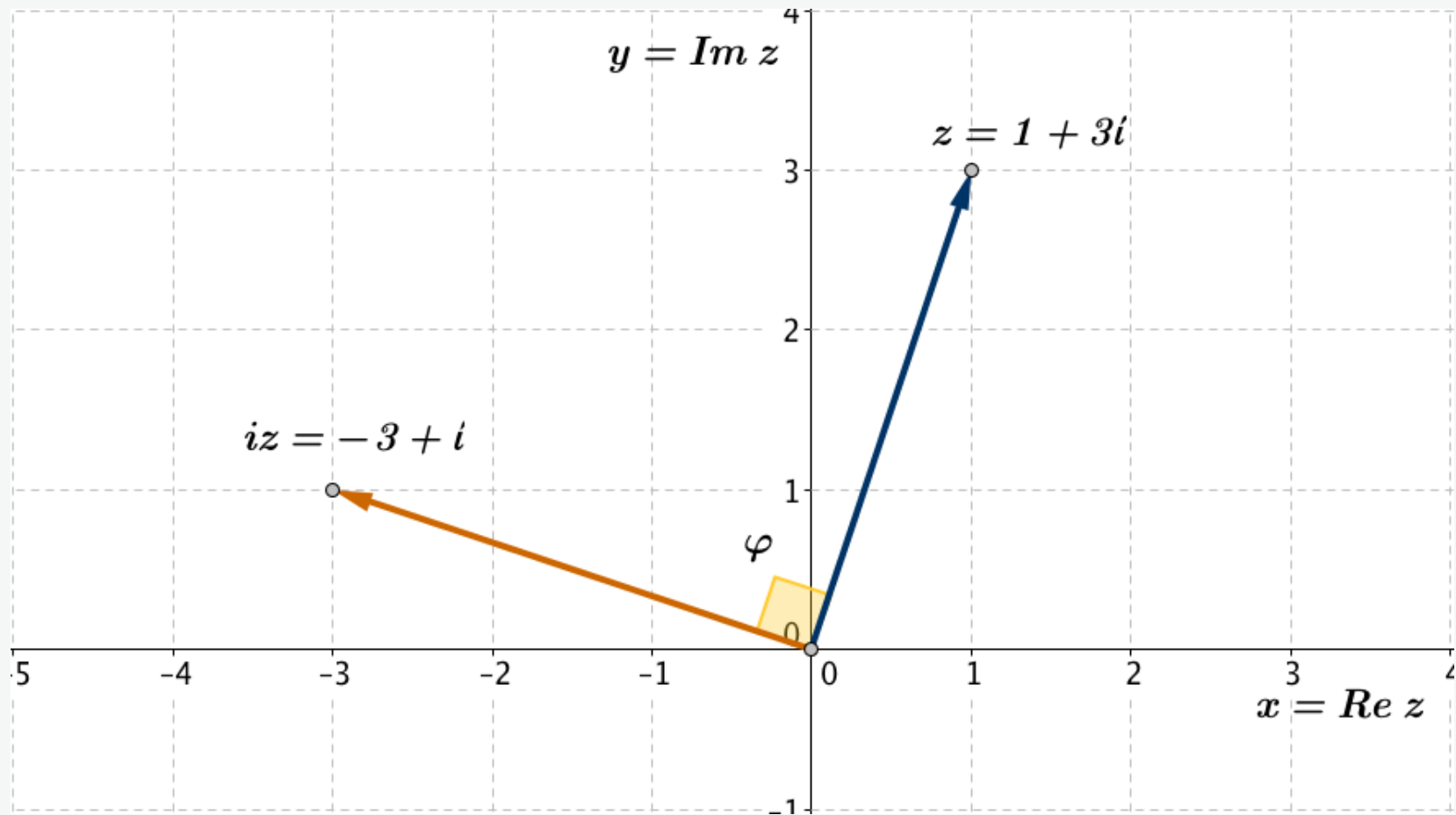


Abb. 7-2: Komplexe Zahlen $z = 1 + 3i$ und $iz = -3 + i$. Der Winkel zwischen beiden Zeigern ist $\pi/2$

