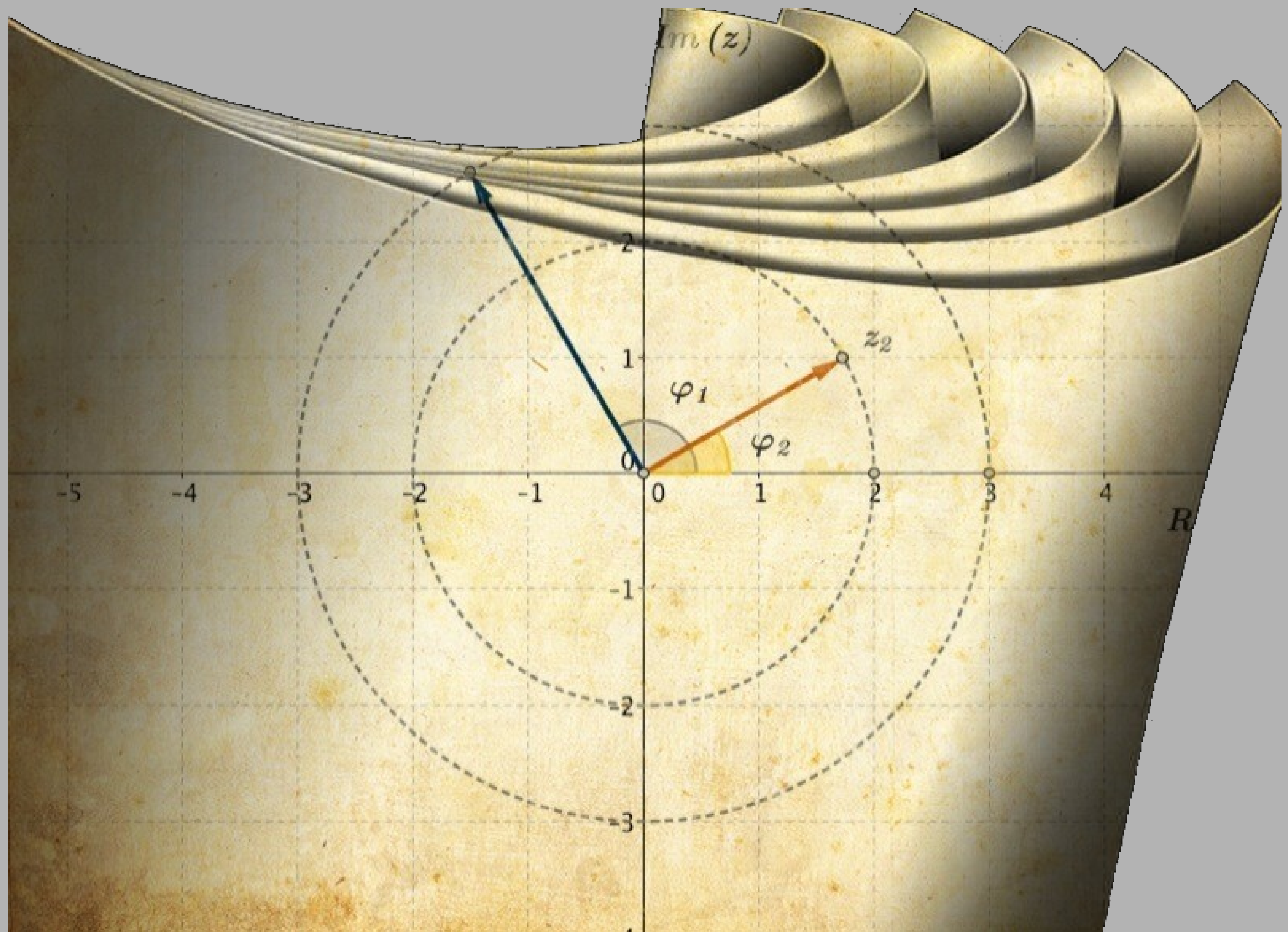


Multiplikation und Division in Polarform

1-E2

$$b^{n} \cdot b^{m} = b^{n+m}, \qquad \frac{b^{n}}{b^{m}} = b^{n-m}, \qquad \left(b^{n}\right)^{m} = b^{nm}$$

Additionstheoreme:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2$$

Bei der Multiplikation und Division komplexer Zahlen erweist sich die exponentielle Darstellungsweise als besonders vorteilhaft.

$$z_1 = r_1 \left(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1\right), \qquad z_2 = r_2 \left(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \, [\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + $$
$$+ i\,(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)]$$

Additionstheoreme:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]}$$

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Definition 1:

Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente (Winkel) addiert.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} =$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation der Multiplikation der komplexen Zahl z mit i, $-i$ und -1.

$$z = \sqrt{3} + i$$

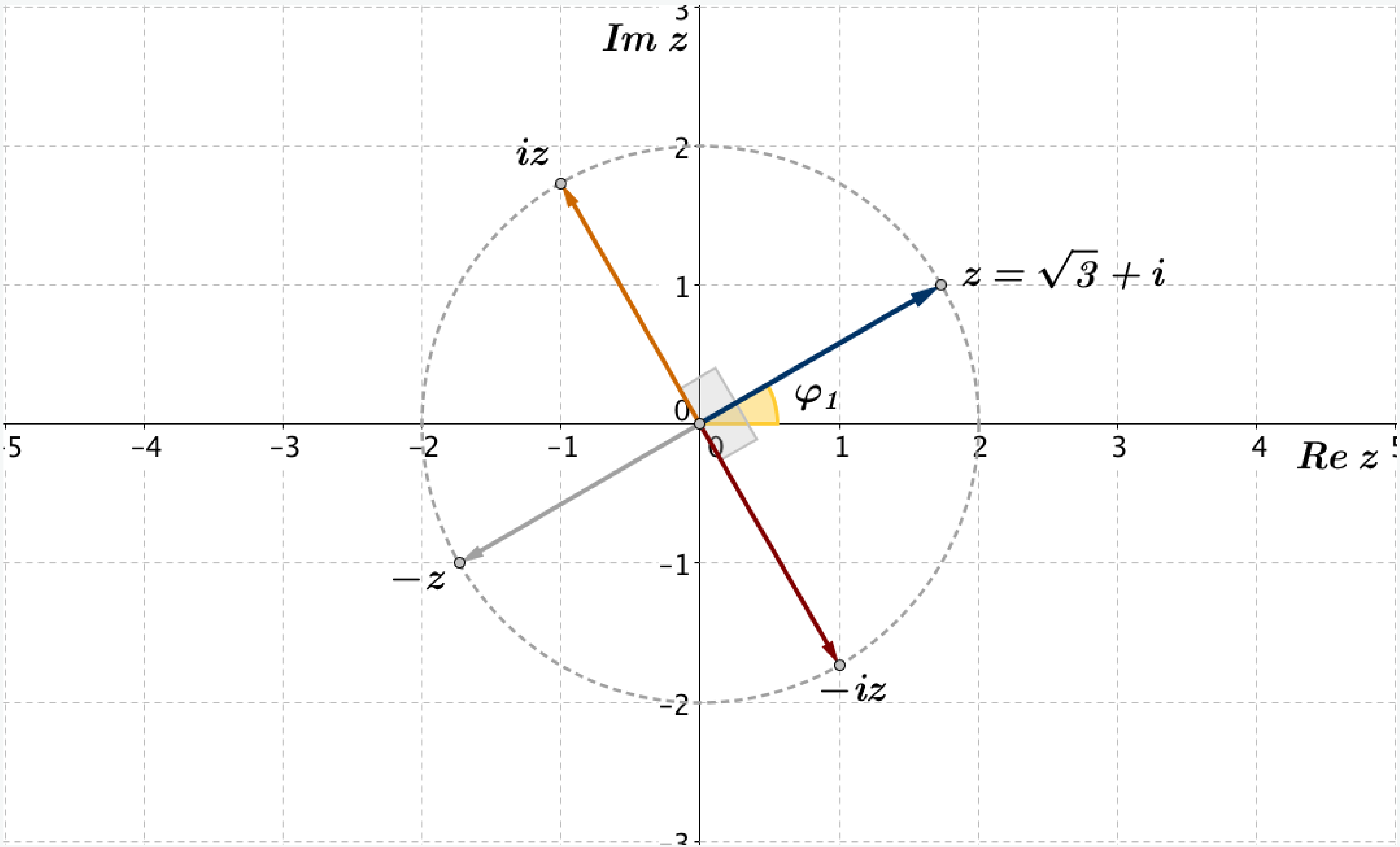


Abb. 1-1: Graphische Darstellung der Aufgabe am Beispiel einer komplexen Zahl $\sqrt{3} + i$ und ihrer Multiplikation mit i, -i und -1.

