Einleitung, historischer Hintergrund

Der kürzester Weg zwischen zwei Wahrheiten im Reellen verläuft über das Komplexe. (Hadamard 1865-1963)

unmöglich, eingebildet, imaginär

Carl Friedrich Gauß

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.

Carl Friedrich Gauß

1-E4

Die anfänglichen Probleme der Mathematik bestanden darin, dass man einfache Rechenoperationen für manche Probleme nicht anwenden konnte. Die zuerst definierten Zahlen reichten irgendwann nicht mehr aus, um alle Probleme der Mathematik zu erfassen.

http://hua.umf.maine.edu/Reading_Revolutions/MagnaCarta/monk-at-workwl.jpg

Die mathematische Forschung im 16. Jahrhundert beschäftigte sich besonders mit der Lösung von polynomialen Gleichungen.

Eine polynomiale Gleichung n-ter Ordnung ist die Gleichung:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1, a_0$ sind reelle Zahlen,
n ist der maximale Index.

Lineare Gleichung: $n = 1 :$ $a_1 x + a_0 = 0$

Quadratische Gleichung: $n = 2 :$ $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

Qubische Gleichung: $n = 3 :$ $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

Scipione del Ferro (1465-1526)

Niccolo Tartaglia (1500-1557)

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Diese drei italienischen Mathematiker verkörpern die Geschichte der Lösung eines uralten Problems der Menschheit. Es handelt sich dabei um die Lösung kubischer Gleichungen, also um die Verallgemeinerung der damals schon seit Jahrhunderten bekannt gewesenen Lösung für quadratische Gleichungen.

Heute lernt jeder Schüler die quadratische Lösungsformel, *a*-*b*-*c*-Formel

$$x_{1,2} = \frac{1}{2\,a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right)$$

zur Bestimmung der Lösungen der Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Am Anfang des 16. Jahrhunderts kannte man diese Lösungsformel zwar, konnte allerdings noch nicht gut mit negativen Zahlen rechnen. Man hatte auch noch kein Verständnis dafür, dass eine quadratische Gleichung zwei Lösungen hat.

http://wapedia.mobi/de/Luca_Pacioli

Doch wie stand es nun mit Gleichungen höheren Grades?

Der Franziskanermönch Luca Pacioli (1445-1514) hatte 1494 in seinem Werk zur Mathematik noch behauptet, Gleichungen der Form

$$a\,x^3 + cx = d\,, \qquad a\,x^3 + d = 0$$

könnten rechnerisch nicht aufgelöst werden.

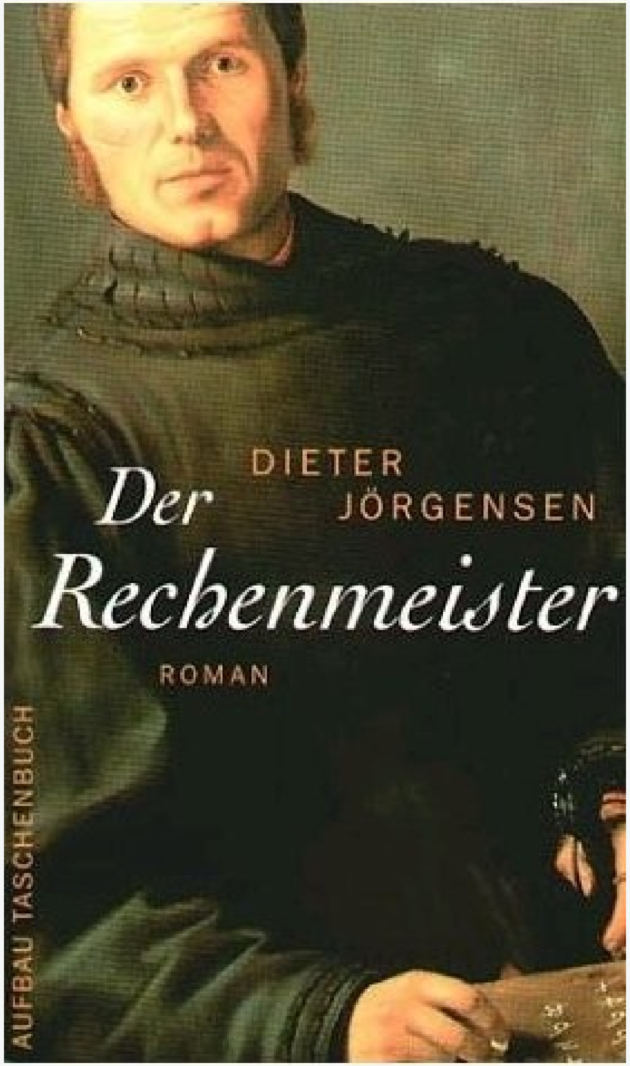
Portrait Luca Paciolis, gemalt von Jacopo de Barbari, 1495

