Trigonometrische Form einer komplexen Zahl

Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

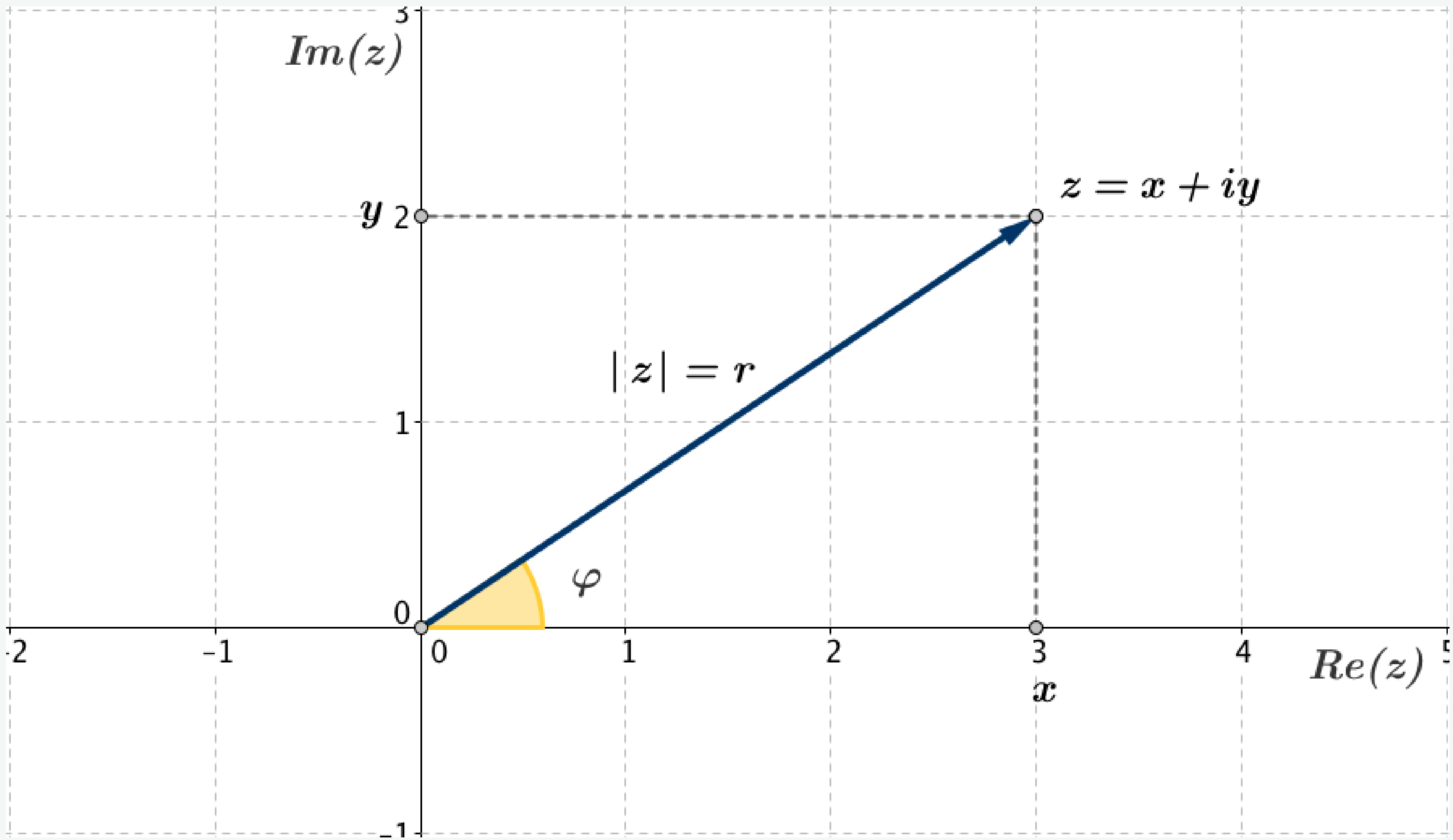


Abb. 1-1: Darstellung einer komplexen Zahl durch einen Zeiger in der Gaußschen Ebene

Wie man an der graphischen Darstellung einer komplexen Zahl durch einen Zeiger sieht, kann man eine komplexe Zahl eindeutig durch die x- und y-Werte, sowohl durch die Länge $r = |z|$ ihres Zeigers und ihren Winkel φ zur x-Achse

Die Länge des Zeigers r, die dem Betrag einer komplexen Zahl entspricht, ist nach Pythagoros

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

x- und y-Werte kann man als Katheten eines rechtwinkligen Dreieck durch durch r und φ beschreiben:

$$\boxed{x = r \cos\varphi, \qquad y = r \sin\varphi}$$

Diese Gleichungen nennt man Transformationsgleichungen. Die Darstellung einer komplexen Zahl durch r und φ :

$$z = x + i\,y = r\cos\varphi + i\;r\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + i\;\sin\varphi)$$

nennt man trigonometrische Form einer komplexen Zahl. Die Länge r und den Winkel φ nennt man Polarkoordinaten.