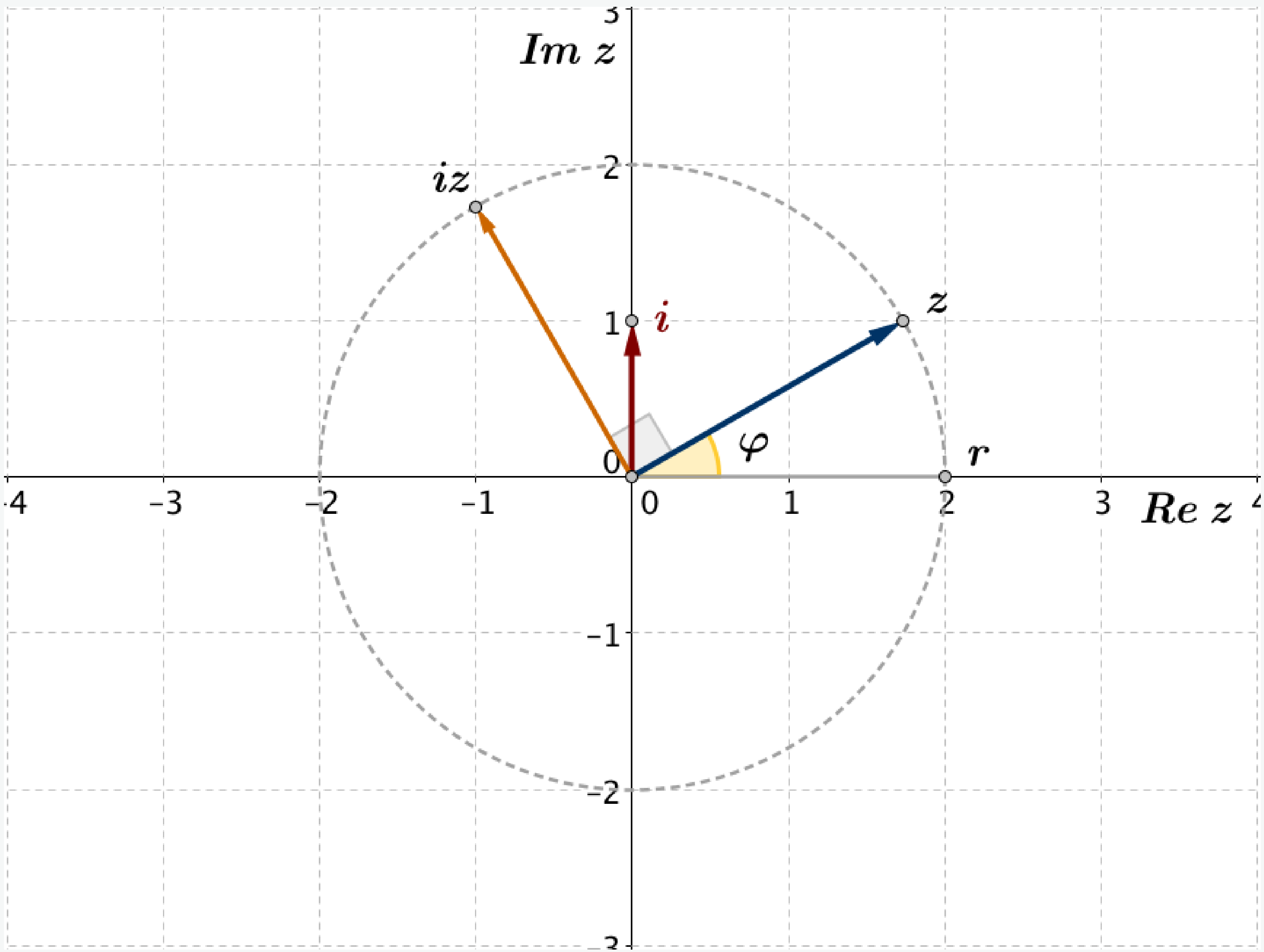


Abb. 1-2: Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit i entspricht einer Drehung des Zeigers z um den Winkel π/2

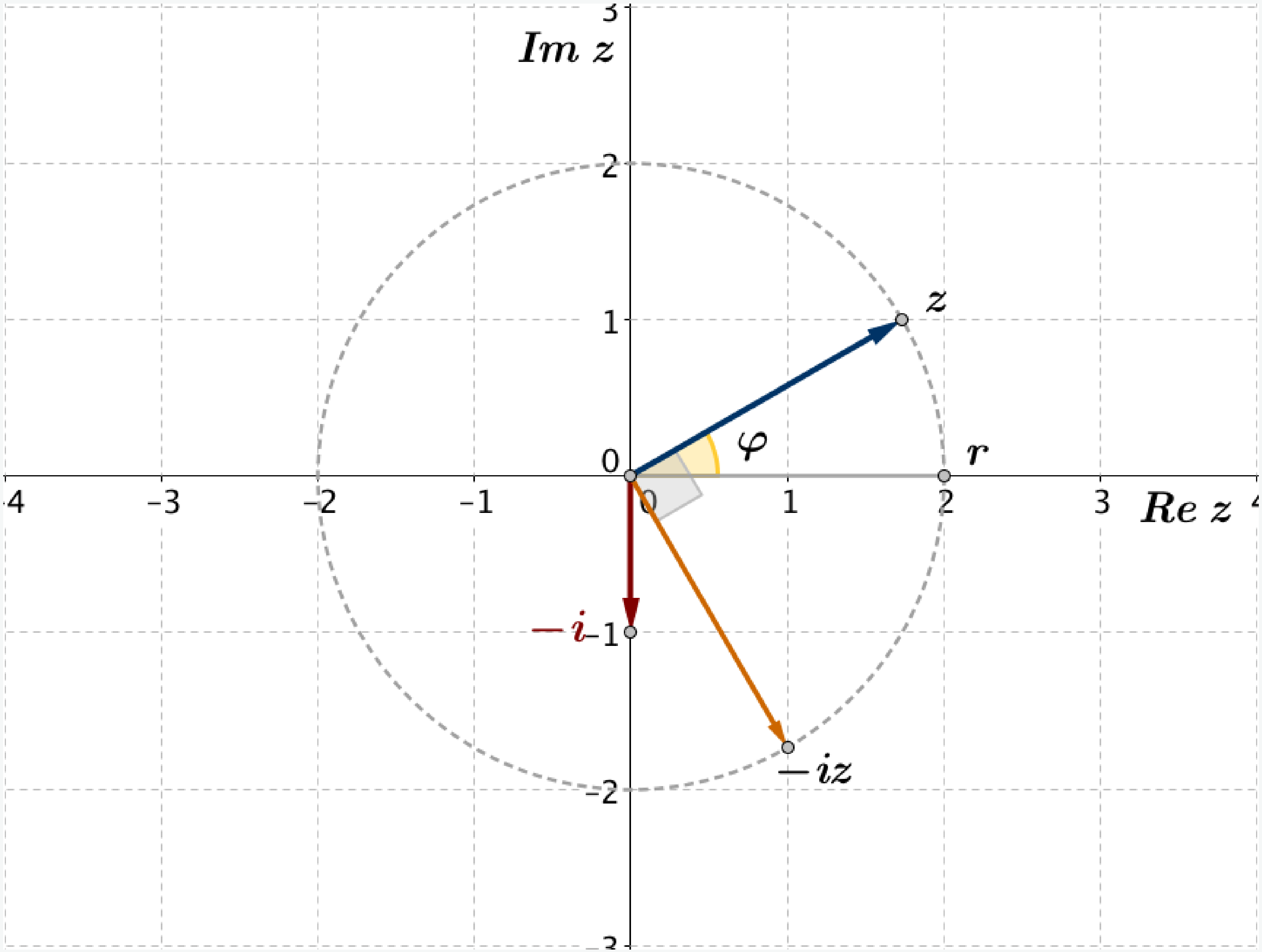


Abb. 1-3: Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit - i entspricht einer Drehung des Zeigers z um den Winkel - π/2