Luca Pacioli: italienischer Mathematiker und Franziskaner. Sein Buch “Summa de Arithmetica . . . “ 1494 gilt als größte mathematische Arbeit der Renaissance. Es enthält Abhandlungen aus den Bereichen Geometrie, Buchhaltung, Proportionslehre und mehr. Auch lineare und quadratische Gleichungen werden behandelt. Die Hypothese von Pacioli, dass kubische Gleichungen nicht rechnerisch exakt gelöst werden können, wurde erst 1535 widerlegt.

Niccolo Tartaglia, italienischer Rechenmeister

Niccolo Tartaglia war Rechenmeister in seiner Heimatstadt Brescia sowie u.a. in Verona und Venedig. Anlässlich eines Rechenwettstreits beschäftigte er sich intensiv mit dem Lösen kubischer Gleichungen. Die von Tartaglia gefundene Lösungsformel für derartige Gleichungen ist heute unter dem Namen cardanische Formel bekannt. Diese Formel brachte erstmals grundsätzlich neue Einsichten über algebraische Gleichungen über den antiken Kenntnissstand hinaus.

(Duden, Mathematik, Basiswissen)



Der Rechenmeister ist der 1999 erschienene Erstlingsroman des Schriftstellers Dieter Jörgensen über das Leben des Mathematikers Nicolo Tartaglia in Venedig, von der Zeit seiner Ankunft in der Lagunenstadt bis zum Verlust des berühmten Wettstreits mit Lodovico Ferrari und Gerolamo Cardano im August 1548.

(Wikipedia)

