Kartesische Form, Polarform: Umrechnung

Umrechnung: kartesische Form $\rightarrow$ trigonometrische Form

Eine in der kartesischen Form $z = x + i\,y$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen und unter Berücksichtigung des Quadranten, in dem der zugehörige Bildpunkt liegt, in die Polarform überführen

Quadrant I: $x > 0, \quad y > 0$

Quadrant II: $x < 0, \quad y > 0$

Quadrant III: $x < 0, \quad y < 0$

Quadrant IV: $x > 0, \quad y < 0$

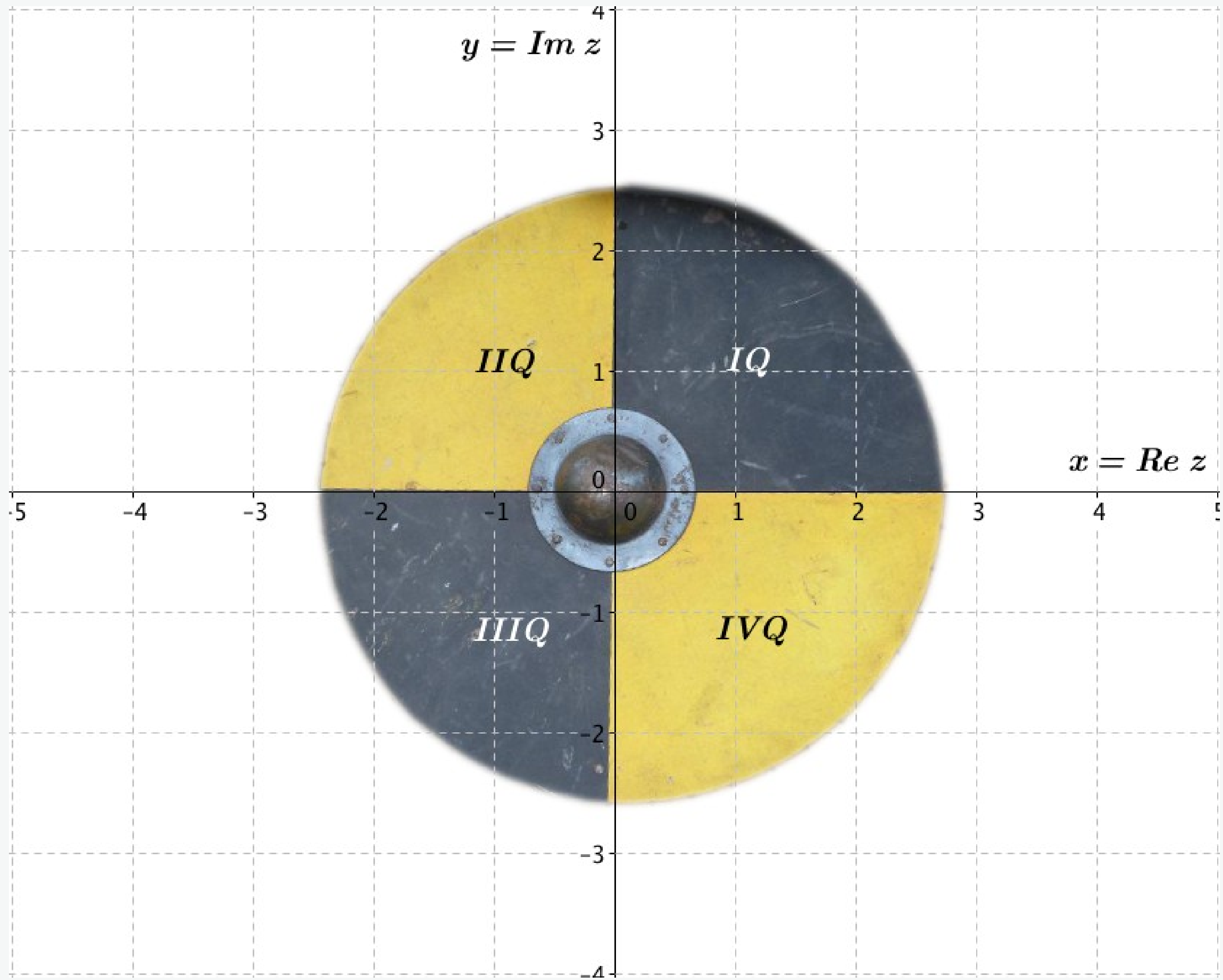

Abb. 3: Vier Quadranten in der Gaußschen Zahlenebene

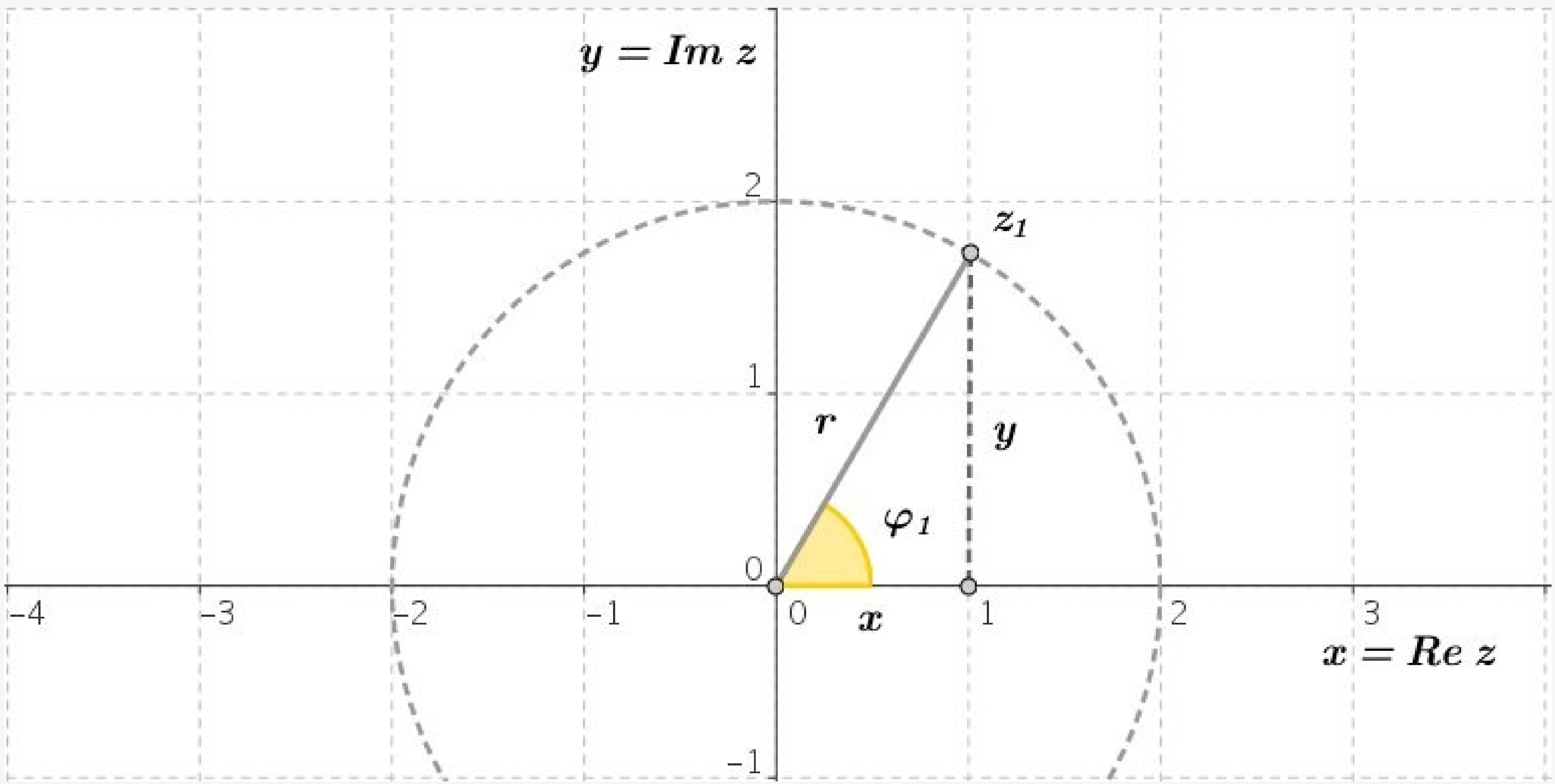