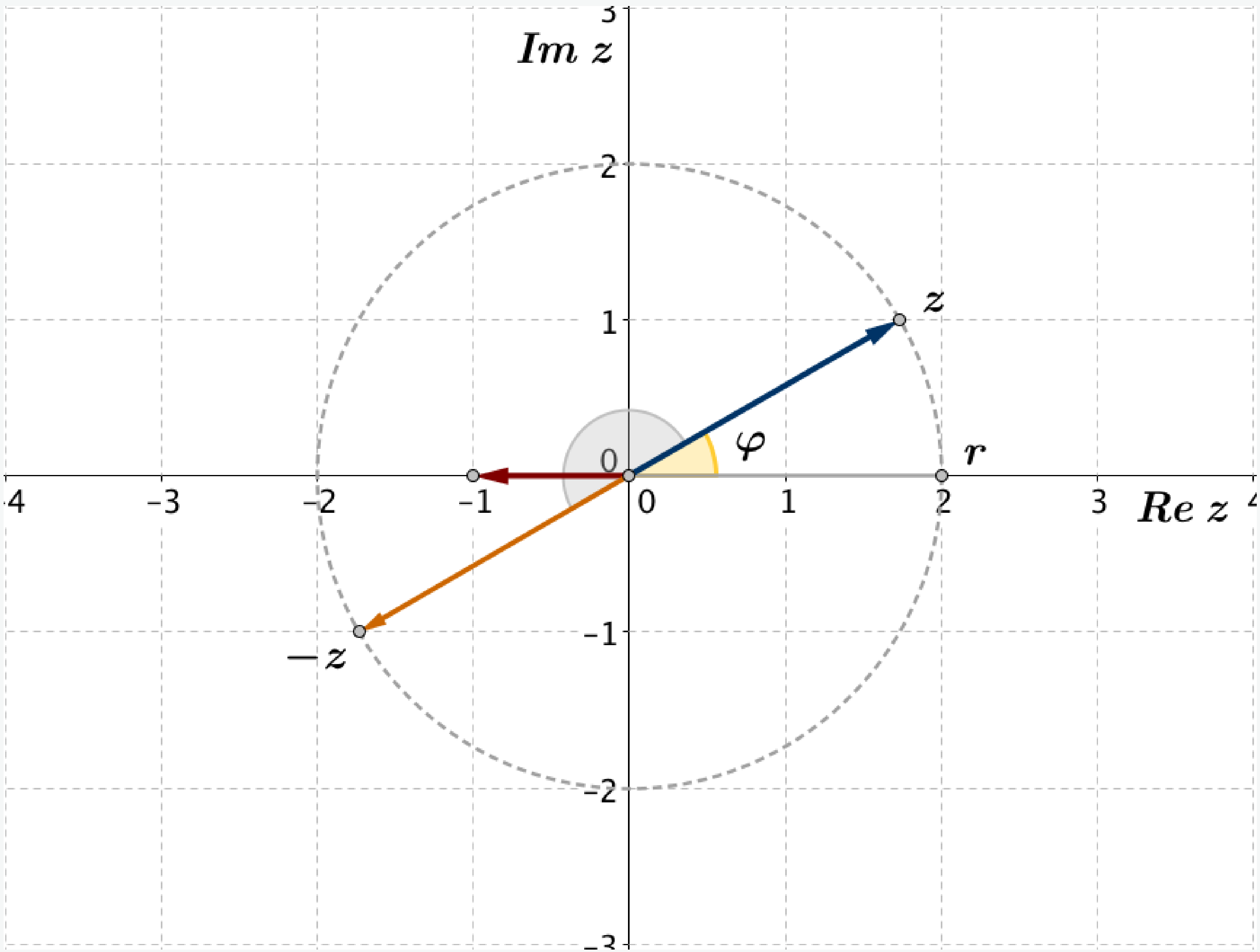


Abb. 1-4: Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit - 1 entspricht einer Drehung des Zeigers z um den Winkel π

$$z = \sqrt{3} + i = 2\,e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}, \qquad i = e^{\,i\,\frac{\pi}{2}}, \qquad -i = e^{-i\,\frac{\pi}{2}}, \qquad -1 = e^{\,i\,\pi}$$

$$i\,z = i\left(\sqrt{3} + i\right) = -1 + i\,\sqrt{3} = 2\,e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}\,e^{\,i\,\frac{\pi}{2}} = 2\,e^{\,i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = 2\,e^{\,i\,\frac{2}{3}\pi}$$

$$-i\,z = -i\left(\sqrt{3} + i\right) = 1 - i\,\sqrt{3} = 2\,e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}\,e^{-i\,\frac{\pi}{2}} = 2\,e^{\,i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)} = 2\,e^{-\frac{\pi}{3}\,i}$$

$$-z = -\left(\sqrt{3} + i\right) = -2\,e^{\,i\,\frac{\pi}{6}} = 2\,e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}\,e^{\,i\,\pi} = 2\,e^{\,i\,\frac{7}{6}\pi}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Betrag und den Argument der komplexen Zahl z_3

$z_3 = z_1 \cdot z_2$

$a)\quad z_1 = r_1 e^{i \varphi_1}, \qquad z_2 = 2$

$b)\quad z_1 = r_1 e^{i \varphi_1}, \qquad z_2 = -1$

$c)\quad z_1 = r_1 e^{i \varphi_1}, \qquad z_2 = -\frac{1}{2}$

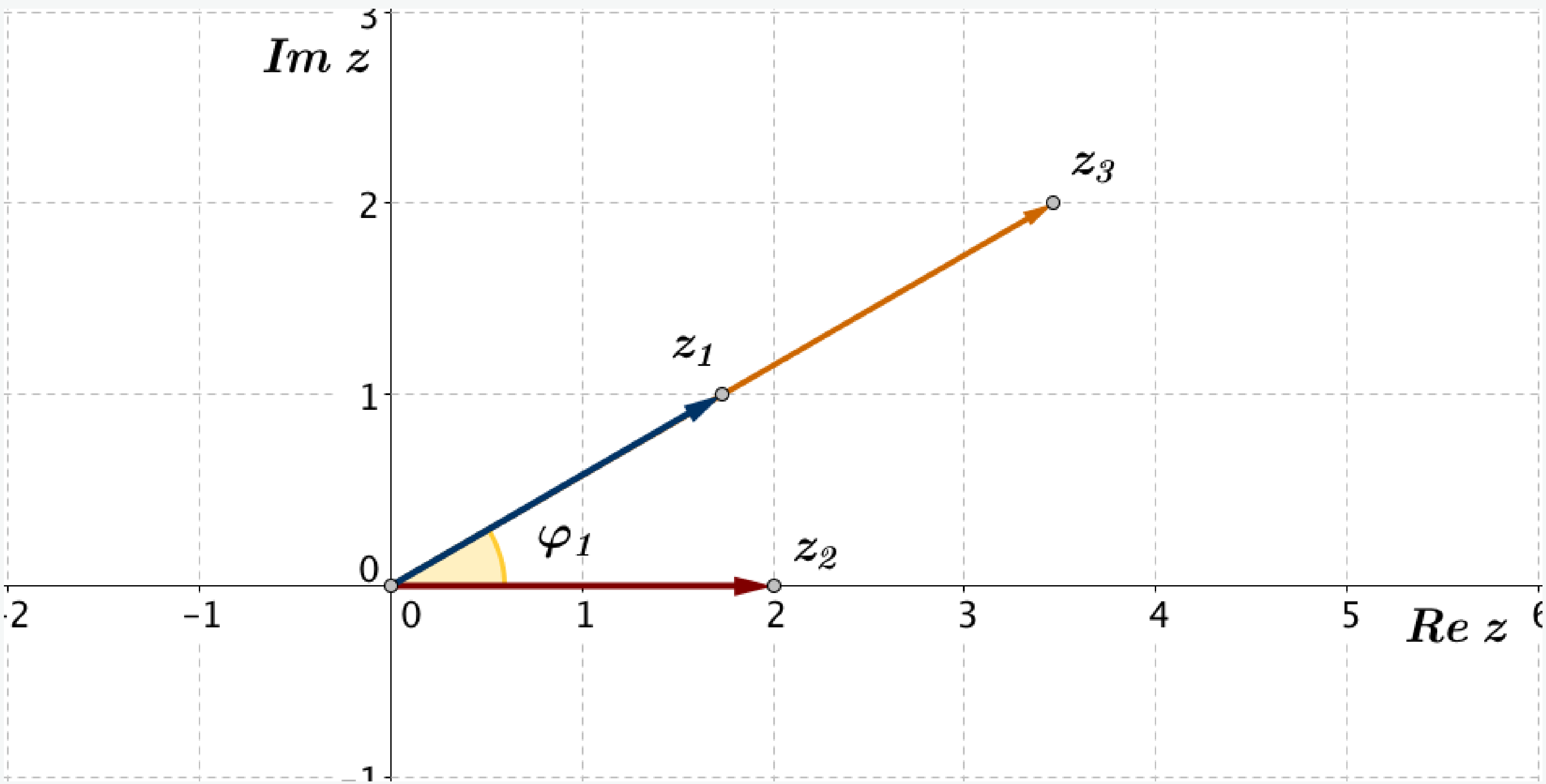


Abb. 2-1: Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer positiven reellen Zahl 2

Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit einer positiven reellen Zahl a bedeutet eine Streckung des Zeigers z um das a-fache, wobei der Winkel erhalten bleibt.

$$z_1 = r_1 e^{i \varphi_1}, \qquad z_2 = 2 = 2 e^{i\,0}, \qquad z_3 = z_1 \cdot z_2 = 2 z_1 = 2 r_1 e^{i \varphi_1 + i\,0}$$

