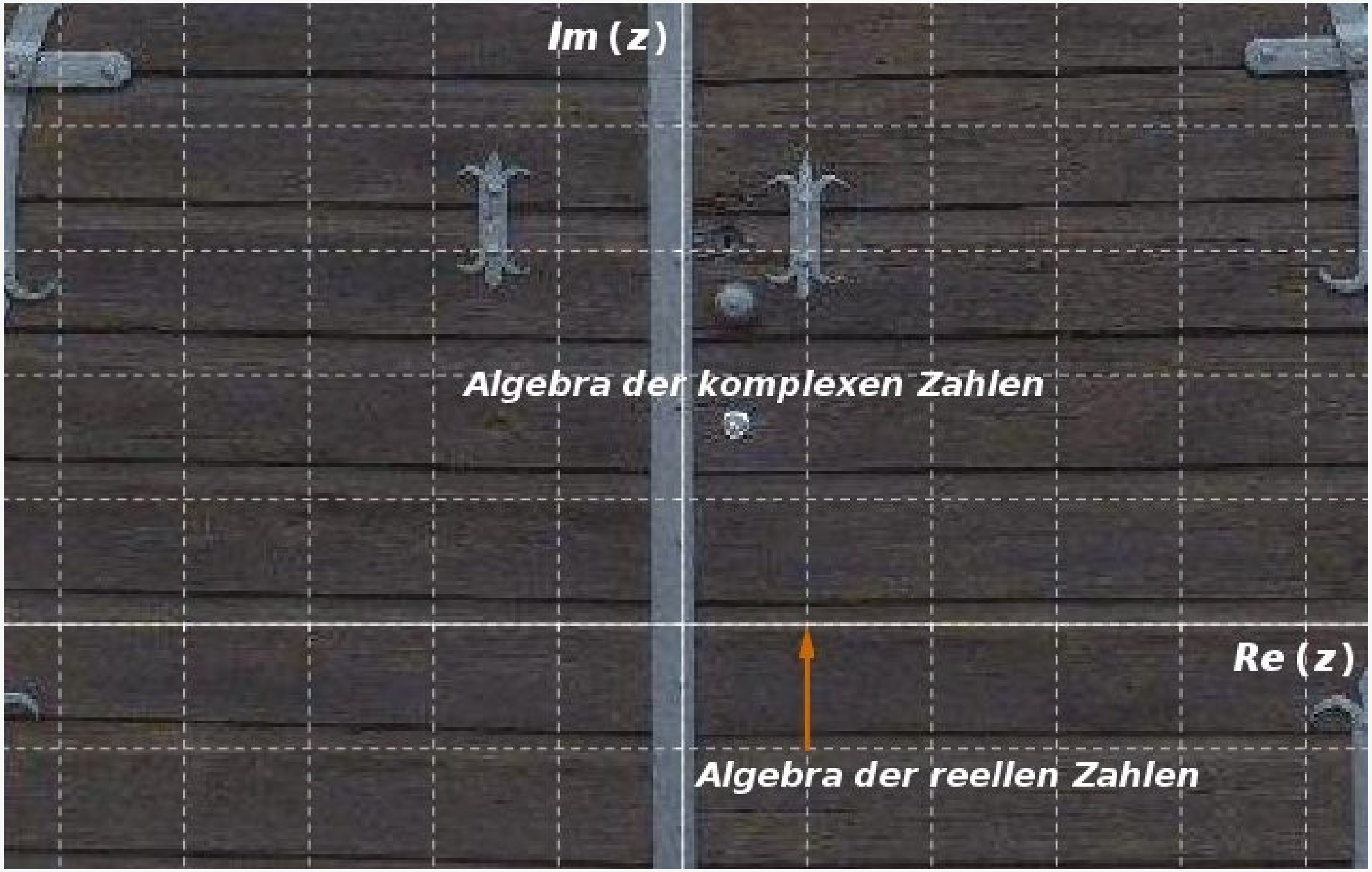
Komplexe Rechnung: Addition, Subtraktion



Die Menge der reellen Zahlen ist eine Teilmenge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Deswegen müssen die Rechenoperationen so definiert werden, dass die Rechenregeln für komplexe Zahlen im Reellen mit den bekannten Rechenregeln für reelle Zahlen übereinstimmen (Permanenzprinzip).