Abb. 4-1: Komplexe Zahl $1 + \sqrt{3}\, i$ in der Gaußschen Zahlenebene

Im Folgenden werden wir eine in der kartesischen Form gegebene komplexe Zahl in die Polarform umformen, d.h. den Betrag und den Winkel bestimmen

$$x\,,\ y \quad \rightarrow \quad r\,,\ \varphi_1 \qquad : z = x + i\,y \quad \rightarrow \quad z = r\, e^{i\,\varphi_1}$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i\,, \qquad x_1 = 1, \qquad y_1 = \sqrt{3}$$

$$r = |\, z_1 \,| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\cos\,\varphi_1 = \frac{x_1}{r} = \frac{1}{2}\,, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i = 2\, e^{i\,\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Umformung einer komplexen Zahl, die sich im ersten Quadranten befindet, ist relativ einfach. Schwieriger ist die Umformung der Zahlen, die sich in den anderen Quadranten befinden, wie z.B.

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i\,, \qquad z_3 = -1 - \sqrt{3}\, i\,, \qquad z_4 = 1 - \sqrt{3}\, i$$

Diese Zahlen werden im Folgenden geometrisch dargestellt. Wie man der Abb. 4-2 entnehmen kann, haben sie gleiche Beträge und unterscheiden sich in den Winkeln.