Kartesische (algebraische) Form: $z = x + i\,y$

Trigonometrische Form: $z = r\,(\cos\varphi + i\;\sin\varphi)$

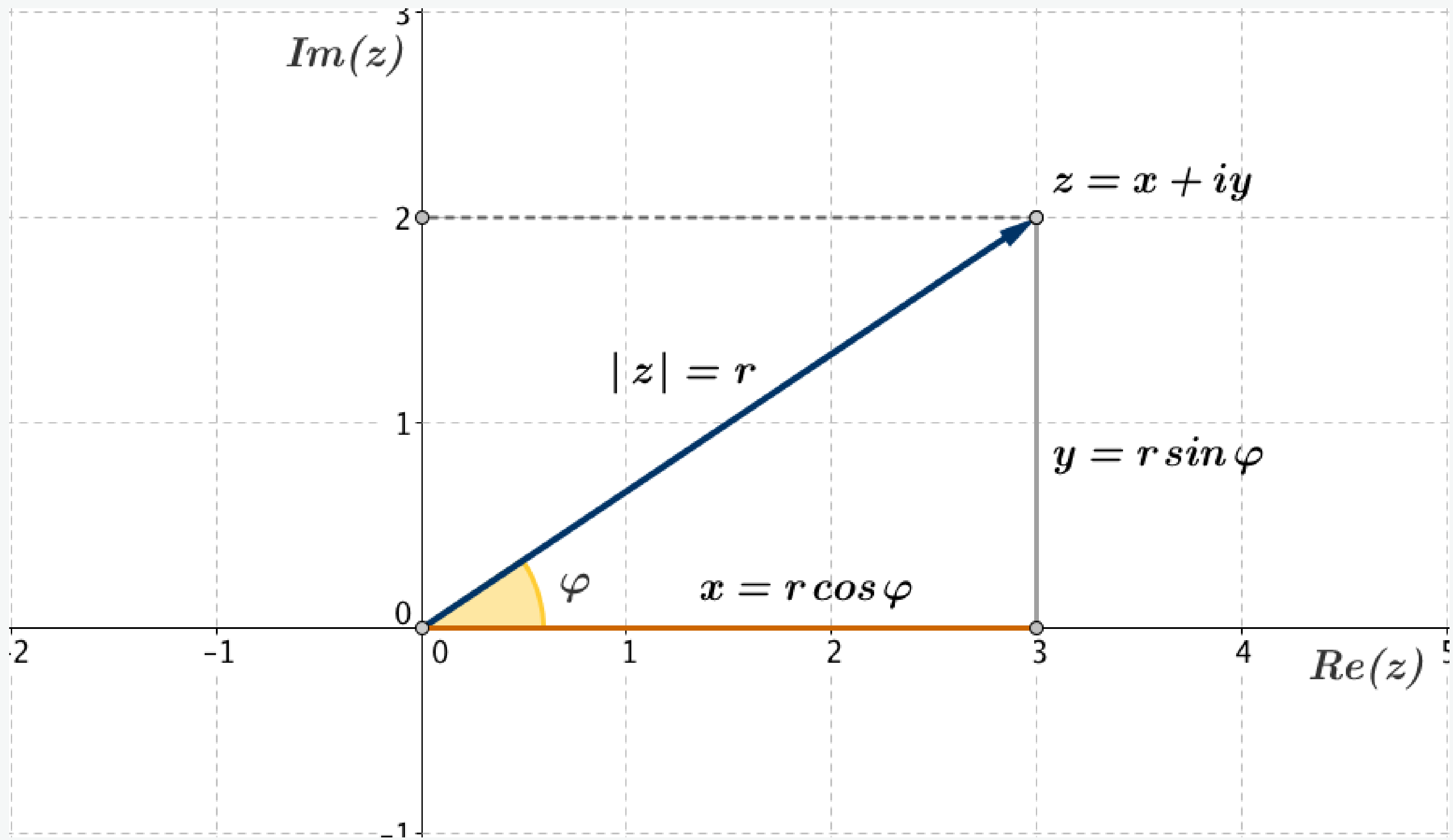


Abb. 1-2: Trigonometrische Form einer komplexen Zahl

Trigonometrische Form einer komplexen Zahl: Zusammenfassung

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi), \qquad r,\ \varphi\ \text{– Polarkoordinaten}$$

r – Betrag von z: $\quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad r \geqslant 0$

φ – Argument von z: $\quad \varphi = arg\ z, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ – Hauptwert

Das Argument einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig bestimmt:

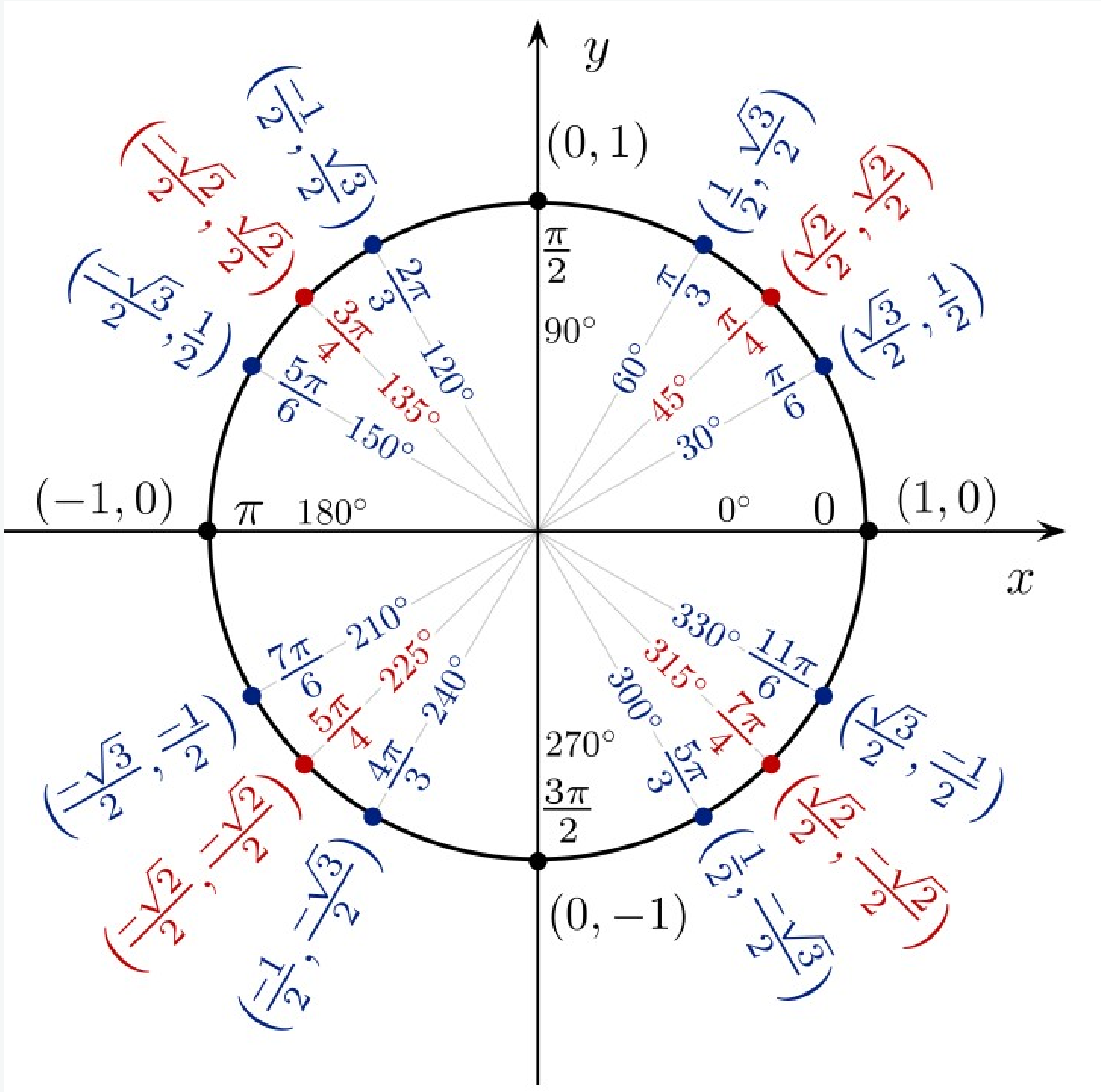
$$\varphi_k = \varphi + 2k\pi$$

Die Winkelrichtung entspricht dem mathematisch positiven Drehsinn, d.h. von der *Re (z)*-Achse zur *Im (z)*-Achse gegen den Uhrzeigersinn.