$$|z_3| = 2 r_1, \qquad arg(z_3) = \varphi_1$$

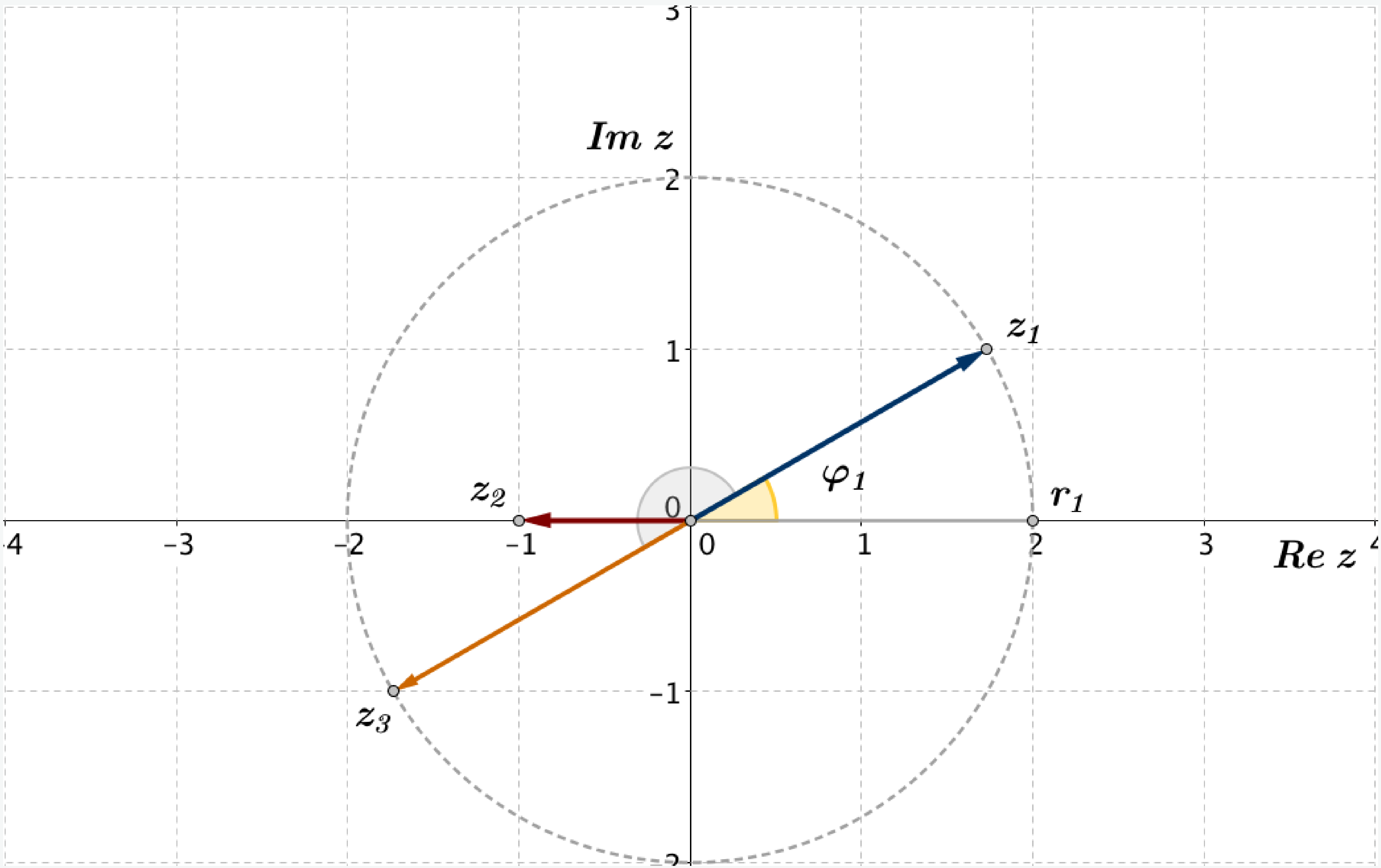


Abb. 2-2: Multiplikation einer komplexen Zahl mit der reellen Zahl -1

Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit -1 bedeutet eine Drehung des Zeigers z um 180°.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = -1 = e^{i\pi}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = -r_1 e^{i\varphi_1} = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\pi} = r_1 e^{i(\varphi_1 + \pi)},$$

$$|z_3| = r_1, \qquad arg(z_3) = \varphi_1 + \pi$$

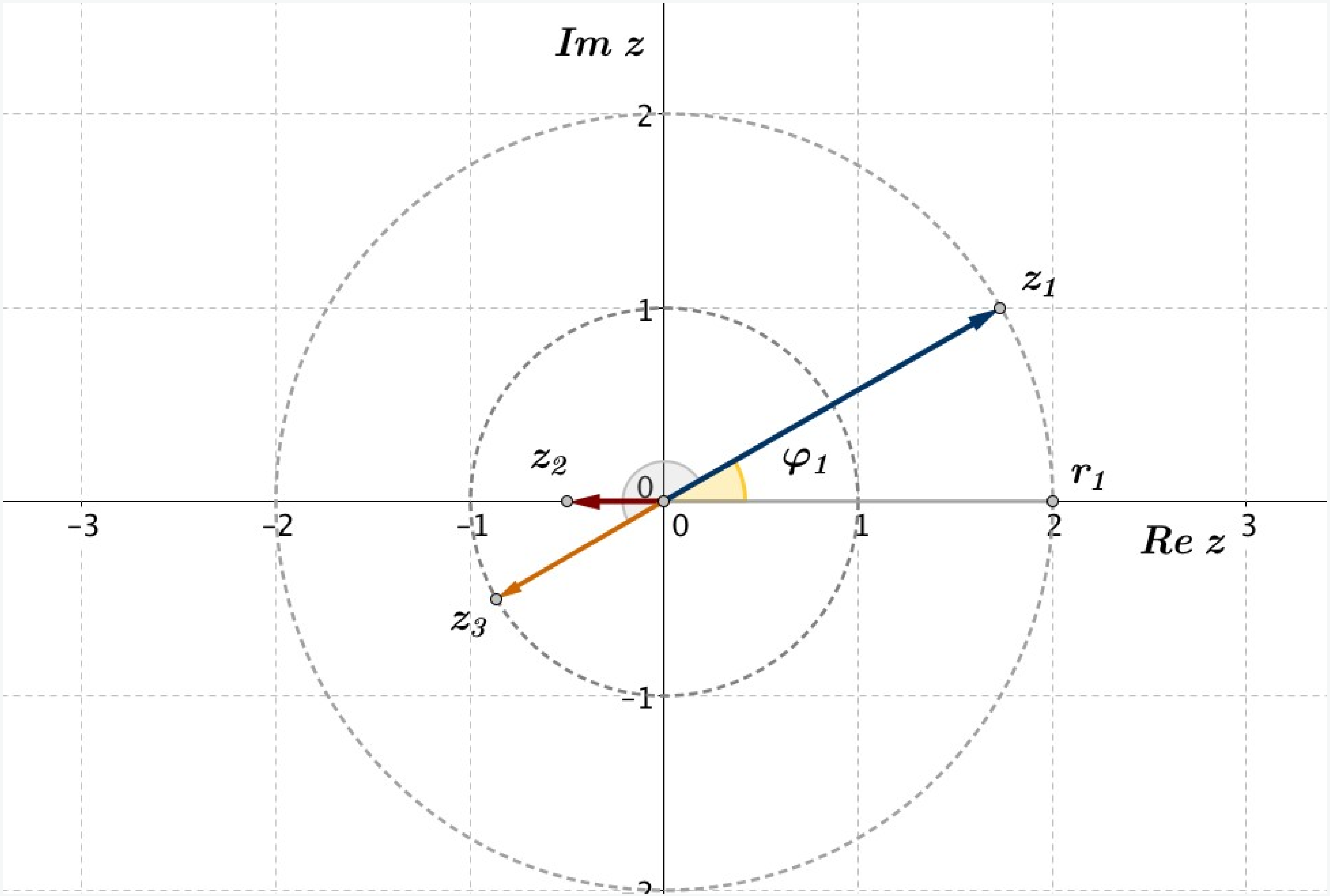


Abb. 2-3: Multiplikation einer komplexen Zahl mit der reellen Zahl -1/2

Die Multiplikation der komplexen Zahl z mit der negativen reellen Zahl a $(a < 0)$ bedeutet

- eine Streckung des Zeigers z um das $|\,a\,|$-fache
- eine Drehung des Zeigers $|\,a\,|\,z$ um 180°

z. B. $\quad a = -\dfrac{1}{2}:$

$$z_1 = r_1\, e^{i\,\varphi_1}, \qquad z_3 = -\frac{z_1}{2} = -\frac{1}{2}\, r_1\, e^{i\,\varphi_1} = \frac{1}{2}\, r_1\, e^{i\,(\varphi_1 + \pi)}$$

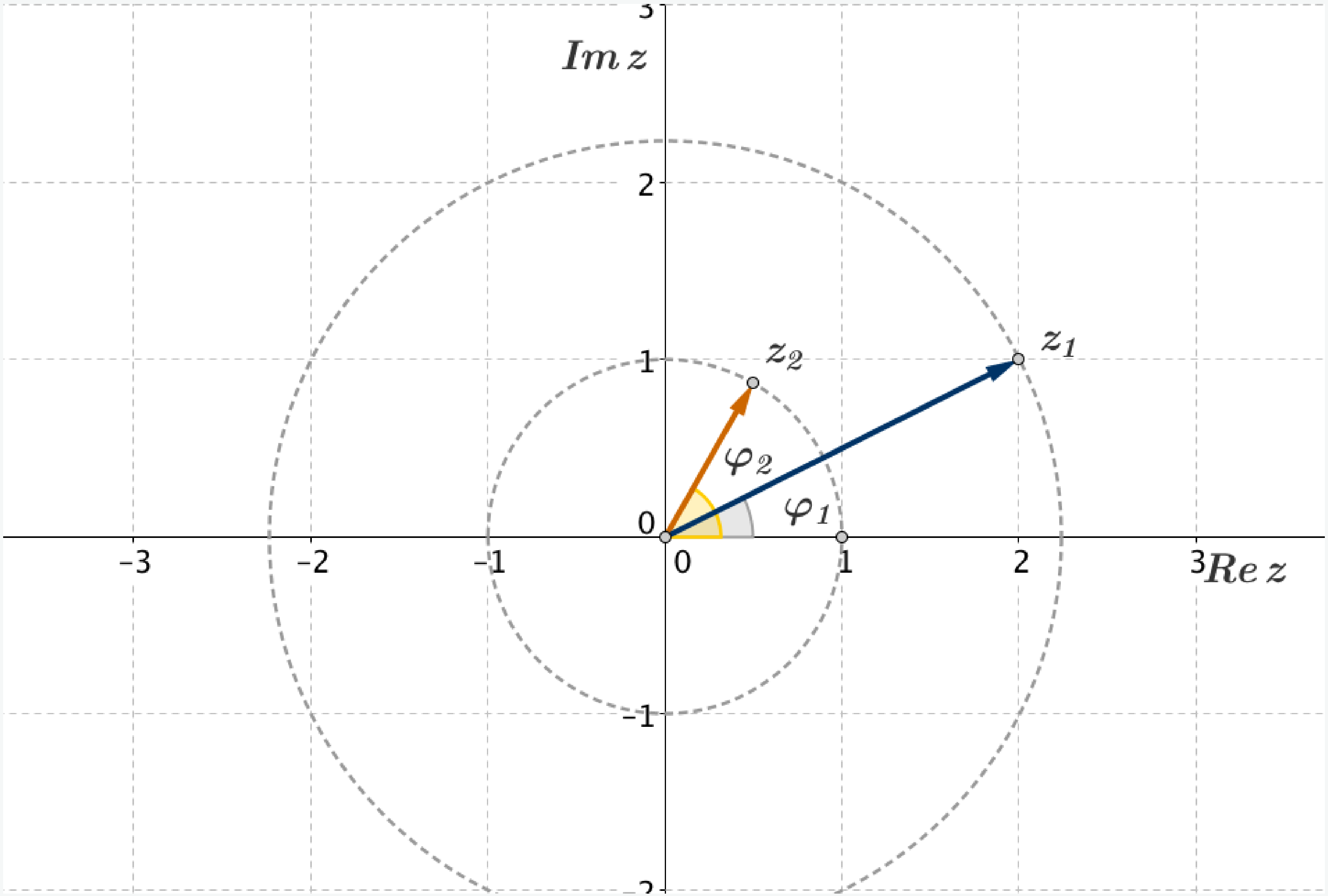


Abb. 2-4: Zur Multiplikation der komplexen Zahlen. Darstellung von zwei komplexen Zahlen, wobei eine den Betrag 1 hat.