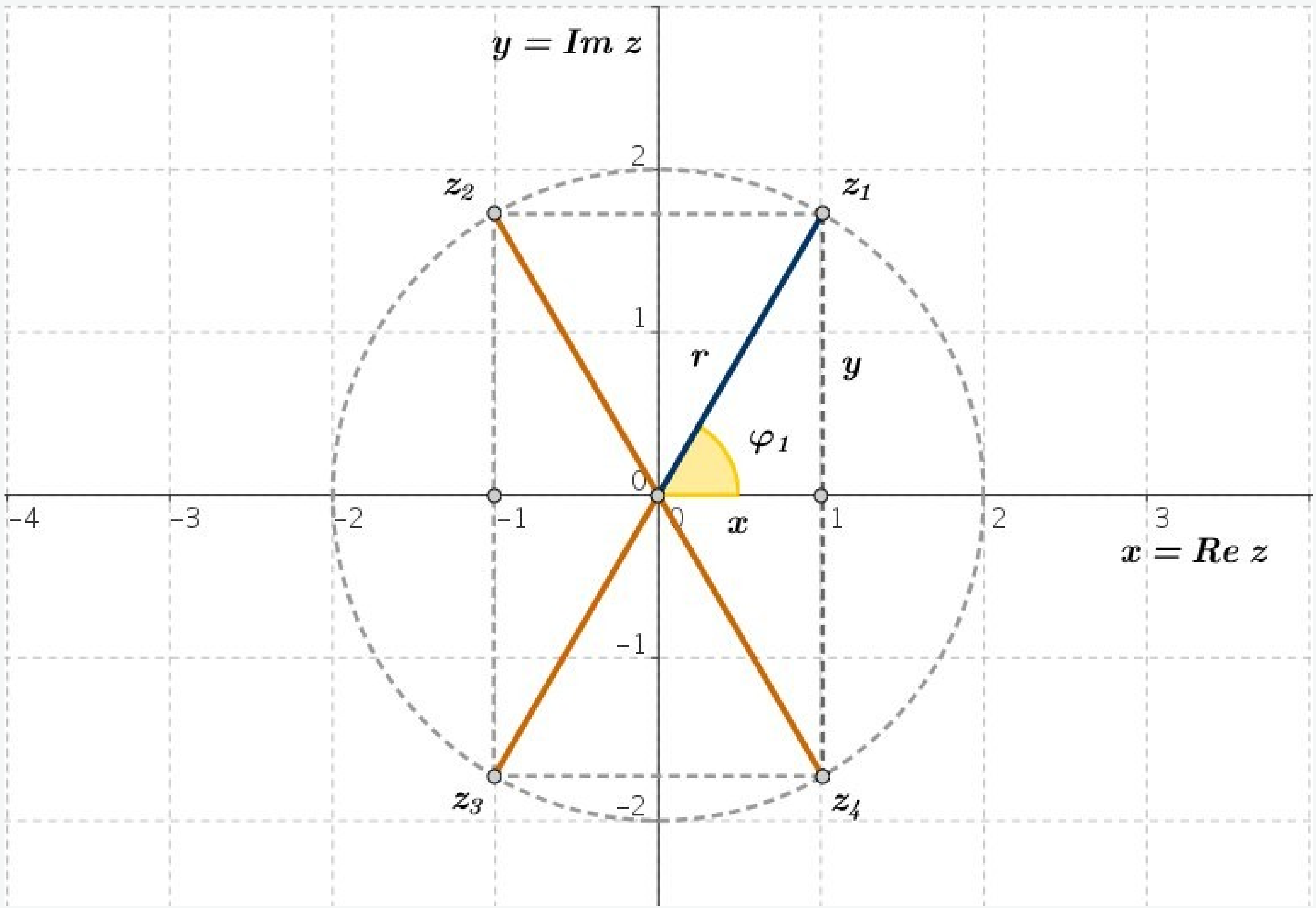

Abb. 4-2: Vier komplexe Zahlen, die gleiche Beträge haben und sich in verschiedenen Quadranten befinden