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = r\,(\cos(\varphi + 2\pi) + i\,\sin(\varphi + 2\pi))$$

Die Addition von 2π oder einem ganzzahligen Vielfachen, $2k\pi$, zum Winkel φ entspricht einer vollständigen Drehung oder k Drehungen des komplexen Zeigers. Das Ergebnis ist wieder die gleiche komplexe Zahl.

$$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi, \qquad \sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$$



Punkte mit Kosinus- und Sinuswerten auf dem Einheitskreis (Wikipedia)

Stellen Sie die in der trigonometrischen Form vorliegenden genden komplexen Zahlen durch den Zeiger in der Gauß-schen Zahlenebene dar. Geben Sie die kartesische Form dieser Zahlen an:

$$a)\quad z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$b)\quad z_3 = \cos\pi + i\sin\pi\,,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$c)\quad z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_6 = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Trigonometrische Form: Aufgabe 1

$$d)\quad z_7:\ r = 2,\quad \varphi = \frac{3\pi}{4},\qquad z_8:\ r = 3,\quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$e)\quad z_9:\ r = \frac{3}{2},\quad \varphi = -\frac{13}{6}\pi,\qquad z_{10}:\ r = \sqrt{3},\quad \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

$$f)\quad z_{11}:\ r = 3,\quad \varphi = 60^\circ,\qquad z_{12}:\ r = 2,\quad \varphi = 210^\circ$$

$$g)\quad z_{13}:\ r = 2,\quad \varphi = 18^\circ,\qquad z_{14}:\ r = 2,\quad \varphi = -36^\circ$$

$$h)\quad z_{15}:\ r = 2,\quad \varphi = 162^\circ,\qquad z_{16}:\ r = \sqrt{3},\quad \varphi = 200^\circ$$

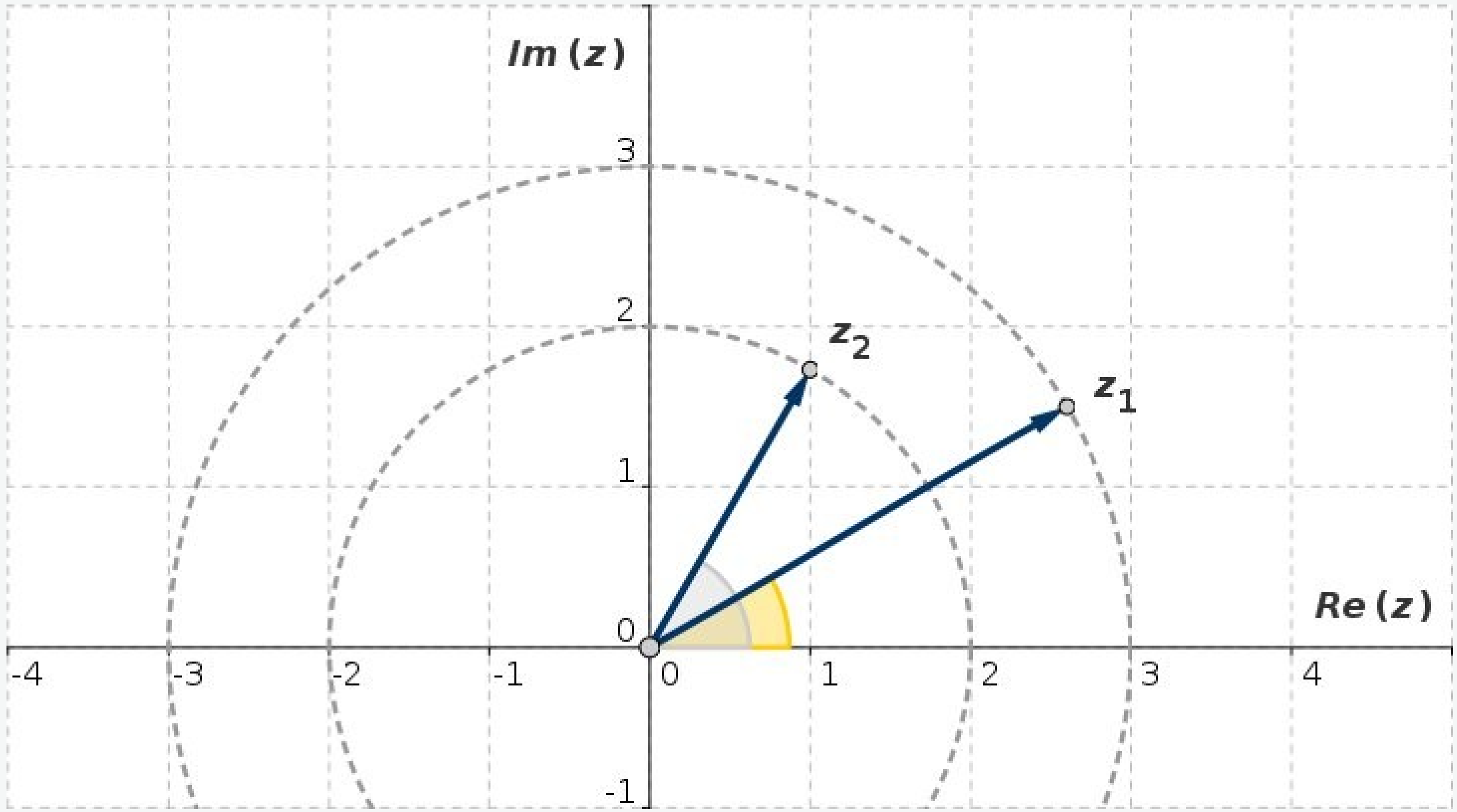


Abb. L1a: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\, i = \frac{3}{2} \left(\sqrt{3} + i \right)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \right) = 1 + \sqrt{3}\, i$$