$$z_1 = r\, e^{i\,\varphi_1}, \qquad z_2 = e^{i\,\varphi_2}, \qquad |\, z_2 \,| = 1$$

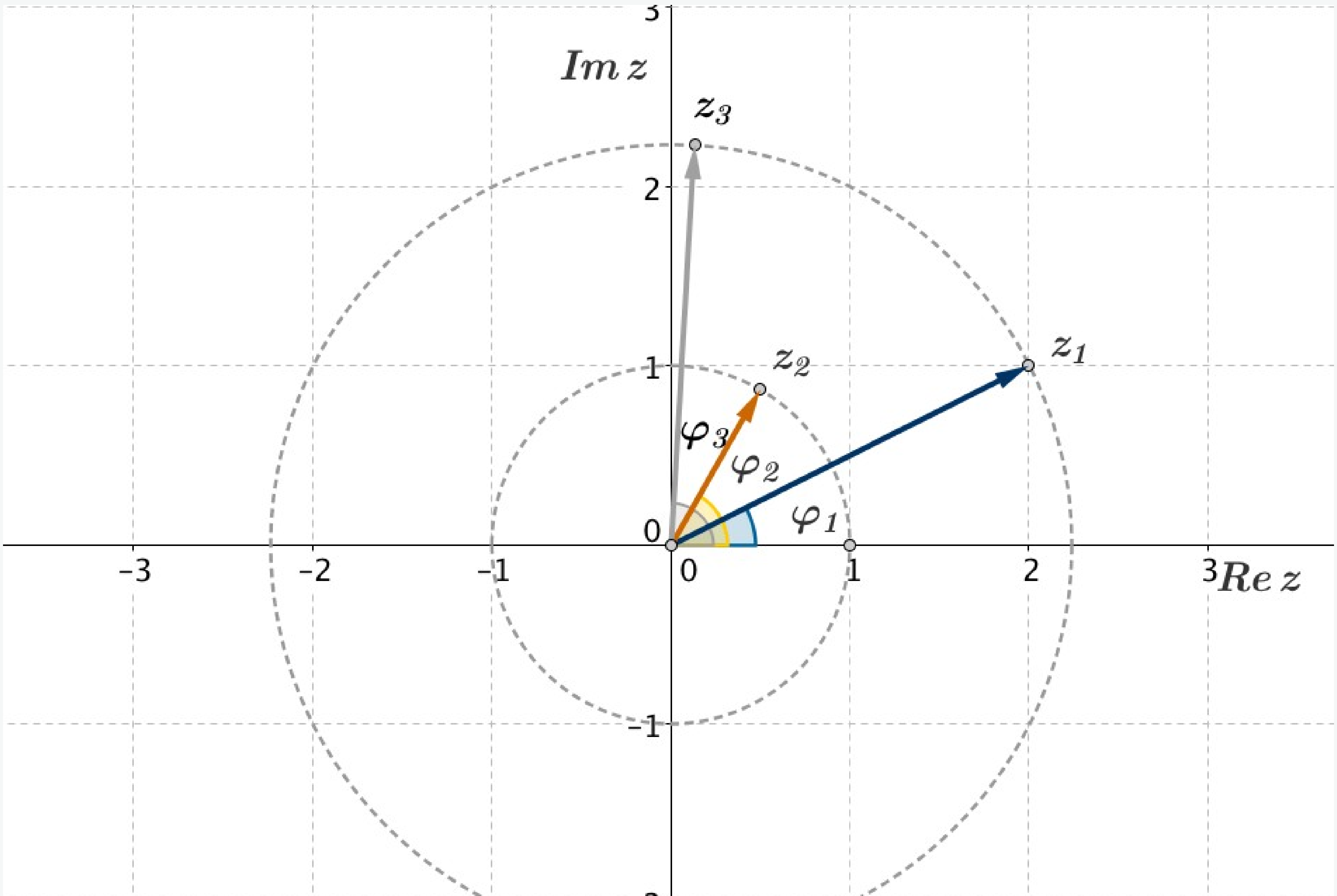


Abb. 2-5: Multiplikation der komplexen Zahl z mit der komplexen Zahl mit Betrag 1

Die Multiplikation der komplexen Zahl z mit der komplexen Zahl $exp\,(i\,\alpha)$ entspricht der Drehung des Zeigers um den Winkel α.

$$z_1 = r\,e^{i\,\varphi_1}, \qquad z_2 = e^{i\,\varphi_2}, \qquad z_3 = z_1 \cdot z_2 = r\,e^{i\,\varphi_3}, \qquad \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$|\,z_2\,| = 1, \qquad |\,z_1\,| = |\,z_3\,|$$

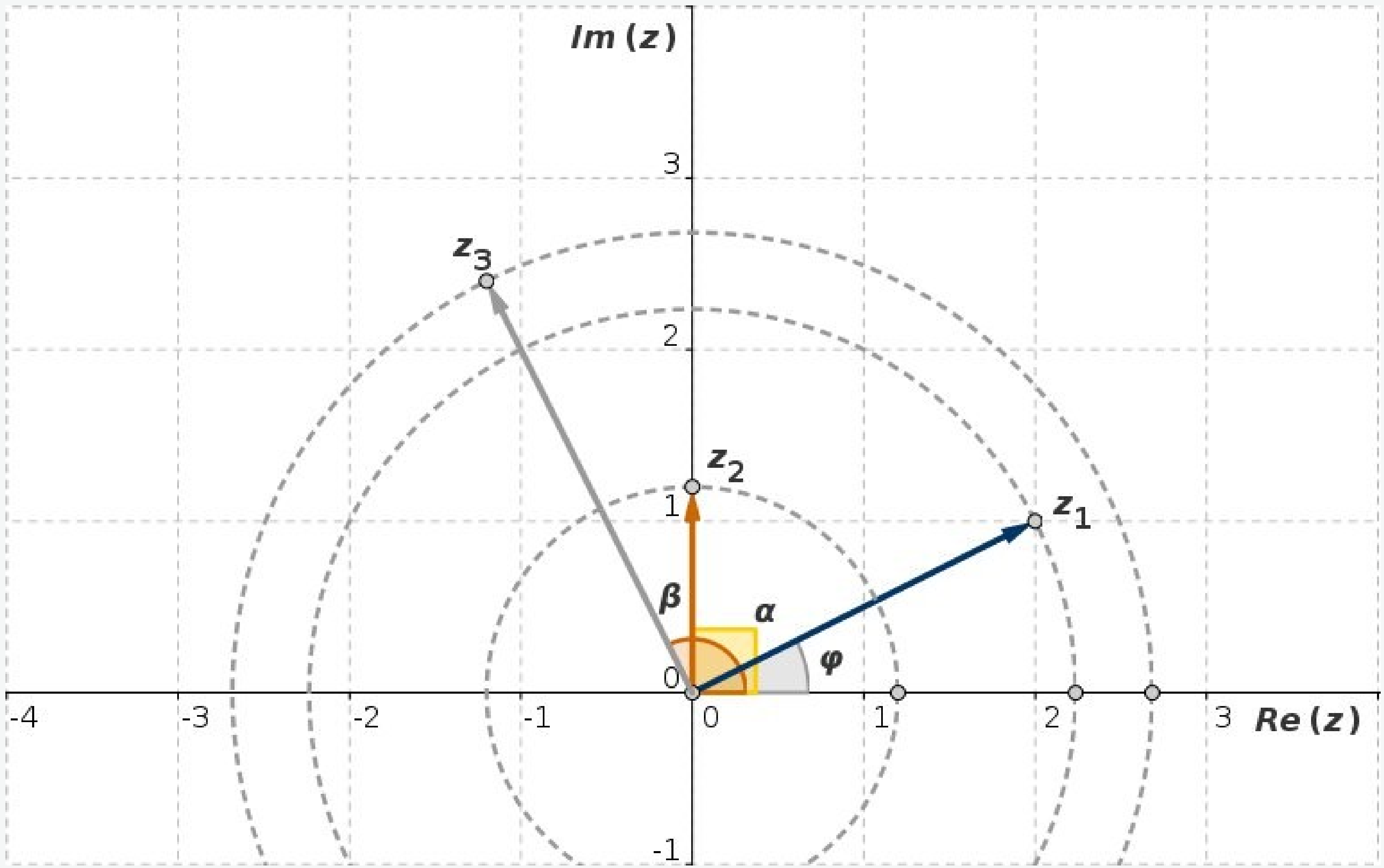


Abb. 3-1: Zur Multiplikation der komplexen Zahlen

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\alpha}, \qquad z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{i\beta}$$

$$r_3 = r_1 \cdot r_2, \qquad \beta = \varphi + \alpha$$

Zur Abbildung 3-1:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\alpha}, \qquad z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{i\beta}$$

$$r_3 = r_1 \cdot r_2, \qquad \beta = \varphi + \alpha$$

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi} = 2 + i = 2.24\, e^{i\,26.57^\circ}, \qquad r_1 = 2.24, \qquad \varphi = 26.57^\circ$$

$$z_2 = r_2 e^{i\alpha} = 1.2\, i = 1.2\, e^{i\,90^\circ}, \qquad r_2 = 1.2, \qquad \alpha = 90^\circ$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{i\beta} = 2.68\, e^{i\,116.57^\circ}$$