http://www.panoramio.com/photos/original/9163725.jpg

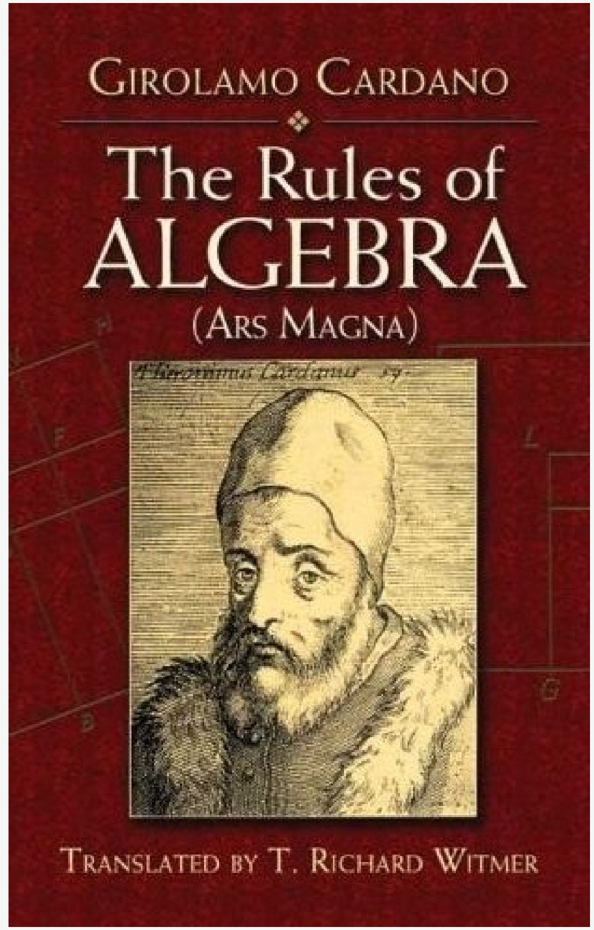
Monument, Niccolo Tartaglia, Brescia

Gerolamo Cardano war italienischer Mathematiker, Philosoph und Arzt und gilt als einer der großen Universalgelehrten der Hochrenaissance.

Gerolamo Cardano arbeitete auf dem Gebiet der Algebra und beschäftigte sich insbesondere mit dem Lösen kubischer Gleichungen. Die nach ihm benannte Lösungsformel (die cardanische Formel) stammt vom venezianischen Rechenmeister Niccolo Tartaglia.

Cardanos Verdienste um die Entwicklung der Algebra sind unbestritten. In einer Zeit, in der man bei Gleichungen negative Glieder vermied, rechnete er unbekümmert mit komplexen Zahlen.

(Duden, Mathematik, Basiswissen)



http://www.amazon.com/Rules-Algebra-Magna-Dover-Mathematics/dp/0486458733/ref=pd_bxgy_b_img_b

Dieses Buch, das erst 1545 erschien, ist der Grundstein in der Geschichte der Mathematik. Es enthält die erste Enthüllung der Prinzipien zum Lösen von kubischen und biquadratischen Gleichungen.

Rafael Bombelli (1530-1572)

Dass es durchaus Sinn hatte, mit neuen Zahlen formal zu rechnen, erkannte als erster Rafael Bombelli.

Ursprünglich als Ingenieur ausgebildet war er viele Jahre mit der Urbarmachung von Land in Mittel- und Süditalien beschäftigt. Algebraischen Studien widmete sich Bombelli in der Freizeit. In seiner einzigen Veröffentlichung, der 1572 erschienenen “Algebra”, fasste er das algebraische Wissen seiner Zeit zusammen und gab als Erster die Regeln für die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen an. Mit ihrer Hilfe konnte er zeigen, dass die allgemeine Lösungsformel von Cardano für kubische Gleichnungen sogar dann die richtigen reellen Lösungen liefert, wenn in ihr Wurzeln negativer Zahlen auftreten.

Die Geschichte der komplexen Zahlen war drei Jahrhunderte lang dadurch geprägt, dass sie in Mathematikerkreisen in Frage gestellt wurden. Sie wurden als Phantasiegebilde des menschlichen Geistes bezeichnet. Dies wird immer wieder auch an den Adjektiven deutlich, die mit diesen Zahlen verbunden werden. Berühmte Mathematiker nennen sie u. a. *unmöglich*, *eingebildet* und *imaginär*.

Anlass für eine Erweiterung des Zahlenbereichs geben Gleichungen, die mit den bis dahin bekannten Zahlen nicht zu lösen sind. So werden die negativen Zahlen zu den natürlichen Zahlen hinzugefügt, damit auch eine Gleichung wie

$$x + 27 = 19$$

eine Lösung bekommt. Genauso führt man die reellen Zahlen ein, um die Lösung der Gleichung

$$x^2 - 2 = 0$$

zu bestimmen.

Ändern wir das konstante Glied $-2 \to 1$ in der Gleichung, stehen wir vor einem Dilemma, da im Reellen keine Lösung für eine solche Gleichung gibt. Es gibt keine reelle Zahl, die die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1$$

erfüllt.