Multiplikation mit i : Lösung 7

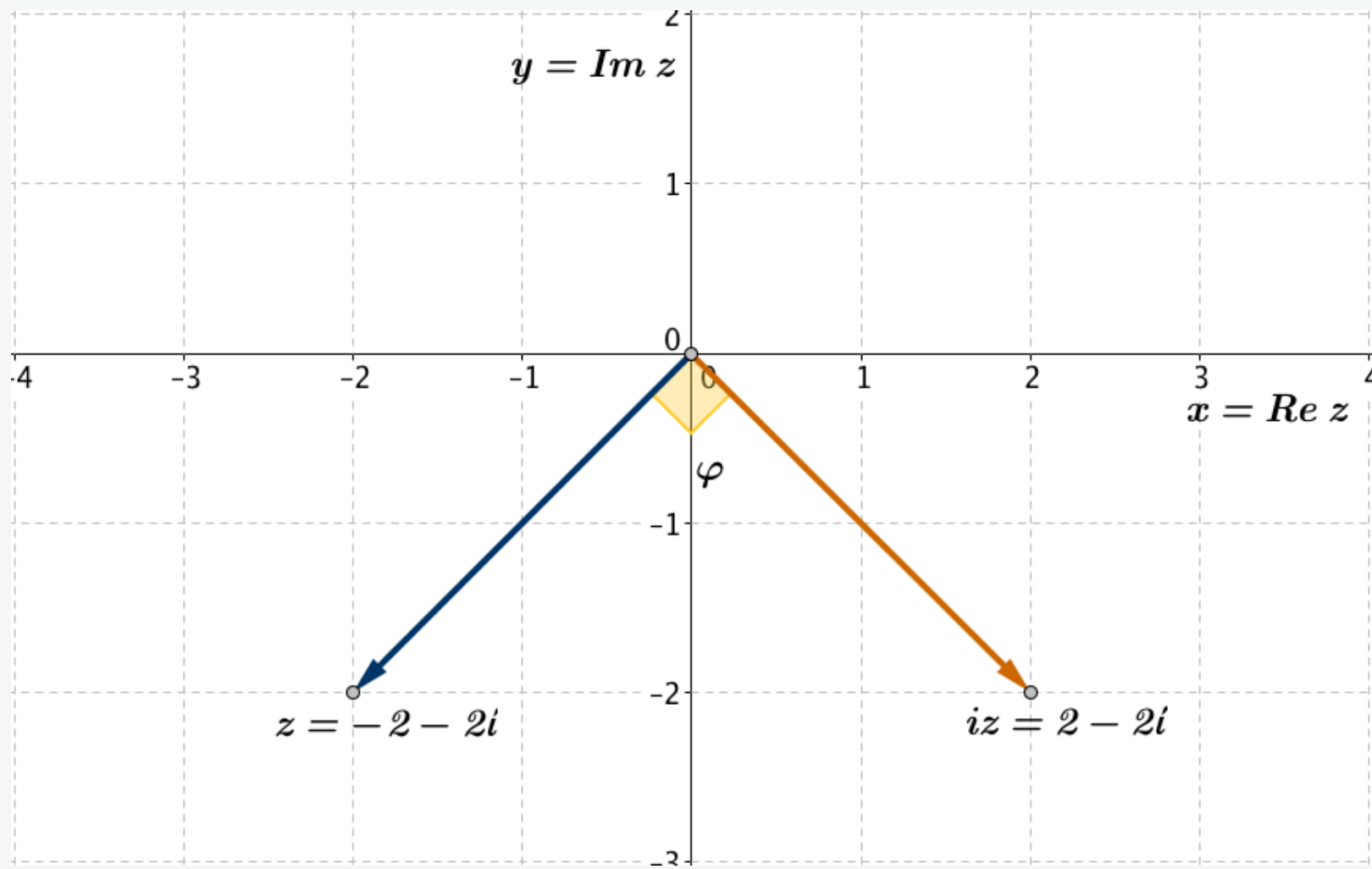


Abb. 7-3: Komplexe Zahlen $z = -2 - 2i$ und $iz = 2 - 2i$. Der Winkel zwischen beiden Zeigern ist $\pi/2$