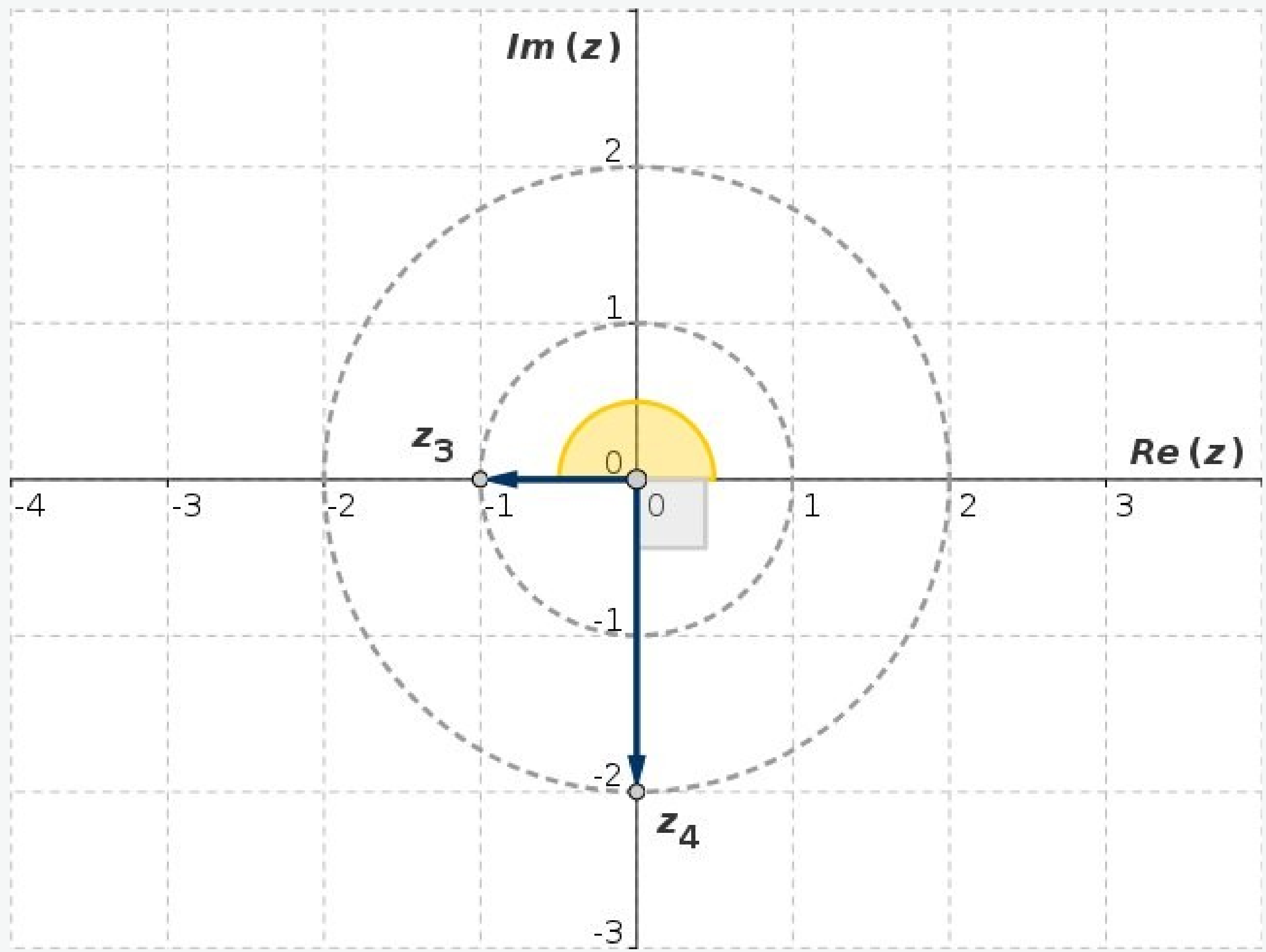


Abb. L1b: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene

$$z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \qquad z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2\,i$$