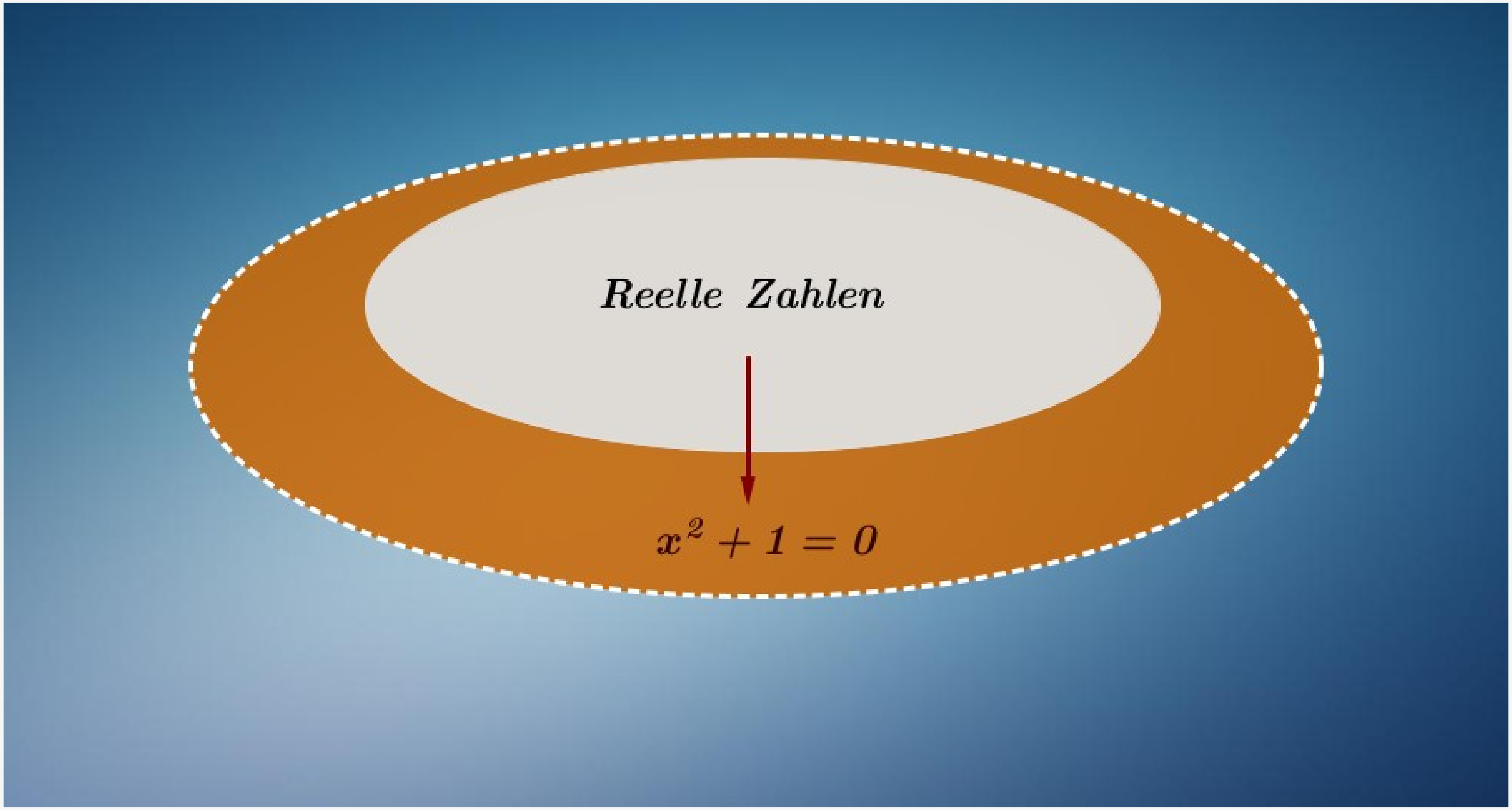
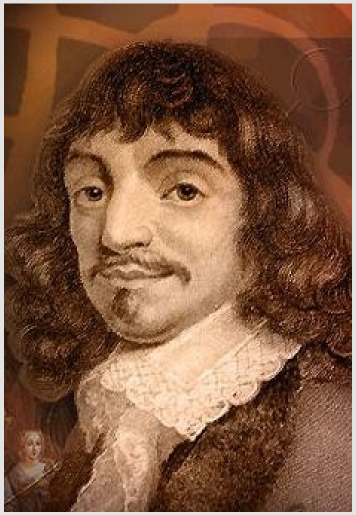


Abb. 1: Erweiterung des Reellen in Hinblick auf die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 + 1 = 0$

Wir ergänzen die Menge der reellen Zahlen um eine weitere Stufe, um alle quadratischen Gleichungen lösen zu können.



