Würzburg

Komplexe Zahlen: Grundbegriffe

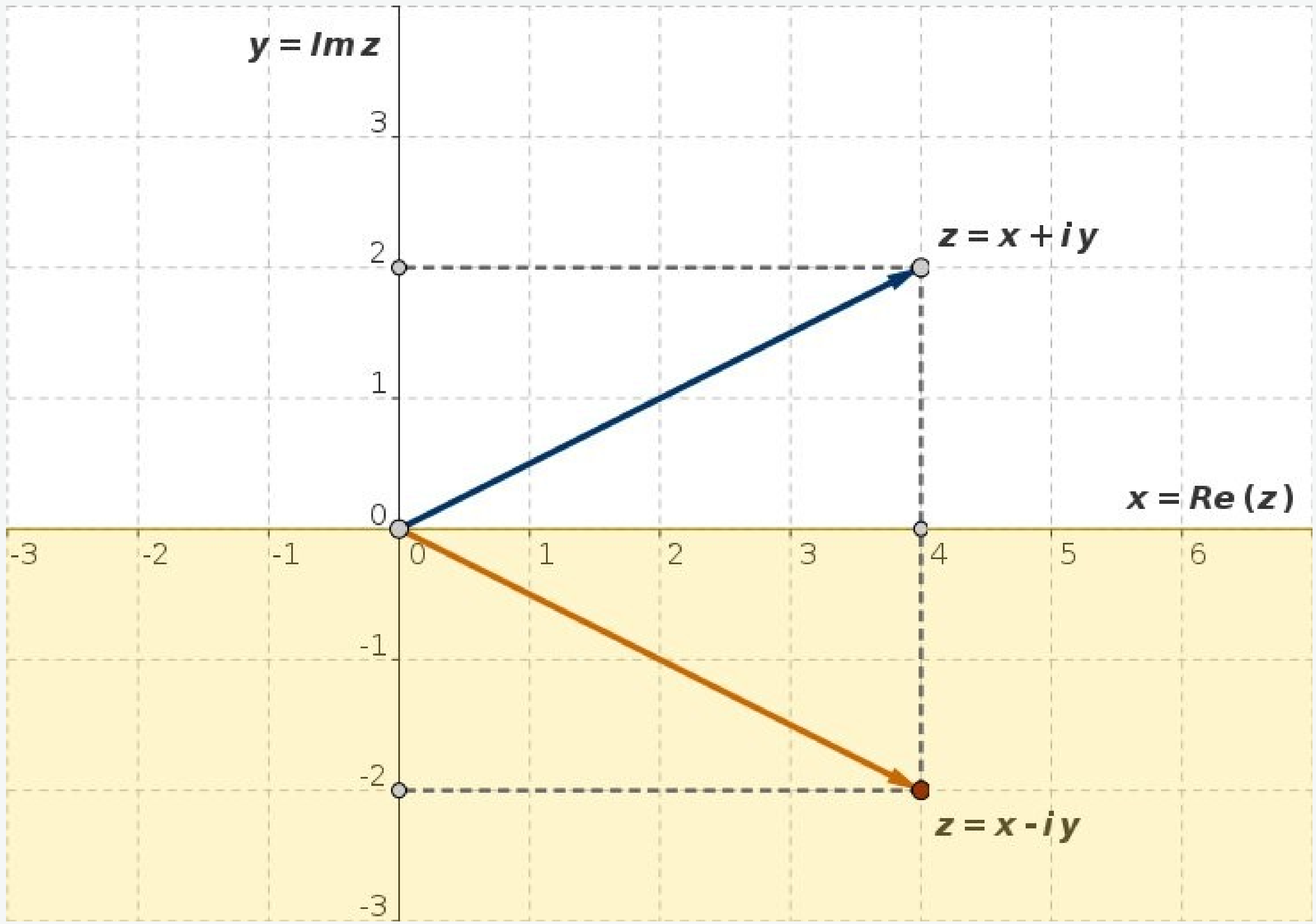