Trigonometrische Form: Lösung 1c

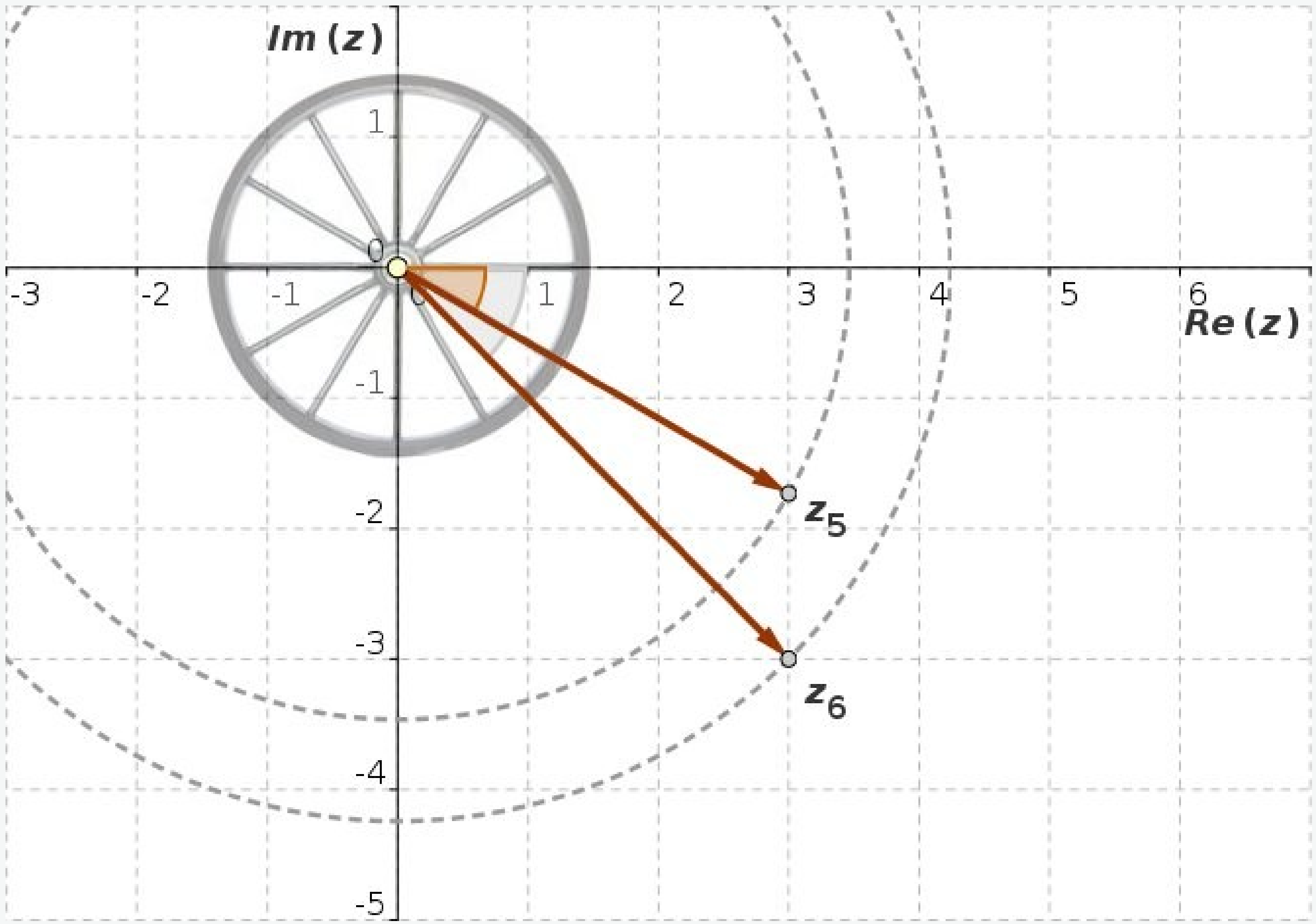


Abb. L1c: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene

$$z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3 - \sqrt{3}\, i$$

$$z_6 = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\,(1 - i)$$

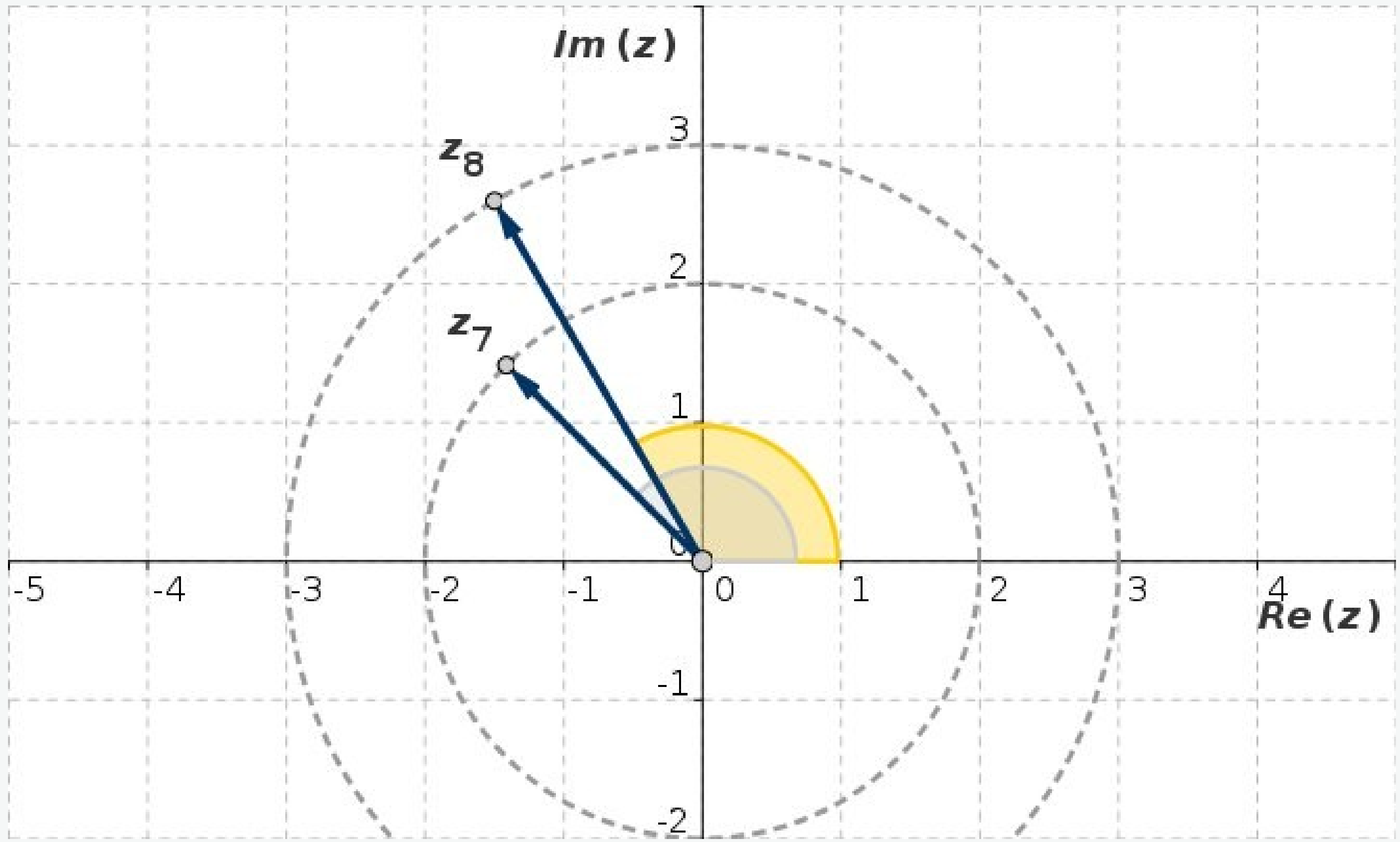


Abb. L1d: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene, dargestellt durch Betrag und Winkel

$$z_7 = 2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$z_8 = 3 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i = \frac{3}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\, i\right)$$