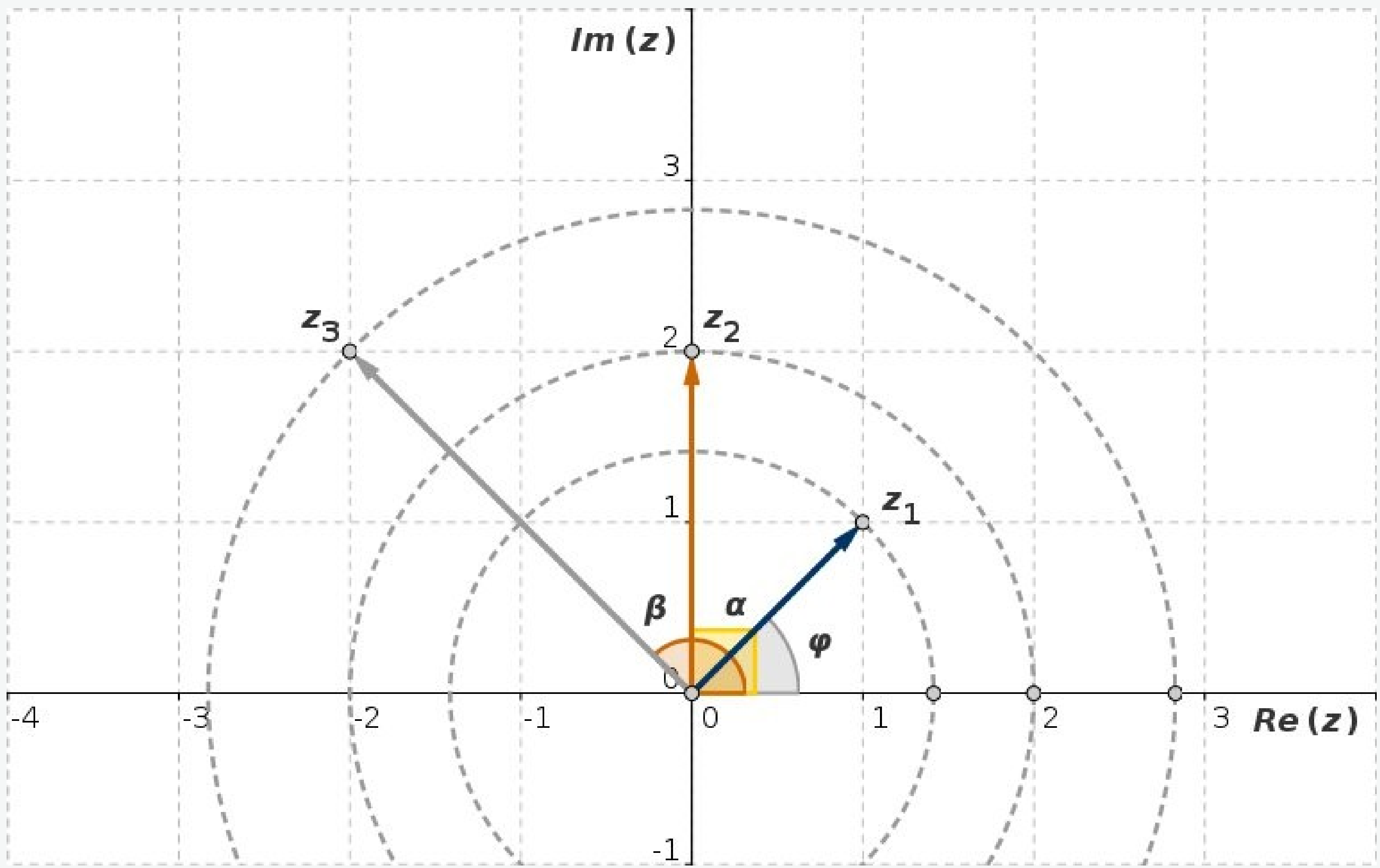


Abb. 3-2: Zur Multiplikation der komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\,45^\circ}, \qquad z_2 = 2\,i = 2\, e^{i\,90^\circ}, \qquad z_3 = -2 + 2\,i = 2\sqrt{2}\, e^{i\,135^\circ}$$

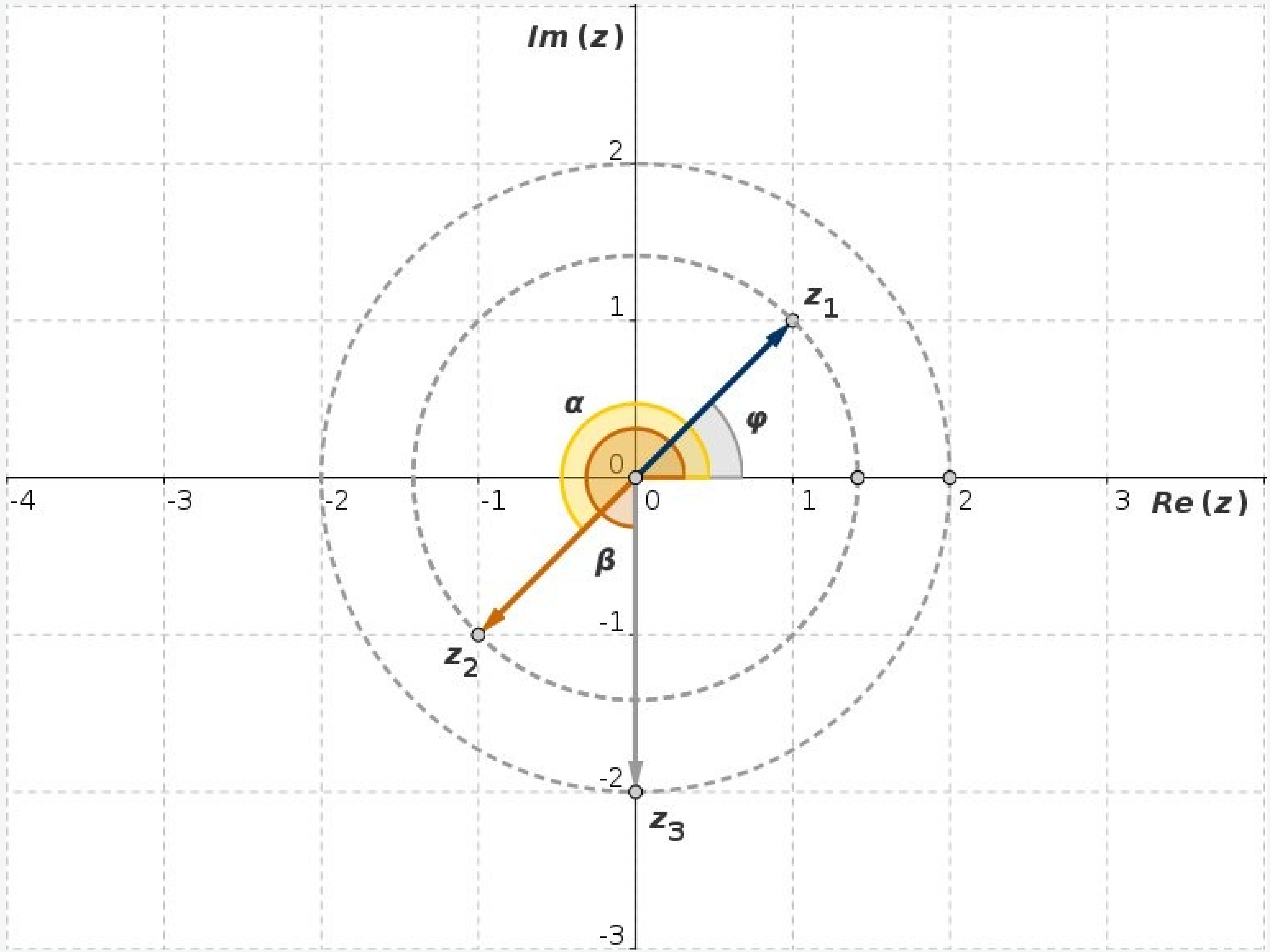


Abb. 3-3: Zur Multiplikation der komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\,45^\circ}, \qquad z_2 = -1 - i = \sqrt{2}\, e^{i\,225^\circ}, \qquad z_3 = -2\,i = 2\, e^{i\,270^\circ}$$