René Descartes (1596-1650)

Eine einfache quadratische Gleichung

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1$$

liefert uns zwei Lösungen: $+\sqrt{1}\,, \quad -\sqrt{1}$

Eine quadratische Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1$$

liefert uns zwei merkwürdige Ausdrücke, die scheinbar keinen Sinn haben:

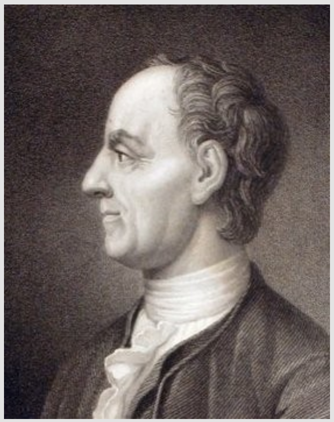
$$+\sqrt{-1}\,, \quad -\sqrt{-1}$$

Descartes glaubte, die Quadratwurzel aus negativen Zahlen seien noch sinnloser als die negativen Zahlen selbst, und gab ihnen den Namen imaginäre Zahlen.

Gottfried Wilhelm Leibnitz
(1646-1716)

. . . "eine wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes – beinahe ein Zwitter zwischen Sein und Nicht-Sein"

Leibnitz glaubte, dass $\sqrt{-1}$ eine seltsame Mischung zwischen Sein und Nicht-Sein sei, so wie ein Kreuz zwischen 1 (Gott) und 0 (Nichts) in seinem binären Schema. Er verglich diese Zahl mit dem Heiligen Geist: Beide haben eine kaum substantielle Existenz.