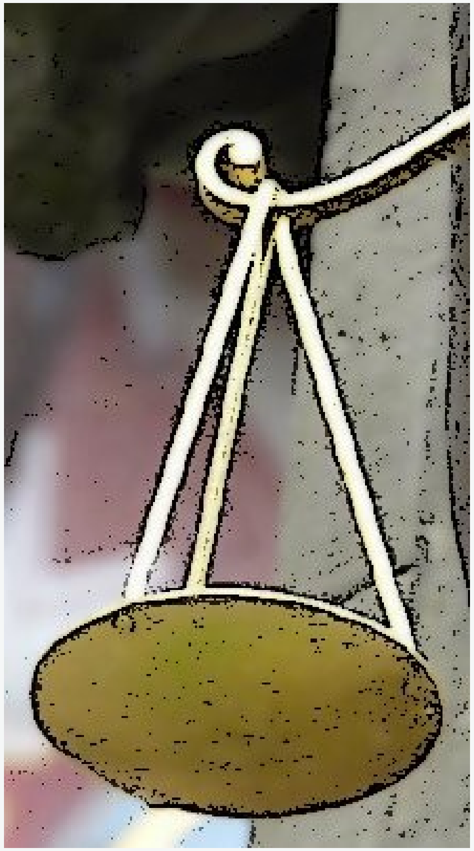