Vier Rechenoperationen sind auf der Menge der komplexen Zahlen bekannt:

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division

Reelle und komplexe Zahlen genügen den gleichen Grundgesetzen.

Ausnahme: Ordnungsrelation

Für komplexe Zahlen haben folgende Ungleichungen keinen Sinn:

$$z_1 < z_2$$

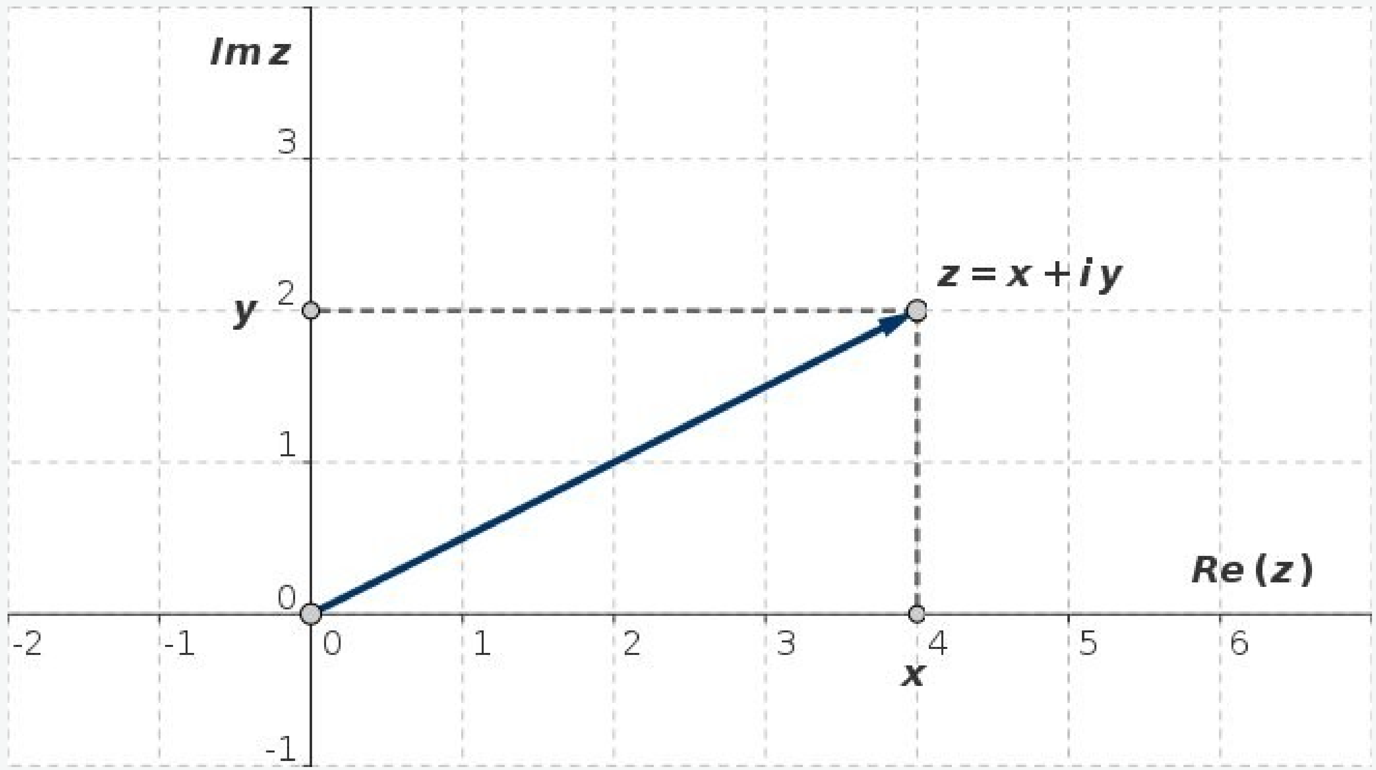


Abb. 1: Vektorielle Darstellung einer komplexen Zahl in der Gaußsche Zahlenebene

Um Addition / Subtraktion der komplexen Zahlen zu bestimmen, ist die vektorielle Darstellung einer komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene sehr wichtig.