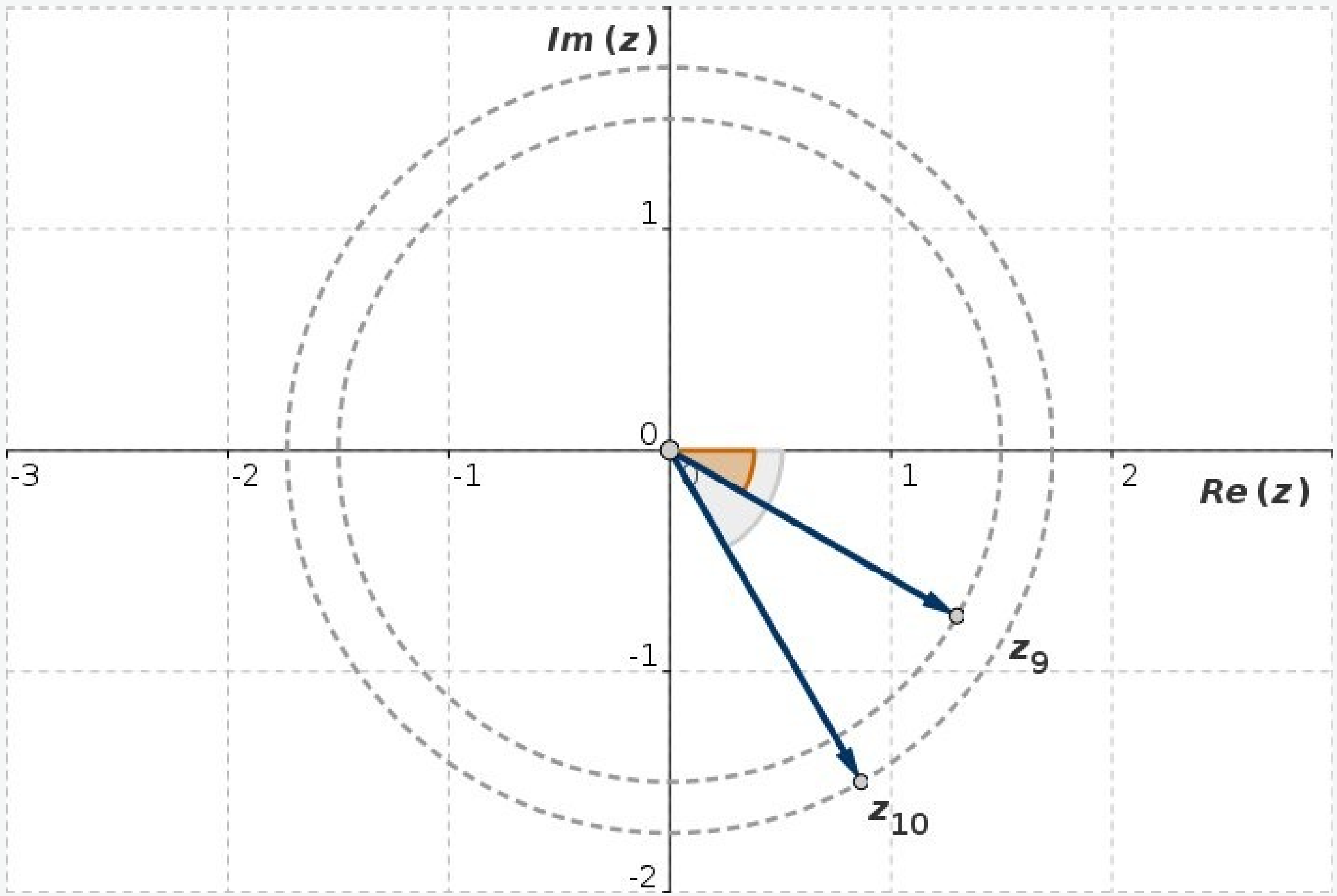


Abb. L1e: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene

$$z_9 = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{13}{6}\pi\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{4}\,(\sqrt{3} - i)$$