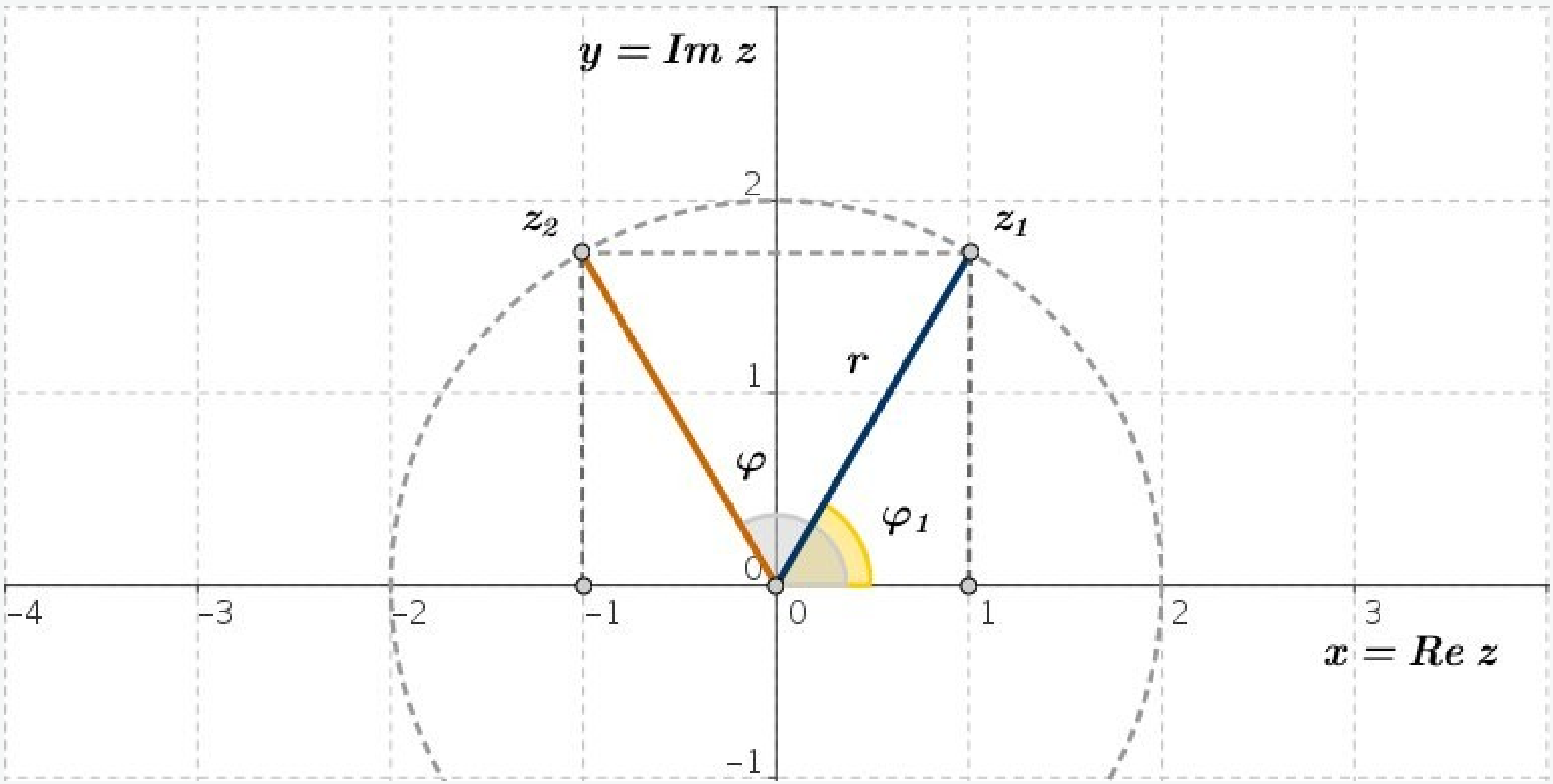

Abb. 4-3: Zur Bestimmung des Polarwinkels einer komplexen Zahl

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i\,, \qquad z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i\,, \qquad |\, z_1 \,| = |\, z_2 \,| = r = 2$$