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i , \qquad 1 = (1,\ 0) \qquad i = (0,\ 1)$$

$$| z | = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die Summen- bzw. Differenzbildung erfolgt bei komplexen Zahlen komponentenweise, d.h. nach den gleichen Regeln wie bei *2*-dimensionalen Vektoren:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$$

Beispiel:

$$z_1 = 2 + 3\,i\,, \qquad z_2 = 3 - i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 3) + i\,(3 - 1) = 5 + 2\,i$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 3) + i\,(3 + 1) = -1 + 4\,i$$

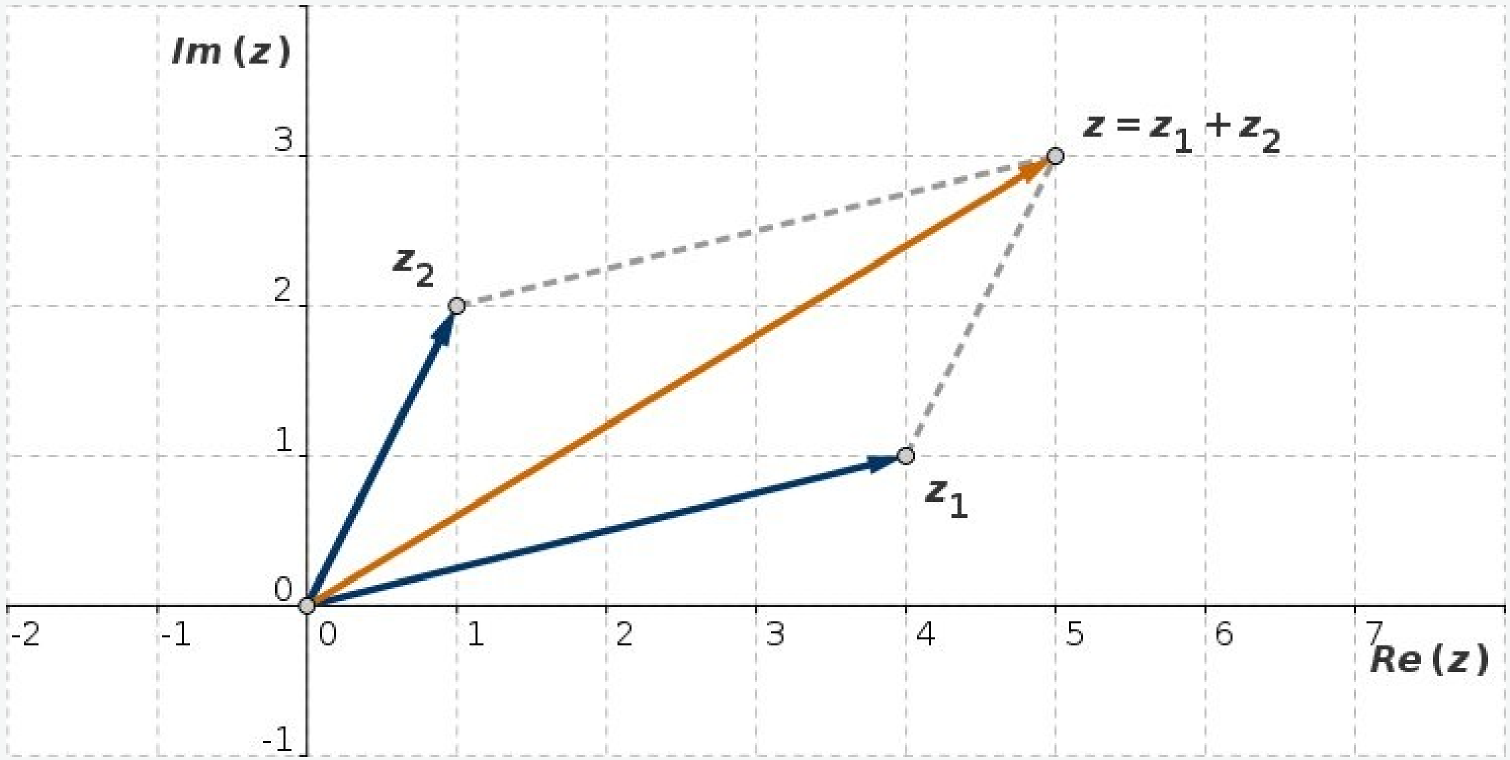


Abb. 2: Zur geometrischen Addition zweier komplexer Zahlen (Parallelogrammregel)

$$z_1 = 4 + i\,, \qquad z_2 = 1 + 2\,i$$

$$z_1 + z_2 = (4 + 1) + i\,(1 + 2) = 5 + 3\,i$$

Addition und Subtraktion lassen sich nur in der kartesischen Form einfach durchführen.

Aufgabe 1:

a) $(1 + 5\,i) + (2 - 3\,i)$

b) $(12 - 2\,i) + (7 - i)$

c) $(21 + 3\,i) + (2 - i) + (-11 + 3\,i)$

d) $(31 - 1.5\,i) - (21 - 3.5\,i)$

e) $(12.4 + 1.7\,i) - (9.53 + 4.89\,i)$

f) $(19 + 2.7\,i) + 3\,(1 - i) - (30 + 8\,i)$

g) $(a + b\,i) - (b + 2\,c\,i) + (-3\,a + 2\,b\,i)$

h) $\left(5\,\alpha - \frac{2\,\beta}{3}\,i\right) - 6\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3}\,i\right) - \left(3\,\alpha + \frac{\beta}{3}\,i\right)$

$a)\quad (1+5i)+(2-3i)=3+2i$

$b)\quad (12-2i)+(7-i)=19-3i$