$$z_{10} = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{3}{2}$$

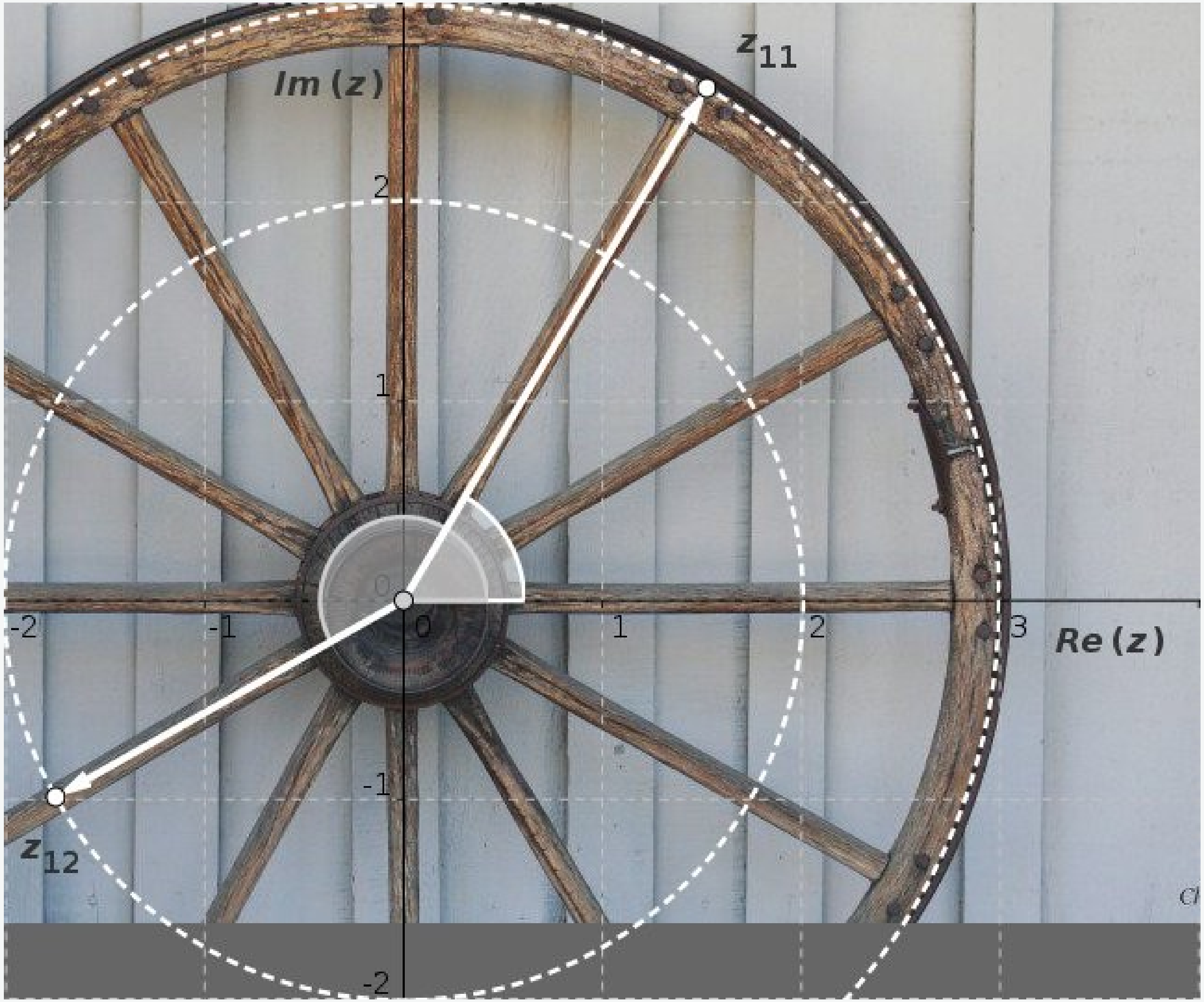


Abb. L1f: Graphische Darstellung der komplexen Zahlen der Aufgabe 1f

$$z_{11} = \frac{3}{2}\,(1 + i\sqrt{3}\,), \qquad z_{12} = -\sqrt{3}\; - i$$

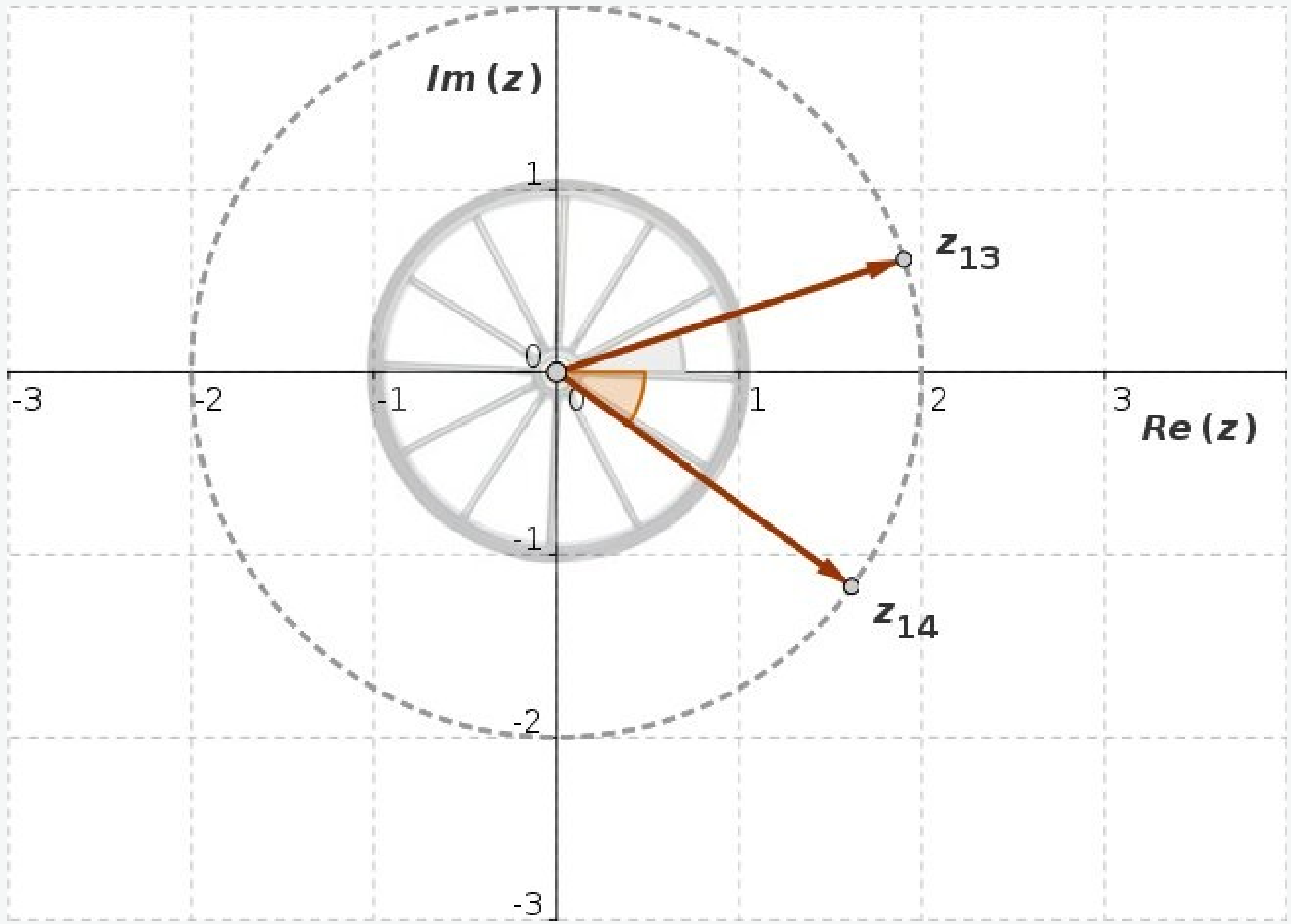


Abb. L1g: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene

$$z_{13} = 2\ \left(\cos\left(18^{\circ}\right) + i\sin\left(18^{\circ}\right)\right) \simeq 1.902 + i\,0.618$$

$$z_{14} = 2\ \left(\cos\left(-36^{\circ}\right) + i\sin\left(-36^{\circ}\right)\right) \simeq 1.618 - i\,1.176$$