$$\varphi = \pi - \varphi_1$$

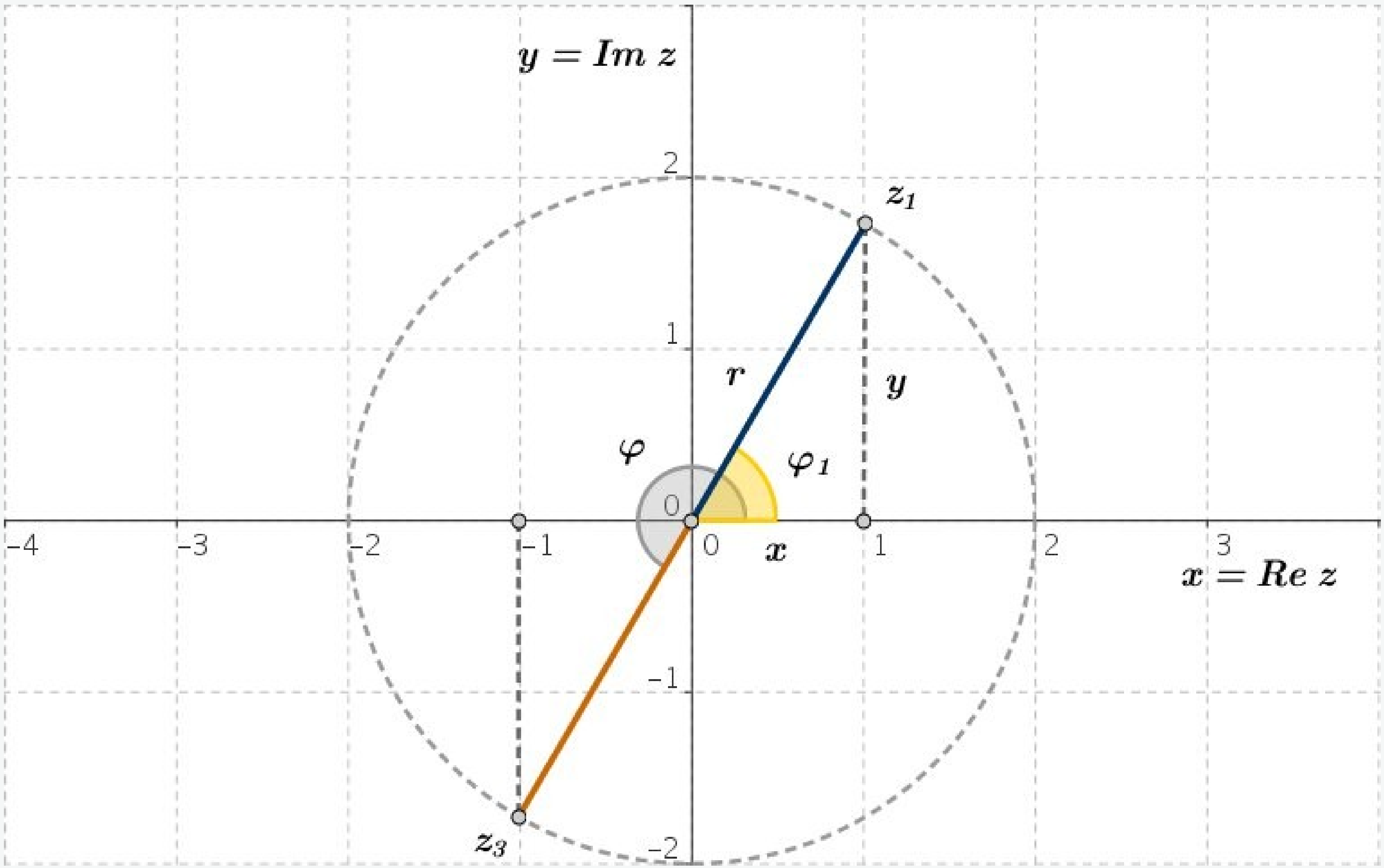

Abb. 4-4: Zur Bestimmung des Polarwinkels einer komplexen Zahl

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i\,, \qquad z_3 = -1 - \sqrt{3}\, i\,, \qquad |\, z_1 \,| = |\, z_3 \,| = r = 2$$