$c)\quad (21+3i)+(2-i)+(-11+3i)=12+5i$

$d)\quad (31-1.5i)-(21-3.5i)=10+2i$

$e)\quad (12.4+1.7i)-(9.53+4.89i)=2.87-3.19i$

$f)\quad (19+2.7i)+3(1-i)-(30+8i)=-8-8.3i$

$g)\quad (a+bi)-(b+2ci)+(-3a+2bi)=-2a-b+(3b-2c)i$

$$h)\quad \left(5\alpha-\frac{2\beta}{3}\,i\right)-6\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3}\,i\right)-\left(3\alpha+\frac{\beta}{3}\,i\right)=$$

$$=2\alpha-3\beta-(\beta+2\gamma)\,i$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie mit der komplexen Zahl $z = x + i\,y$ die folgenden Terme:

$$\frac{1}{2}\left(z + z^*\right), \qquad \frac{1}{2\,i}\left(z - z^*\right)$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1 + 3\,z_2 + 2\,z_3^*$$

mit den komplexen Zahlen

$$a)\quad z_1 = 2 + 3\,i, \quad z_2 = 4 - 2\,i, \quad z_3 = 1 + i$$

$$b)\quad z_1 = 5 + 7\,i, \quad z_2 = -3 - i, \quad z_3 = 2.5 - 0.5\,i$$

$$c)\quad z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,i, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,i, \quad z_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,i$$

Lösung 2: $\frac{1}{2}\left(z + z^{*}\right) = x = \mathrm{Re}\,(z)\,, \qquad \frac{1}{2\,i}\left(z - z^{*}\right) = y = \mathrm{Im}\,(z)$

Lösung 3:

$a)\quad z_1 = 2 + 3\,i\,, \quad z_2 = 4 - 2\,i\,, \quad z_3 = 1 + i$

$$z_1 + z_2 = 6 + i\,, \quad z_1 - z_2 = -2 + 5\,i\,, \quad z_1 + 3\,z_2 + 2\,z_3^{*} = 16 - 5\,i$$