Abb. 7: Zum Begriff der konjugiert komplexen Zahl

$z^* = x - i\,y$ ist konjugiert komplexe Zahl zu $z = x + i\,y$

$z^* = z$ – reelle Zahl, $z^* = -z$ – imaginäre Zahl, $(z^*)^* = z$



Definition:

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + i\, y_1 , \quad z_2 = x_2 + i\, y_2$

heißen gleich, wenn $x_1 = x_2 , \quad y_1 = y_2$

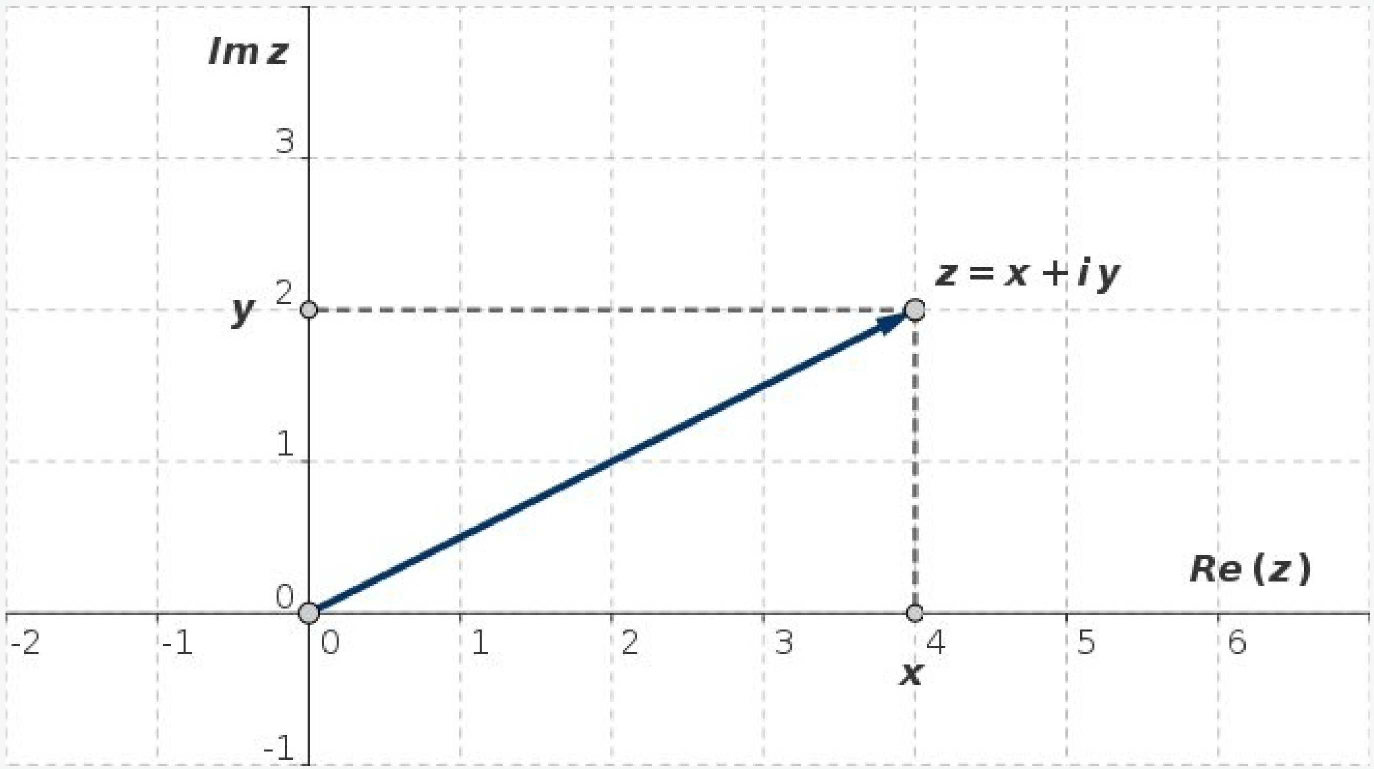


Abb. 8: Zum Begriff des Betrages einer komplexen Zahl

Definition:

Unter dem Betrag $|z|$ der komplexen Zahl $z = x + i\,y$ versteht man die Länge des zugehörigen Zeigers

$$|z| = \sqrt{z\ z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad |z| \geqslant 0$$

Anwendung des Satzes von Pythagoras (die Länge des Zeigers)

Für Betrag einer komplexen Zahl z

$z \in \mathbb{C}$

$$|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$$

Zum Beweis dieser Eigenschaft:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \geqslant \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} = |\operatorname{Re} z|$$

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \geqslant \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2} = |\operatorname{Im} z|$$

Aufgabe 1:

Finden Sie zu den gegebenen komplexen Zahlen die konjugiert komplexen Zahlen und zeichnen sie in der Gaußschen Zahlenebene:

$z_1 = i\,, \qquad z_2 = 2 + i\,, \qquad z_3 = -4 + 2\,i\,,$

$z_4 = 3, \qquad z_5 = -3 - 1.5\,i\,, \qquad z_6 = 5 - i$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Beträge der folgenden komplexen Zahlen:

$z_1 = 4 + 3\,i\,, \qquad z_2 = 3 + 4\,i\,, \qquad z_3 = 4 - 3\,i$

$z_4 = 3 - 4\,i\,, \qquad z_5 = -3 + 4\,i\,, \qquad z_6 = 5$

$z_7 = -2\sqrt{6} + i\,, \qquad z_8 = -1 - 2\sqrt{6}\; i\,, \qquad z_9 = 5\,i$

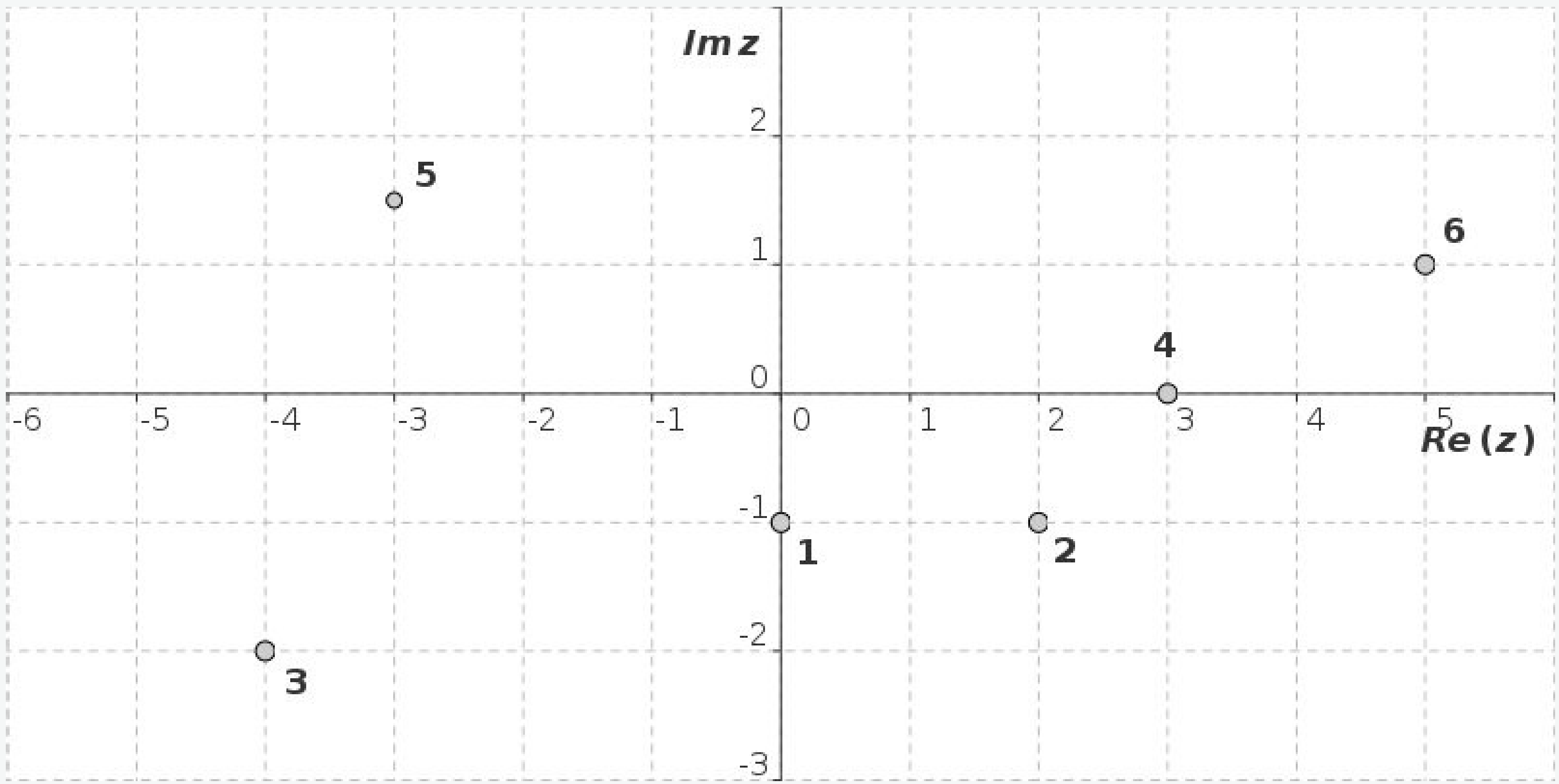


Abb. L1: Darstellung der konjugiert komplexen Zahlen der Aufgabe 1 auf der Gaußschen Zahlenebene