$$\varphi = \pi + \varphi_1$$

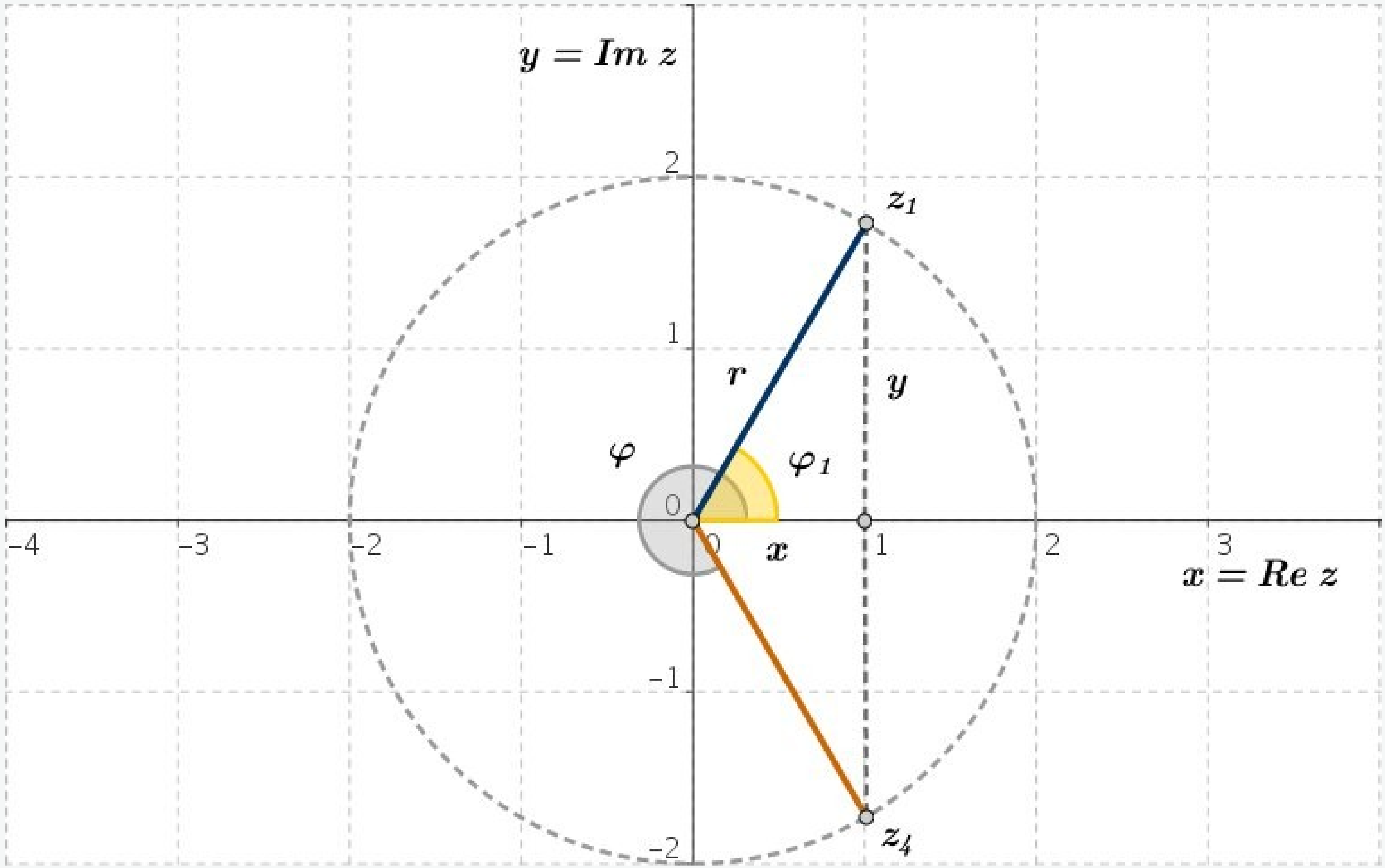

Abb. 4-5: Zur Bestimmung des Polarwinkels einer komplexen Zahl

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i\,, \qquad z_4 = 1 - \sqrt{3}\, i\,, \qquad |\, z_1 \,| = |\, z_4 \,| = r = 2$$

$$\varphi = 2\,\pi - \varphi_1$$

Umrechnung: kartesische Form → trigonometrische Form

$$z = x + i\,y\,, \qquad z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi}$$

Die Umrechnung wird in drei Schritten durchgeführt:

1. Berechnung des Betrages $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Berechnung eines Hilfswinkels aus einer der Beziehungen

$$\cos\varphi_1 = \frac{|x|}{r}, \qquad \sin\varphi_1 = \frac{|y|}{r}, \qquad \varphi_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$$

φ_1 – Hilfswinkel

3. Bestimmung des Hauptwertes φ aus dem Hilfswinkel unter Berücksichtigung der Vorzeichen von x und y:

IQ:	$x > 0,$	$y > 0,$	$\varphi = \varphi_1$
IIQ:	$x < 0,$	$y > 0,$	$\varphi = \pi - \varphi_1$
$IIIQ$:	$x < 0,$	$y < 0,$	$\varphi = \pi + \varphi_1$
IVQ:	$x > 0,$	$y < 0,$	$\varphi = 2\pi - \varphi_1$