$b)\quad z_1 = 5 + 7\,i\,, \quad z_2 = -3 - i\,, \quad z_3 = 2.5 - 0.5\,i$

$$z_1 + z_2 = 2 + 6\,i\,, \quad z_1 - z_2 = 8\,(1 + i)\,, \quad z_1 + 3\,z_2 + 2\,z_3^{*} = 1 + 5\,i$$

$c)\quad z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,i\,, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,i\,, \quad z_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,i$

$$z_1 + z_2 = \frac{5}{6}\,(1 - i)\,, \quad z_1 - z_2 = \frac{1}{6}\,(-1 + 13\,i)$$

$$z_1 + 3\,z_2 + 2\,z_3^{*} = \frac{10}{3}\,(1 - i)$$

Addition, Subtraktion: Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$\frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{3}, \qquad z_1 - z_2 - (z_2^* - z_1^*), \qquad \frac{z_1}{2} - z_3^* + 2\,(z_2 - z_2^*)$$

$$\frac{i}{2}\,(z_1 - z_1^*) - i\,(z_3 - z_3^*) + \frac{i^3}{2}\,(z_2 - z_2^*)$$

$$\frac{i}{2}\,(z_1 + z_1^*) + \frac{i^3}{2}\,(z_3 + z_3^*) + \frac{i^5}{3}\,(z_2 + z_2^*)$$

$$i\,(z_1 + z_1^*) + i^2\,(z_2 - z_2^*) + i^6\,(z_3 - z_3^*)$$

mit den komplexen Zahlen

$a)$ $\quad z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 3 - i, \quad z_3 = 2 + \frac{2}{3}i$

$b)$ $\quad z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 3 + i, \quad z_3 = 4 - i$

$c)$ $\quad z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}, \quad z_3 = \sqrt{6} - i\sqrt{3}$