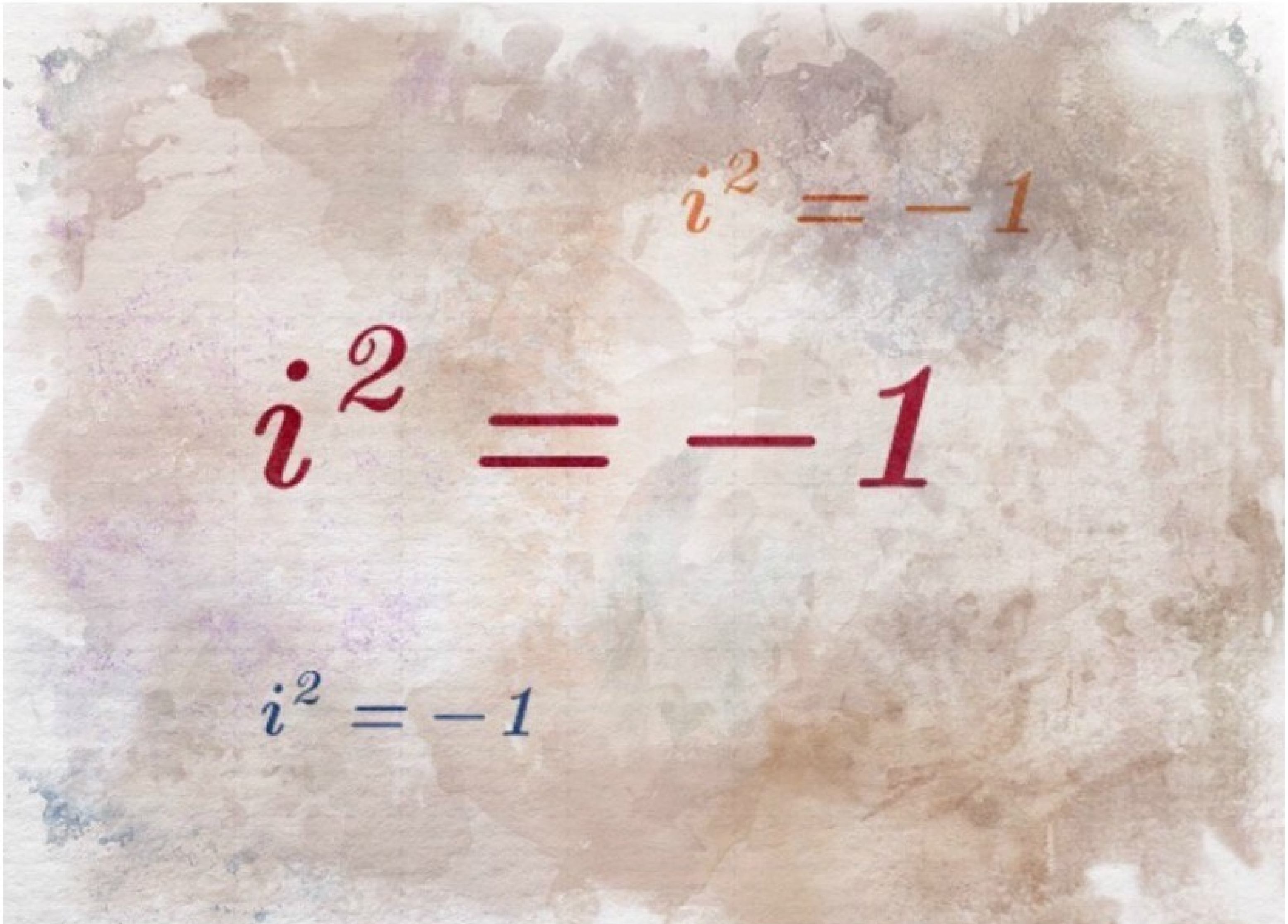
Leonhard Euler
(1707-1783)