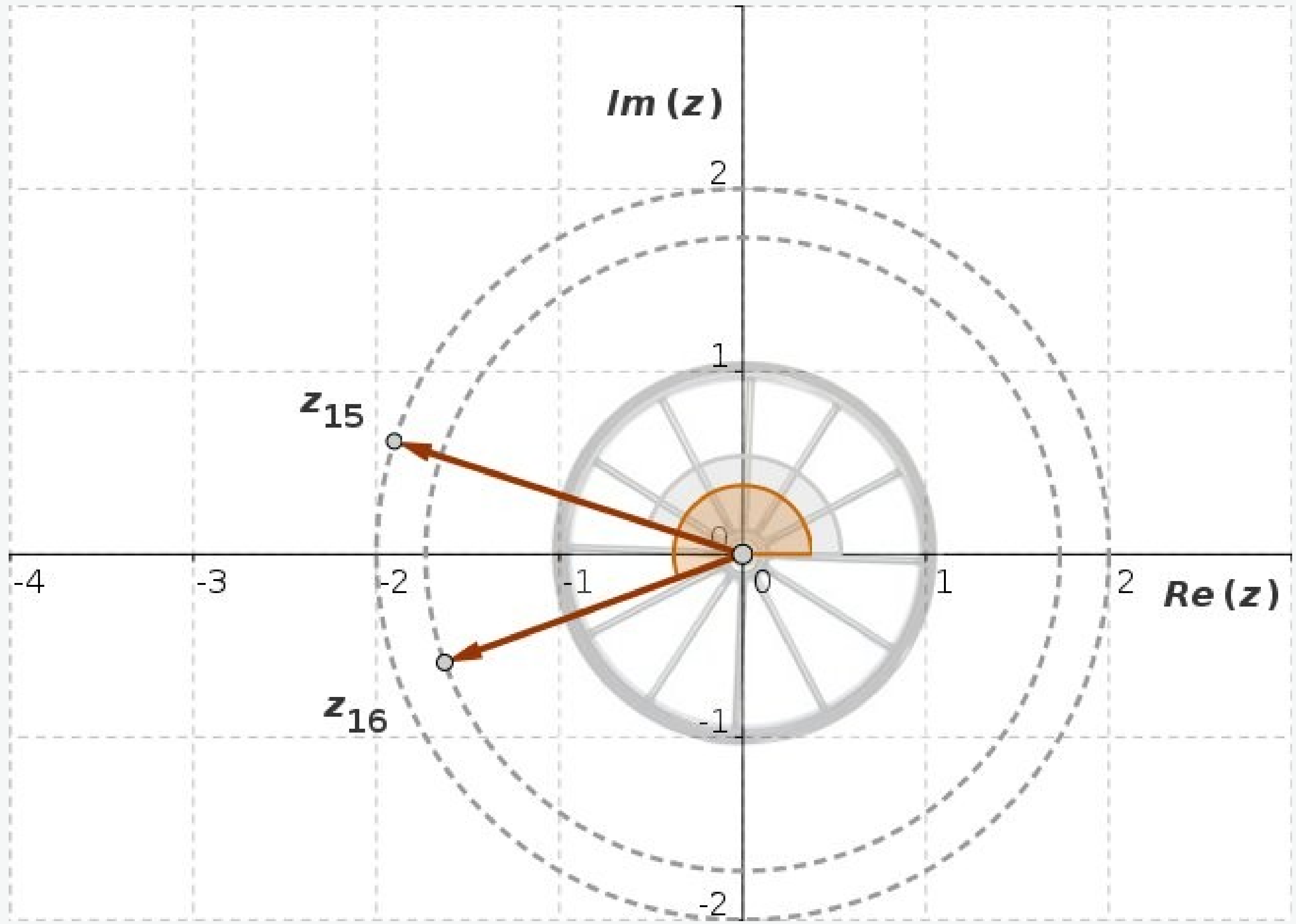


Abb. L1h: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Ebene

$$z_{15} = 2\ \left(\cos\left(162^{\circ}\right) + i\sin\left(162^{\circ}\right)\right) \simeq -1.902 + i\,0.618$$

$$z_{16} = 2\ \left(\cos\left(200^{\circ}\right) + i\sin\left(200^{\circ}\right)\right) \simeq -1.628 - i\,0.592$$

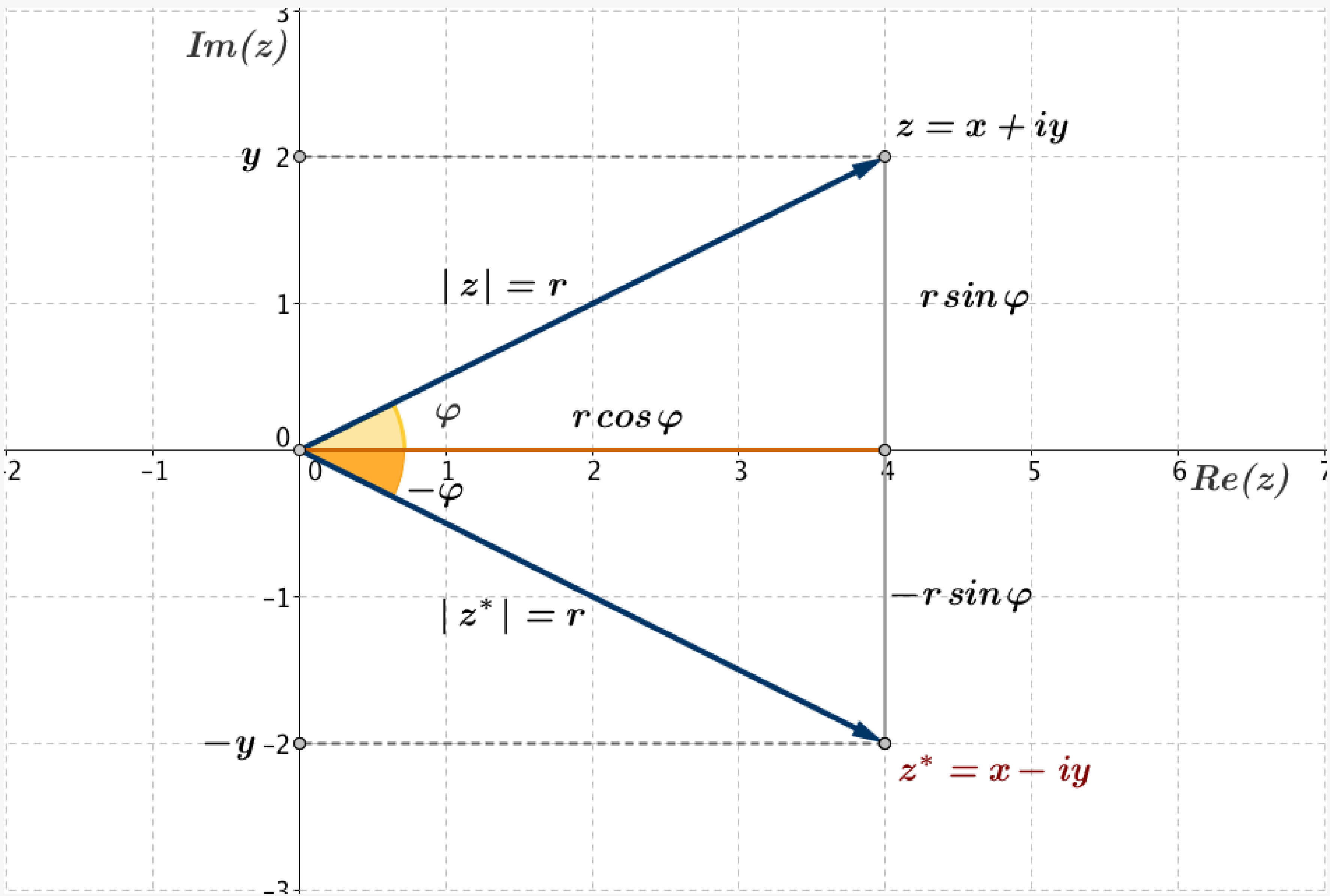


Abb. 2: Komplexe Zahl und ihre konjugiert komplexe Zahl

$$z = r\left(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\right) \quad \to \quad z^* = r\left(\cos\varphi - i\,\sin\varphi\right)$$

$$\varphi \;\to\; -\varphi \qquad \textit{oder} \qquad i \;\to\; -i$$

$$\cos\left(-\varphi\right) = \cos\varphi\,, \qquad \sin\left(-\varphi\right) = -\sin\varphi$$