Addition, Subtraktion: Lösung 4a

$$\frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\, i$$

$$z_1 - z_2 - (z_2^* - z_1^*) = -4$$

$$\frac{z_1}{2} - z_3^* + 2\,(z_2 - z_2^*) = -\frac{3}{2} - \frac{7}{3}\, i$$

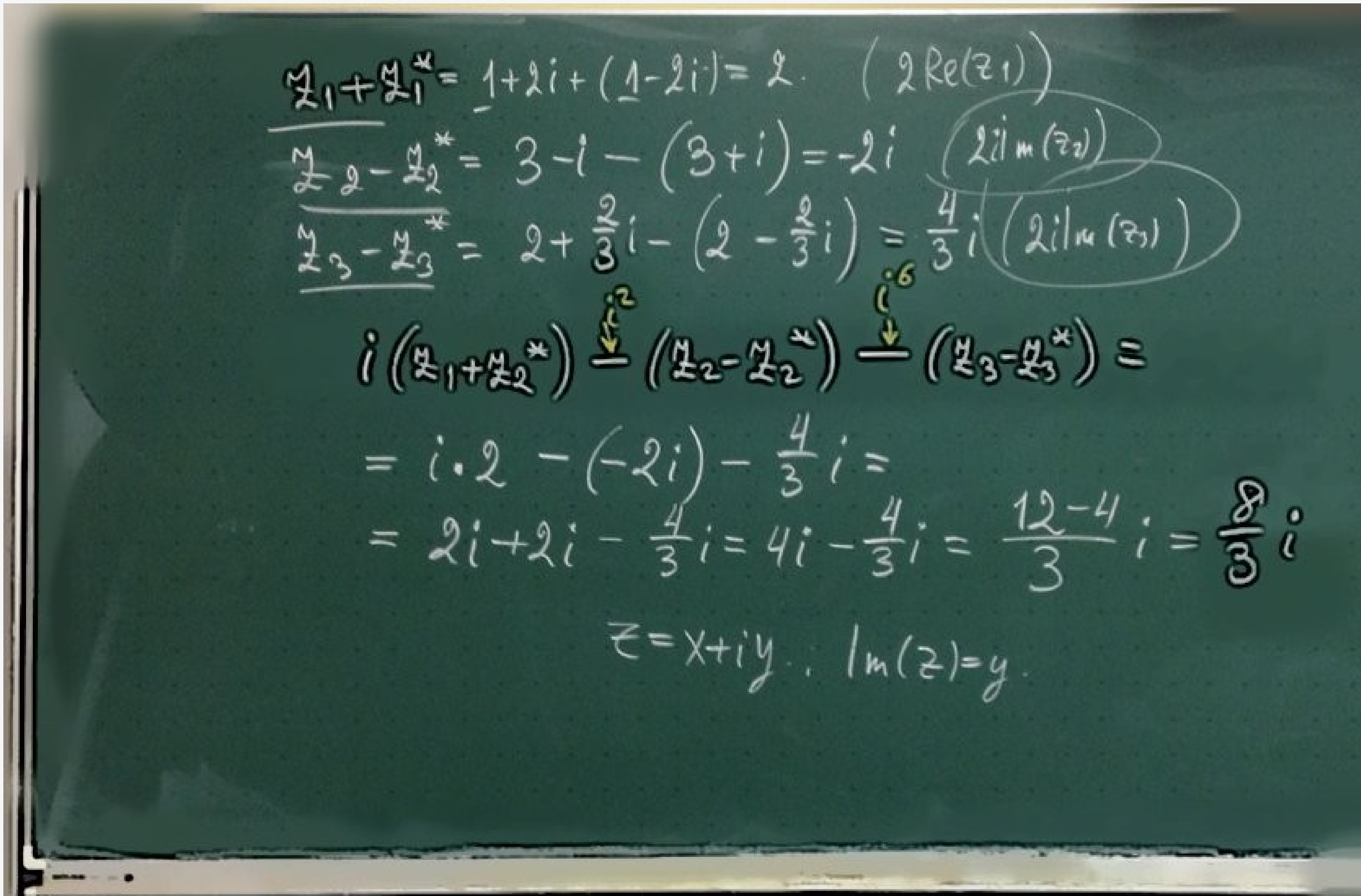
$$\frac{i}{2}\,(z_1 - z_1^*) - i\,(z_3 - z_3^*) + \frac{i^3}{2}\,(z_2 - z_2^*) = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{i}{2}\,(z_1 + z_1^*) + \frac{i^3}{2}\,(z_3 + z_3^*) + \frac{i^5}{3}\,(z_2 + z_2^*) = i$$

$$i\,(z_1 + z_1^*) + i^2\,(z_2 - z_2^*) + i^6\,(z_3 - z_3^*) = \frac{8}{3}\, i$$

Ausführliche Lösung dieser Aufgabe ist auf der nächsten Seite.

$$i\,(z_1 + z_1^*) + i^2\,(z_2 - z_2^*) + i^6\,(z_3 - z_3^*) = \frac{8}{3}\,i$$



Addition, Subtraktion: Lösung 4b

$$\frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{6}$$

$$z_1 - z_2 - (z_2^* - z_1^*) = -4$$

$$\frac{z_1}{2} - z_3^* + 2\,(z_2 - z_2^*) = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}\,i$$

$$\frac{i}{2}\,(z_1 - z_1^*) - i\,(z_3 - z_3^*) + \frac{i^3}{2}\,(z_2 - z_2^*) = -2$$

$$\frac{i}{2}\,(z_1 + z_1^*) + \frac{i^3}{2}\,(z_3 + z_3^*) + \frac{i^5}{3}\,(z_2 + z_2^*) = -i$$

$$i\,(z_1 + z_1^*) + i^2\,(z_2 - z_2^*) + i^6\,(z_3 - z_3^*) = 2\,i$$

$$\frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$z_1 - z_2 - (z_2^* - z_1^*) = 2\,(\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$\frac{z_1}{2} - z_3^* + 2\,(z_2 - z_2^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{6} + i\left(4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{i}{2}\,(z_1 - z_1^*) - i\,(z_3 - z_3^*) + \frac{i^3}{2}\,(z_2 - z_2^*) = -3\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\frac{i}{2}\,(z_1 + z_1^*) + \frac{i^3}{2}\,(z_3 + z_3^*) + \frac{i^5}{3}\,(z_2 + z_2^*) = i\left(\sqrt{2} - \sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$i\,(z_1 + z_1^*) + i^2\,(z_2 - z_2^*) + i^6\,(z_3 - z_3^*) = 2\sqrt{3}\;i$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke

$$2\,z_1 + 3\,z_2\,, \qquad 4\,z_1 - 2\,z_2^*$$

mit den komplexen Zahlen

$$a)\quad z_1 = 2 \cdot e^{i\,30^\circ}, \qquad z_2 = 4 \cdot e^{-i\,60^\circ}$$

$$b)\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$c)\quad z_1 = 5 \cdot e^{i\,90^\circ}, \qquad z_2 = 4 \cdot e^{-i\,90^\circ}$$

$$d)\quad z_1 = 6 \cdot e^{i\,60^\circ}, \qquad z_2 = -4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e)\quad z_1 = -2 \cdot e^{i\pi}, \qquad z_2 = 3 \cdot e^{0 \cdot i}$$

Die Zahlen müssen zuerst in die algebraische Form gebracht werden:

$$a)\quad z_1 = 2 \cdot e^{i\,30^\circ} = \sqrt{3} + i\,, \qquad z_2 = 4 \cdot e^{-i\,60^\circ} = 2 - 2\sqrt{3}\; i$$

$$2\, z_1 + 3\, z_2 = 2\sqrt{3} + 6 + (2 - 6\sqrt{3})\, i = 9.464 - 8.392\; i$$

$$4\, z_1 - 2\, z_2^* = 4\,(\sqrt{3} - 1) + 4\,(1 - \sqrt{3})\, i = 2.928\,(1 - i)$$

$$b)\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\;(1 + i)$$

$$z_2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\;(-1 + i)$$

$$2\, z_1 + 3\, z_2 = -10\sqrt{2} + 14\sqrt{2}\, i = 2\sqrt{2}\;(-5 + 7\, i) =$$

$$= -14.142 + 19.799\; i$$

$$4\, z_1 - 2\, z_2^* = 12\sqrt{2}\;(1 + i) = 16.971\;(1 + i)$$

c) $z_1 = 5 \cdot e^{i\,90^\circ} = 5\,i\,, \qquad z_2 = 4 \cdot e^{-i\,90^\circ} = -4\,i$

$$2\,z_1 + 3\,z_2 = -2\,i\,, \qquad 4\,z_1 - 2\,z_2^* = 12\,i$$

d) $z_1 = 6 \cdot e^{i\,60^\circ} = 3\,(1 + \sqrt{3}\;i)$

$$z_2 = -4\left(\cos\frac{2\,\pi}{3} + i\sin\frac{2\,\pi}{3}\right) = 2\,(1 - \sqrt{3}\,i)$$

$$2\,z_1 + 3\,z_2 = 12$$

$$4\,z_1 - 2\,z_2^* = 8\,(1 + \sqrt{3}\,i) = 8 + 13.856\,i$$

e) $z_1 = -2 \cdot e^{i\,\pi} = 2\,, \qquad z_2 = 3 \cdot e^{0 \cdot i} = 3$

$$2\,z_1 + 3\,z_2 = 13, \qquad 4\,z_1 - 2\,z_2^* = 2$$

Aufgabe 6:

Beweisen Sie folgende Eigenschaft der komplexen Zahlen

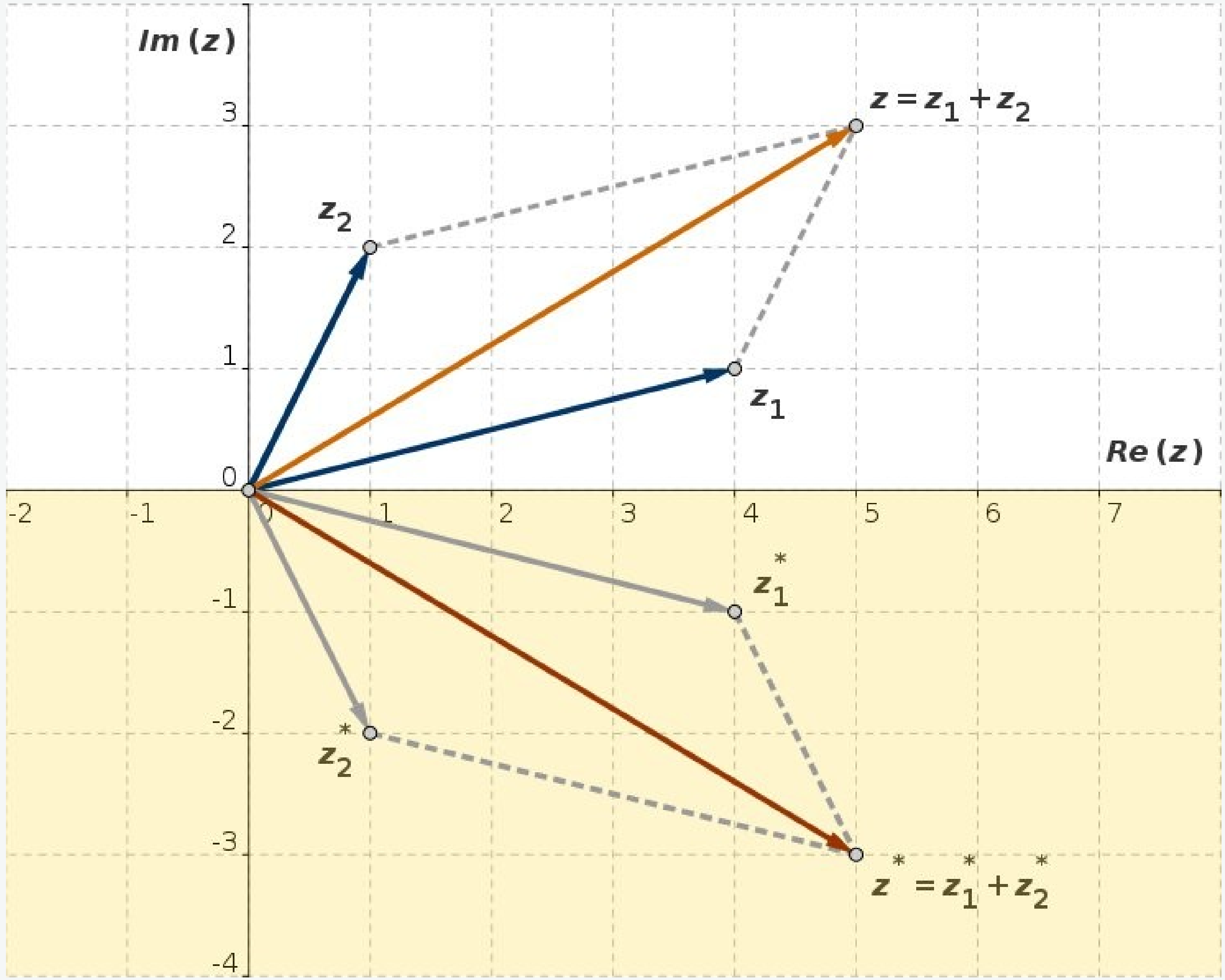
$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

Geben Sie entsprechende geometrische Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 7:

Lösen Sie folgende komplexe Gleichung:

$$(4 + 2i)\, x + (5 - 3i)\, y = 13 + i$$



$$(z_1 + z_2)^* = (x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2))^* = x_1 + x_2 - i\,(y_1 + y_2) =$$

$$= (x_1 - i\,y_1) + (x_2 - i\,y_2) = z_1^* + z_2^*$$

Eine solche komplexe Gleichung zu lösen bedeutet, die reellen Lösungen, die x- und y-Werte zu bestimmen

$$(4 + 2\,i)\;x + (5 - 3\,i)\;y = 13 + i \quad\Leftrightarrow$$

$$4\,x + 5\,y + i\,(2\,x - 3\,y) = 13 + i$$

$$z_1 = z_2 \qquad : x_1 = x_2 \;\wedge\; y_1 = y_2 \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4\,x + 5\,y = 13 \\ 2\,x - 3\,y = 1 \end{cases} \qquad x = 2, \quad y = 1$$