Definition 2:

Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{\,i\,(\varphi_1 - \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

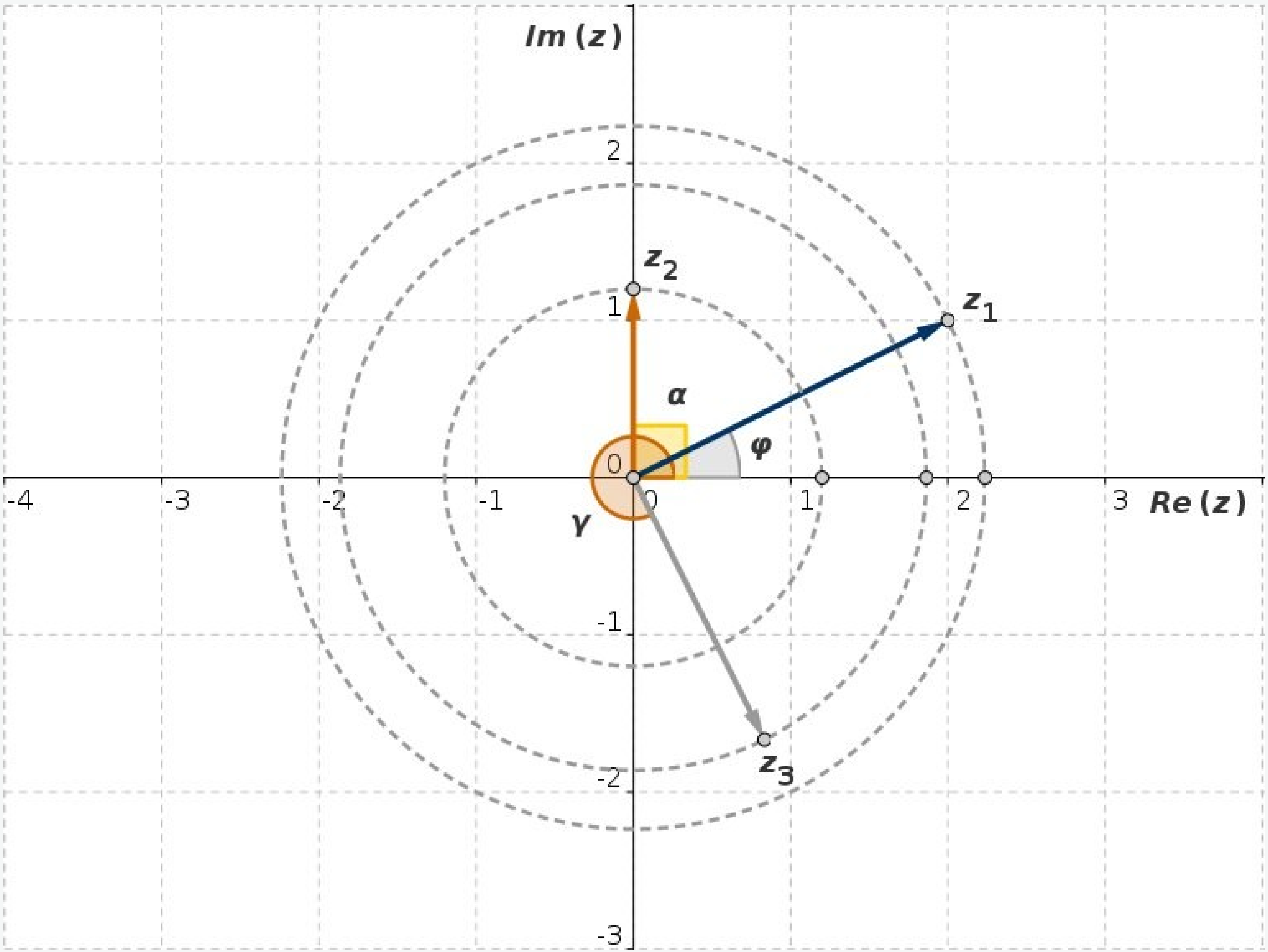


Abb. B4: Division zweier komplexen Zahlen

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\alpha}, \qquad z_3 = \frac{z_1}{z_2} = r_3 e^{i\gamma}$$

$$r_3 = \frac{r_1}{r_2}, \qquad \beta = \varphi - \alpha$$

Zur Abbildung B4:

$$z_1 = 2 + i = 2.24\, e^{i\, 26.57^\circ}, \qquad z_2 = 1.2\, i = 1.2\, e^{i\, 90^\circ}$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2.24}{1.2}\; e^{i\,(26.57^\circ - 90^\circ)\, 296.57} = 1.86\, e^{-i\, 63.43^\circ} =$$

$$= 1.86\, e^{i\, 296.57^\circ}$$

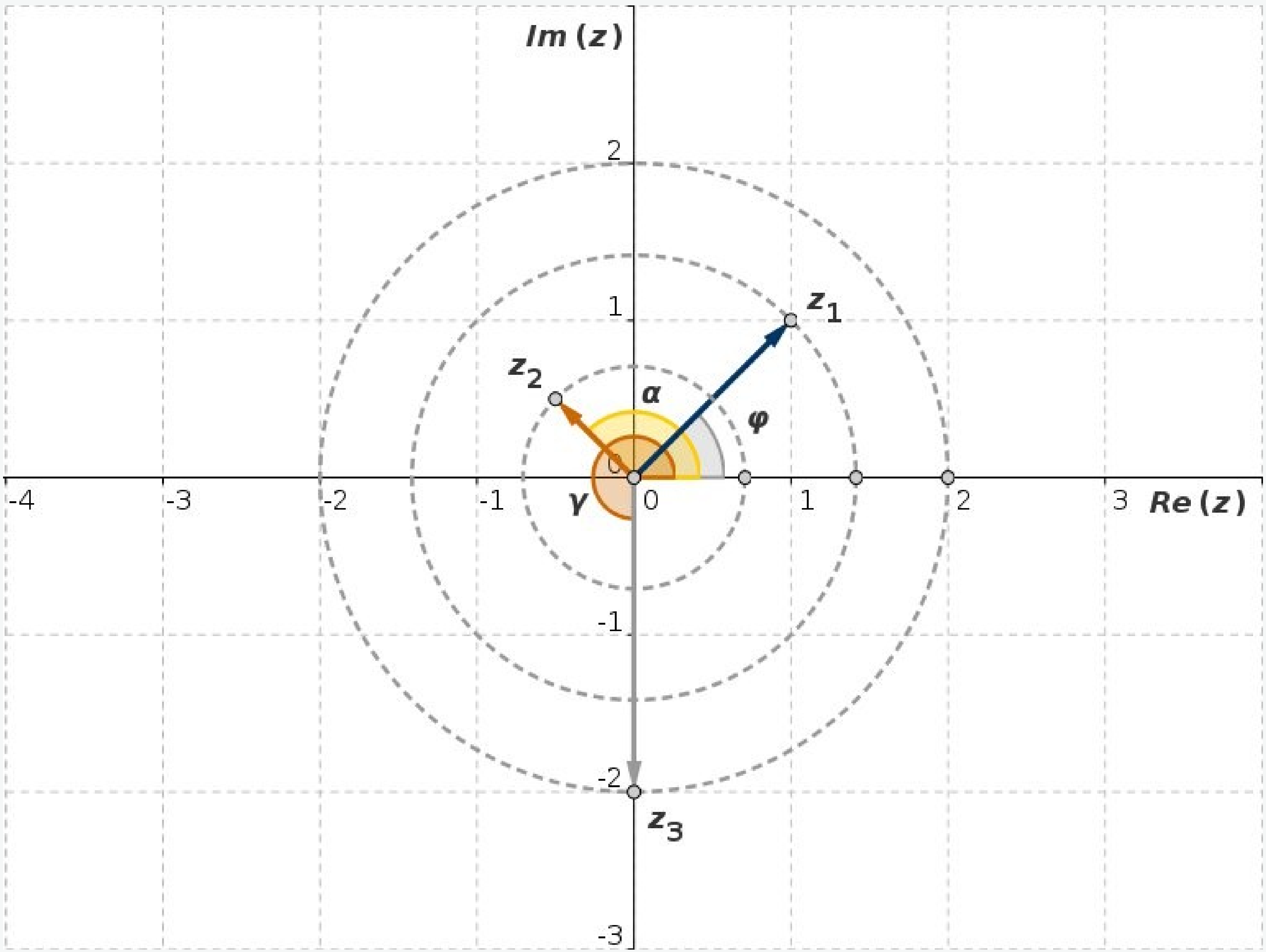


Abb. B5: Division zweier komplexen Zahlen

Zur Abbildung B5:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\, 45^\circ}, \qquad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\, 135^\circ}$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = -2\, i = 2\, e^{-i\, 90^\circ} = 2\, e^{i\, 270^\circ}$$

Berechnen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\dfrac{z_1}{z_2}$ mit den folgenden Zahlen:

Aufgabe 3:

$a)\quad z_1 = \cos 20^\circ + i\,\sin 20^\circ, \qquad z_2 = 2\left(\cos 40^\circ + i\,\sin 40^\circ\right)$

$b)\quad z_1 = 3\left(\cos(-5^\circ) + i\,\sin(-5^\circ)\right), \qquad z_2 = 5\left(\cos(-10^\circ) + i\,\sin(-10^\circ)\right)$

$c)\quad z_1 = \cos 250^\circ + i\,\sin 250^\circ, \qquad z_2 = \cos 300^\circ + i\,\sin 300^\circ$