$$z_1^* = -i\,, \qquad z_2^* = 2 - i\,, \qquad z_3^* = -4 - 2i\,,$$

$$z_4^* = 3, \qquad z_5^* = -3 + 1.5\,i\,, \qquad z_6^* = 5 + i$$

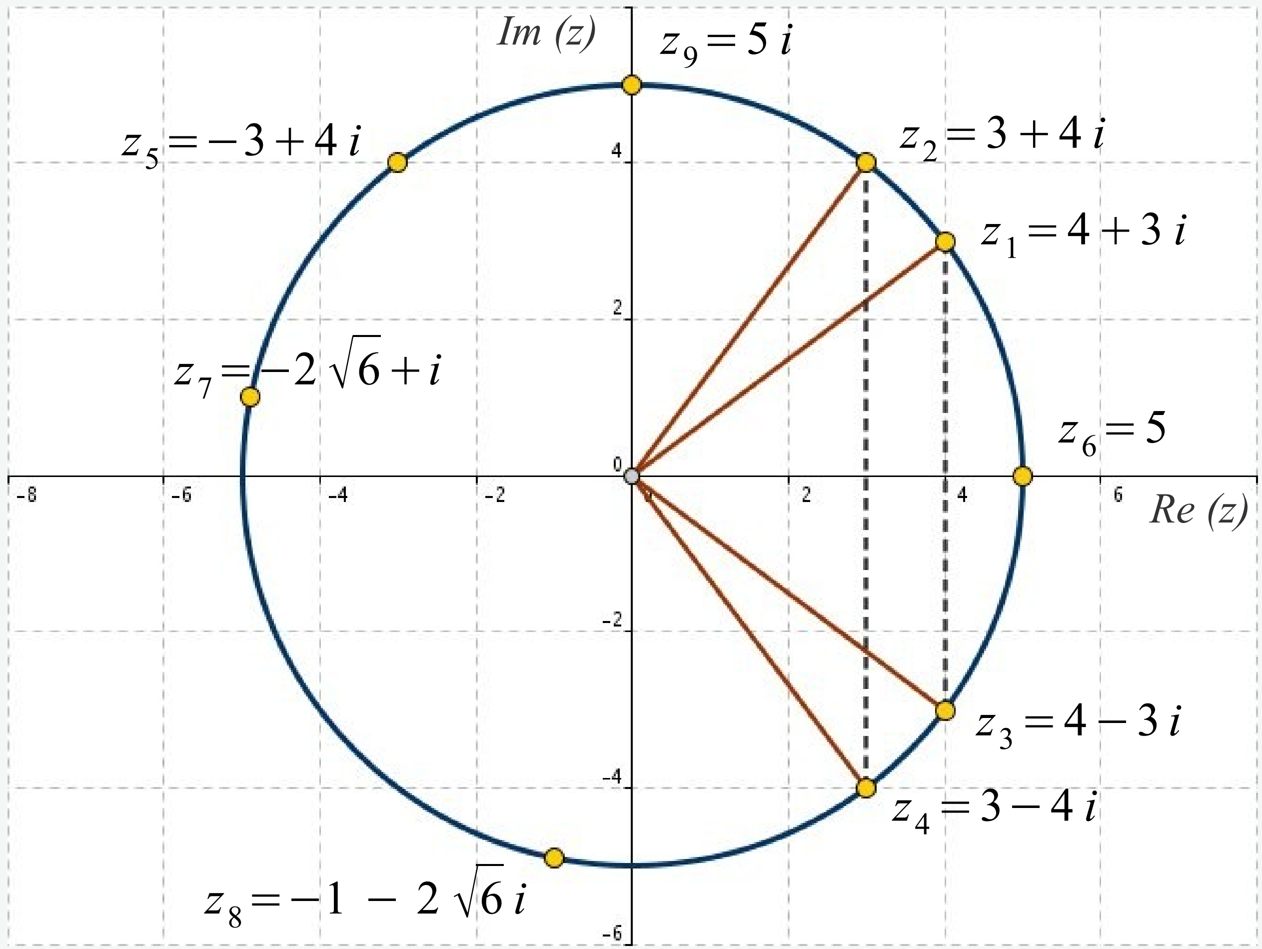


Abb. L2: Darstellung der komplexen Zahlen auf der Gaußschen Zahlenebene

Alle komplexen Zahlen befinden sich auf einem Kreis mit dem Radius $R = 5$, deswegen haben sie den gleichen Betrag 5

$$|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_8| = |z_9| = 5$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Beträge folgender komplexen Zahlen und zeichnen sie auf der Gaußschen Zahlenebene:

$$z_1 = 2i, \qquad z_2 = 3 + i^2, \qquad z_3 = -\sqrt{3} + i, \qquad z_4 = -2$$

$$z_5 = -\sqrt{3} - i, \qquad z_6 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Beträge folgender komplexen Zahlen

$$z_1 = -6 + i, \qquad z_2 = 5 + i^3, \qquad z_3 = -\sqrt{21} + 2i$$

$$z_4 = -\sqrt{6} - \sqrt{3}\, i, \qquad z_5 = \sqrt{35} - i^3, \qquad z_6 = \sqrt{15} + i$$