Multiplikation mit i : Lösung 7

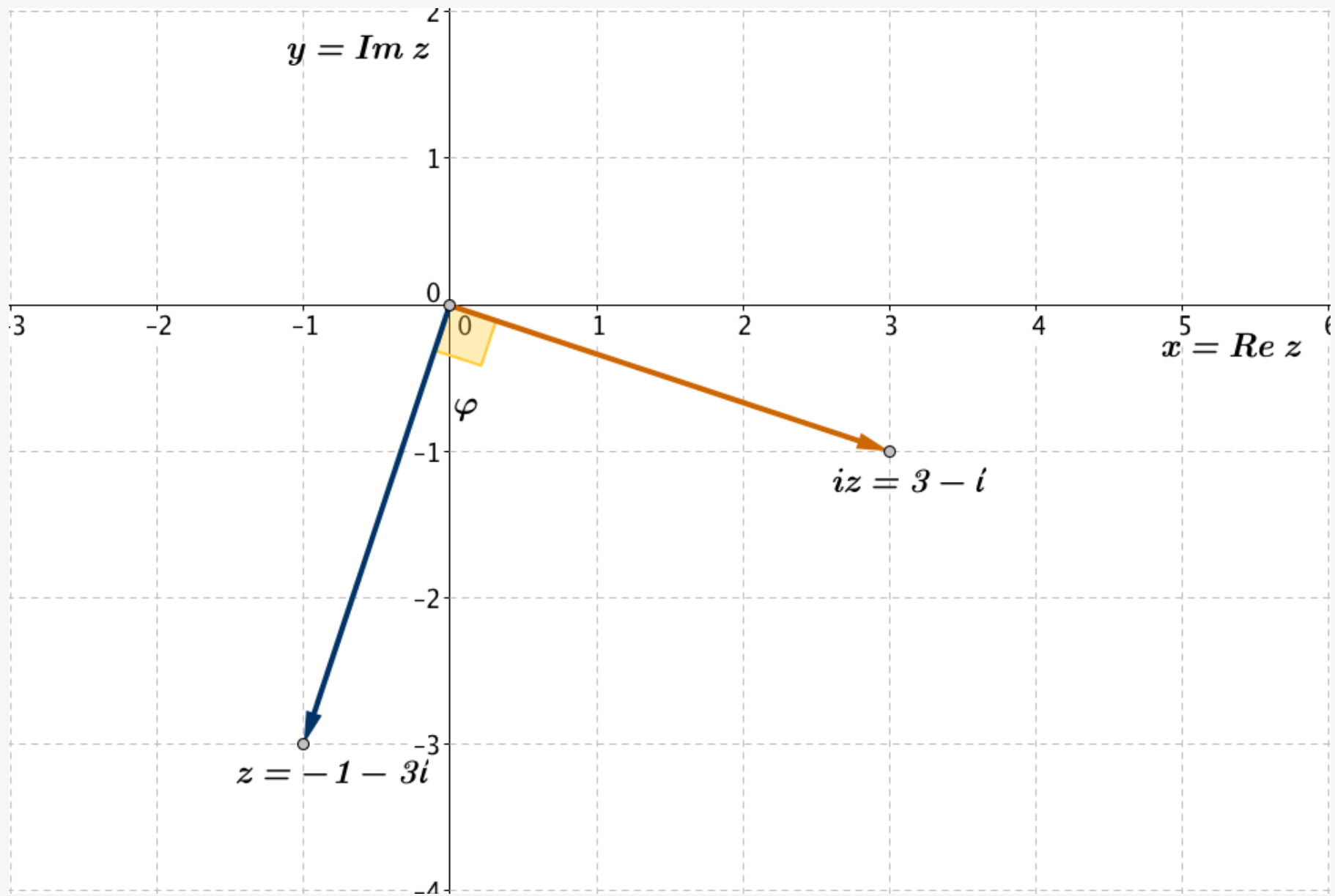
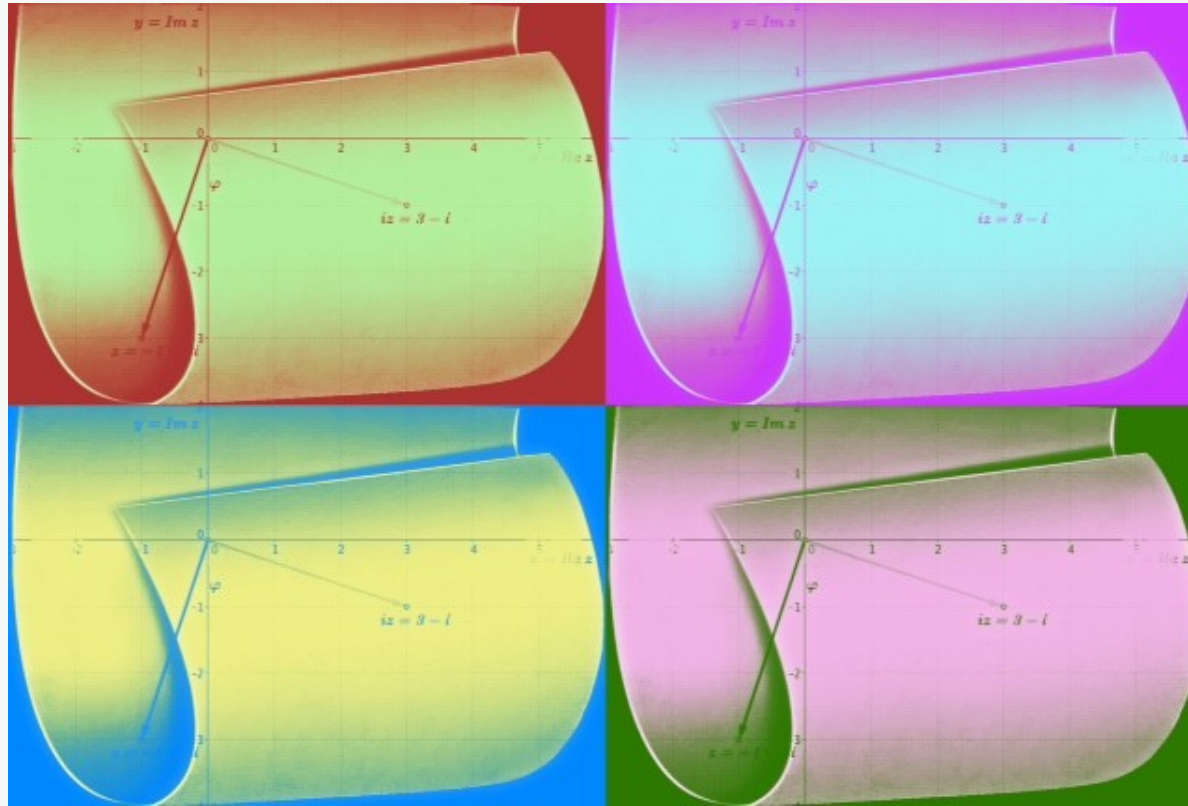


Abb. 7-4: Komplexe Zahlen $z = -1 - 3i$ und $iz = 3 - i$. Der Winkel zwischen beiden Zeigern ist $\pi/2$

Multiplikation mit i : Lösung 7



Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit i bedeutet geometrisch eine Drehung des Zeigers von z um den Winkel $\pi/2$ um den Koordinatenursprung und zwar gegen den Uhrzeigersinn. Die Zeiger von z und iz bilden also den Winkel $\pi/2$.