$d)\quad z_1 = 3\left(\cos 190^\circ + i\,\sin 190^\circ\right), \qquad z_2 = 4\left(\cos 200^\circ + i\,\sin 200^\circ\right)$

Aufgabe 4:

$a)\quad z_1 = 2\,e^{i\,70^\circ}, \qquad z_2 = 4\,e^{i\,40^\circ}$

$b)\quad z_1 = 4\,e^{i\,20^\circ}, \qquad z_2 = 4\,e^{i\,50^\circ}$

$c)\quad z_1 = 15\,e^{i\,3^\circ}, \qquad z_2 = 2\,e^{-i\,12^\circ}$

Lösung 3:

$$a)\quad z_1 \cdot z_2 = 2\left(\cos 60^\circ + i\ \sin 60^\circ\right) \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos(340^\circ) + i\ \sin(340^\circ)\right)$$

$$b)\quad z_1 \cdot z_2 = 15\left(\cos 345^\circ + i\ \sin 345^\circ\right) \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}\left(\cos(5^\circ) + i\ \sin(5^\circ)\right)$$

$$c)\quad z_1 \cdot z_2 = \cos 190^\circ + i\ \sin 190^\circ \qquad \frac{z_1}{z_2} = \cos(310^\circ) + i\ \sin(310^\circ)$$

$$d)\quad z_1 \cdot z_2 = 12\left(\cos 30^\circ + i\ \sin 30^\circ\right) \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}\ \cos(350^\circ) + i\ \sin(350^\circ)$$

Lösung 4:

$$z_1 \cdot z_2 : \qquad a)\quad 8\, e^{i\,110^\circ}, \qquad b)\quad 16\ e^{i\,70^\circ}, \qquad c)\quad 30\ e^{i\,351^\circ}$$

$$\frac{z_1}{z_2} : \qquad a)\quad \frac{1}{2}\, e^{i\,30^\circ}, \qquad b)\quad e^{i\,330^\circ}, \qquad c)\quad 7.5\ e^{i\,15^\circ}$$

Berechnen Sie den Betrag und das Argument folgender Zahlen:

$$z_3 = z_1 \cdot z_2, \qquad z_4 = \frac{z_1}{z_2}$$

$$a)\quad z_1 = -4\, e^{i\,\frac{\pi}{3}}, \qquad z_2 = 2\, e^{i\,\frac{\pi}{6}}$$

$$b)\quad z_1 = 3\, e^{i\,\frac{\pi}{2}}, \qquad z_2 = -e^{i\,\frac{\pi}{3}}$$

$$c)\quad z_1 = -2\, e^{-i\,\frac{\pi}{6}}, \qquad z_2 = -4\, e^{-i\,\frac{\pi}{2}}$$

$$a)\quad z_1 = -4\,e^{\,i\,\frac{\pi}{3}}, \qquad z_2 = 2\,e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (-4)\cdot 2 \cdot e^{\,i\,\frac{\pi}{3}}\, e^{\,i\,\frac{\pi}{6}} = -8\; e^{\,i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = -8\; e^{\,i\,\frac{\pi}{2}} = 8\; e^{\,i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = 8\; e^{\,i\,\frac{3\pi}{2}}$$

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-4\,e^{\,i\,\frac{\pi}{3}}}{2\,e^{\,i\,\frac{\pi}{6}}} = -2\; e^{\,i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = -2\; e^{\,i\,\frac{\pi}{6}} = 2\; e^{\,i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 2\; e^{\,i\,\frac{7\pi}{6}}$$

$$|\,z_3\,| = 8, \quad arg\,(z_3) = \frac{3\pi}{2}, \qquad |\,z_4\,| = 2, \quad arg\,(z_4) = \frac{7\pi}{6}$$

$$\boxed{-1 = e^{\,i\,\pi}}$$

$$b)\quad z_1 = 3\,e^{i\,\frac{\pi}{2}}, \qquad z_2 = -\,e^{i\,\frac{\pi}{3}}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = -3\,e^{i\,\frac{\pi}{2}}\,e^{i\,\frac{\pi}{3}} = -3\;e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = -3\;e^{i\,\frac{5\pi}{6}} = 3\;e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)} =$$

$$= 3\;e^{i\,\frac{11\pi}{6}} = 3\;e^{-i\,\frac{\pi}{6}}$$

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3\,e^{i\,\frac{\pi}{2}}}{-\,e^{i\,\frac{\pi}{3}}} = -3\;e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = -3\;e^{i\,\frac{\pi}{6}} = 3\;e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 3\;e^{i\,\frac{7\pi}{6}}$$

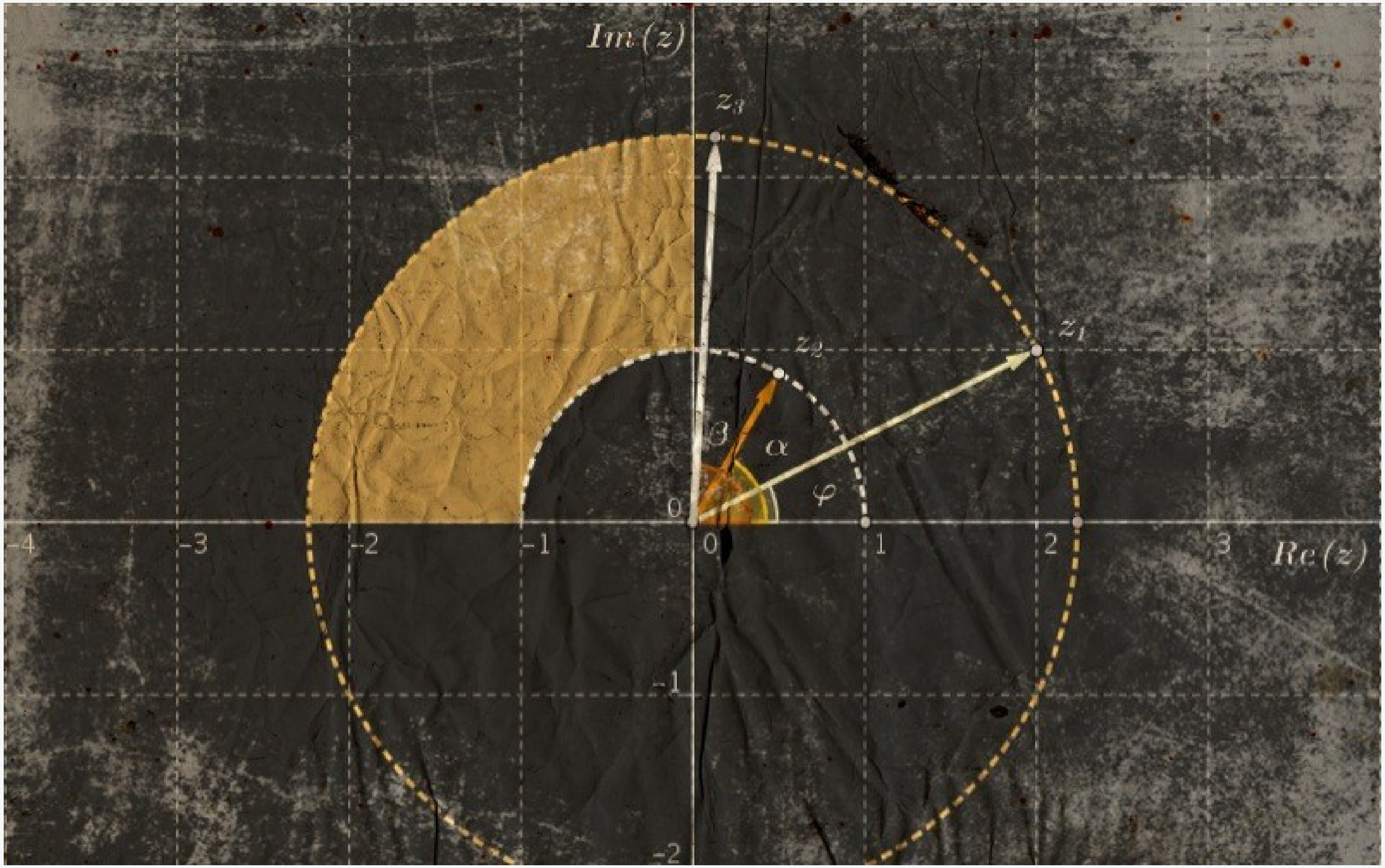
$$|\,z_3\,| = 3, \quad arg\,(z_3) = -\,\frac{\pi}{6}, \qquad |\,z_4\,| = 3, \quad arg\,(z_4) = \frac{7\pi}{6}$$

$$c)\quad z_1 = -2\,e^{-i\,\frac{\pi}{6}}, \qquad z_2 = -4\,e^{-i\,\frac{\pi}{2}}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (-2)\cdot(-4)\;e^{-i\,\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-i\,\frac{\pi}{2}} = 8\;e^{-i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = 8\;e^{-i\,\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-2\,e^{-i\,\frac{\pi}{6}}}{-4\,e^{-i\,\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}\;e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\;e^{i\,\frac{\pi}{3}}$$

$$|\,z_3\,| = 8, \quad arg\,(z_3) = -\,\frac{2\pi}{3}, \qquad |\,z_4\,| = \frac{1}{2}, \quad arg\,(z_4) = \frac{\pi}{3}$$


$Im(z)$
$Re(z)$
z_3
z_2
z_1
β
α
φ
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2