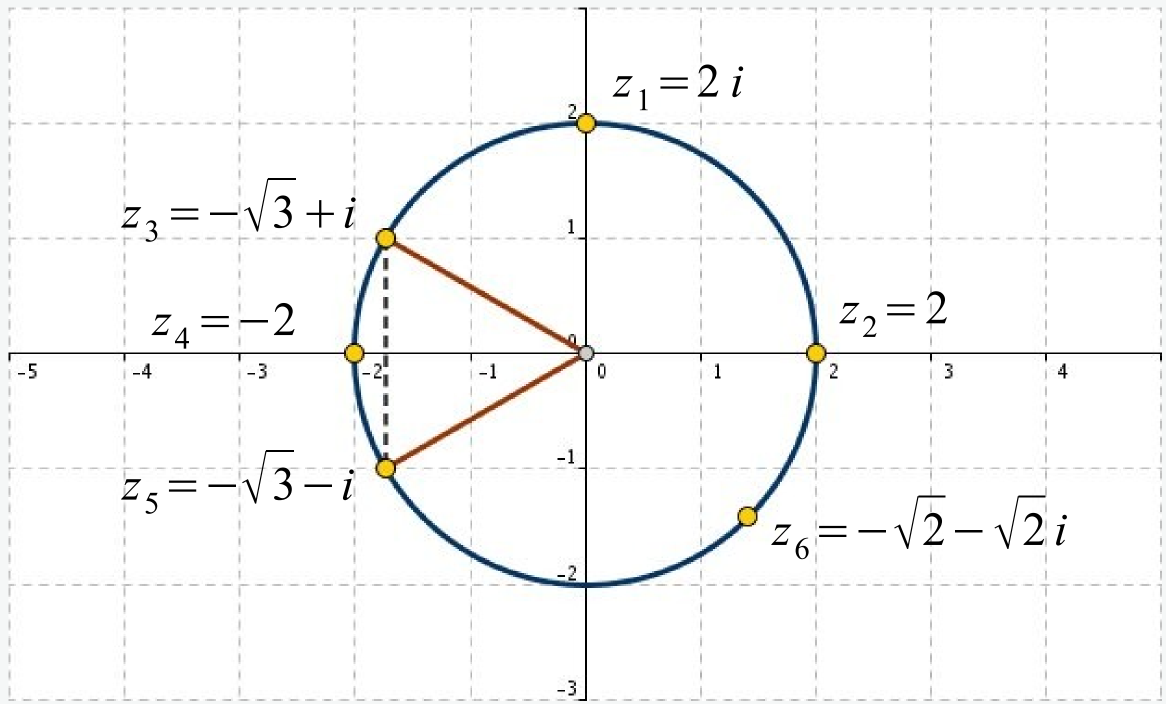


Abb. L3: Darstellung der komplexen Zahlen auf der Gaußschen Zahlenebene

Alle komplexen Zahlen befinden sich auf einem Kreis mit dem Radius $R = 2$, deswegen haben sie den gleichen Betrag 2

$$|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_6| = 2$$

$$z_1 = -6 + i\,, \qquad |\,z_1\,| = \sqrt{(-6)^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

$$z_2 = 5 + i^3 = 5 - i\,, \qquad |\,z_2\,| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$z_3 = -\sqrt{21} + 2\,i\,, \qquad |\,z_3\,| = \sqrt{(\sqrt{21})^2 + 2^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$z_4 = -\sqrt{6} - \sqrt{3}\,i\,, \qquad |\,z_4\,| = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$z_5 = \sqrt{35} - i^3 = \sqrt{35} + i\,, \qquad |\,z_5\,| = \sqrt{35 + 1} = \sqrt{36} = 6$$

$$z_6 = \sqrt{15} + i\,, \qquad |\,z_6\,| = \sqrt{15 + 1} = \sqrt{16} = 4$$