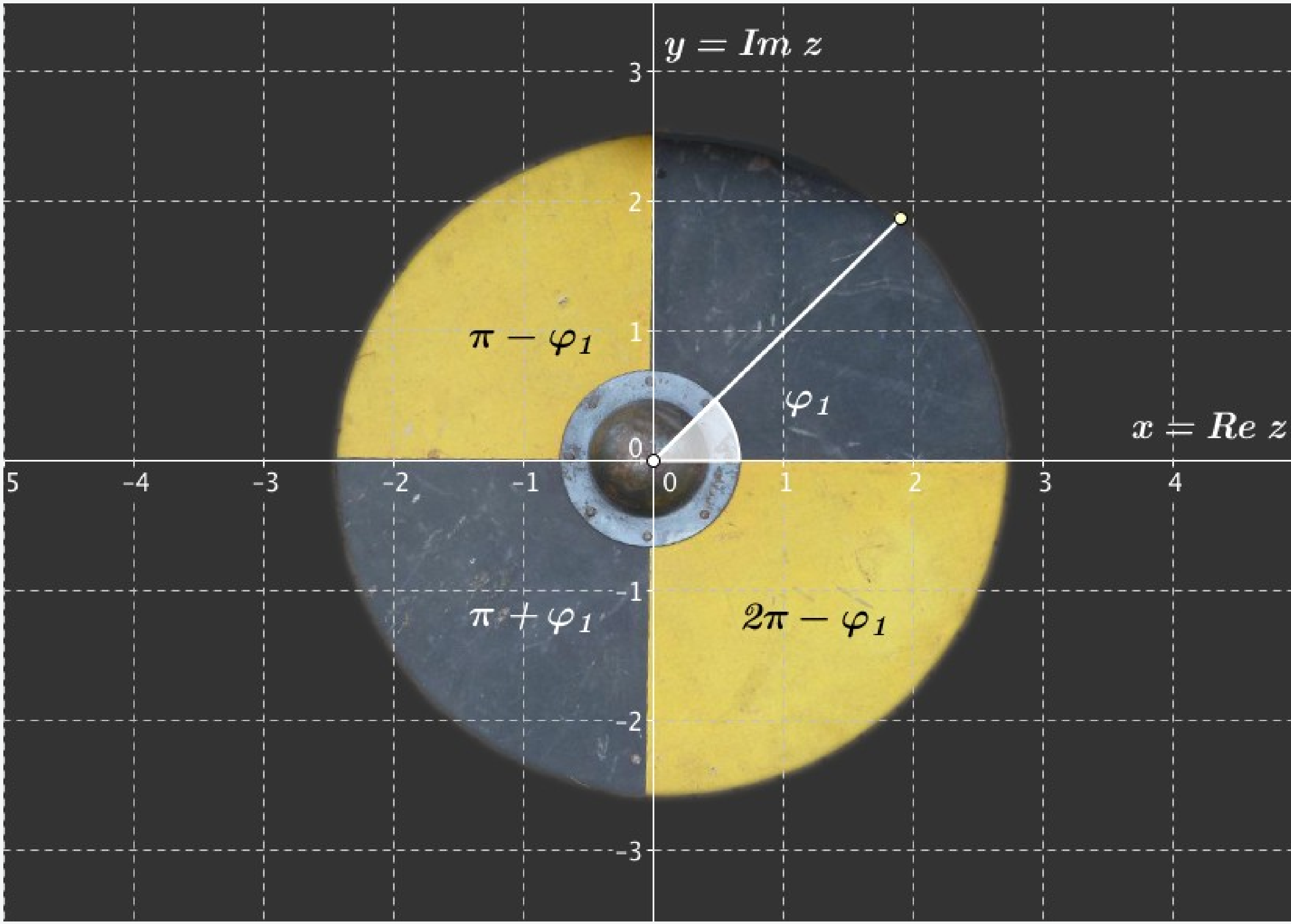

Abb. 4-6: Zur Bestimmung des Polarwinkels einer komplexen Zahl