$$x^2 = -1$$

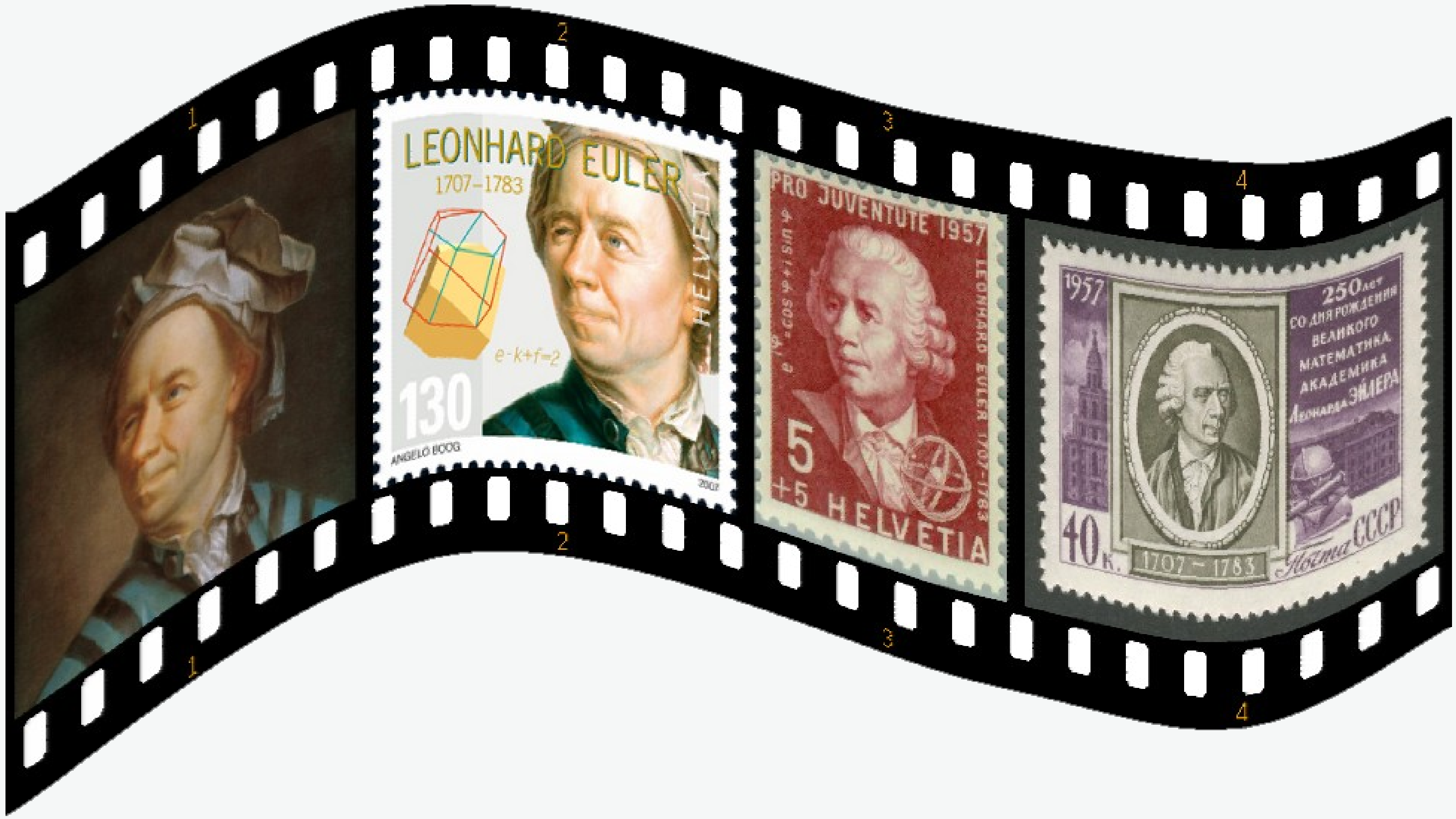
Im Bereich der reellen Zahlen hat diese Gleichung keine Lösung. Deswegen wurde eine neue Zahl eingeführt, die eine Lösung dieser Gleichung ist. Da es diese Zahl unter den bisher bekannten reellen Zahlen nicht gab, wurde sie eine imaginäre (nicht existierende) Einheit genannt und mit dem Symbol ***i*** bezeichnet.

Das Symbol für die imaginäre Einheit wurde 1777 von Leonhard Euler eingeführt:

$$\boxed{i^2 = -1}$$


$i^2 = -1$
$i^2 = -1$
$i^2 = -1$

Leonhard Euler (1707-1783)



Leonhard Euler ist das mathematische Genie des 18. Jahrhunderts mit der unfassbaren Produktivität von über 800 wissenschaftlichen Aufsätzen, von denen die Hälfte geschrieben wurde, nachdem er 1766 vollständig erblindet war.

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Carl Friedrich Gauß war ein bedeutender deutscher Mathematiker und Wissen-Schaftler. Er gilt als "Wunderkind" und erbrachte wichtige Leistungen auf verschiedenen Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie und Geodäsie. Seine Arbeiten für die weitere Entwicklung der Theorie komplexer Zahlen waren entscheidend zu Beginn des 19. Jahrhunderts. Er gibt eine geometrische Deutung komplexer Zahlen an, die er als Punkte einer Ebene, Gaußsche Zahlenebene, auffasst.

Carl Friedrich Gauß

http://www.w-volk.de/museum/gauss16.jpg

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Vielfach wird die imaginären Einheit im Sinne von

$$i = \sqrt{-1}$$

verstanden. Diese Darstellung ist nur als formale Schreibweise aufzufassen, da die Wurzel im bisherigen Sinne nur für nicht-negative reelle Zahlen definiert wurde. Es gilt nicht die Gleichung:

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = +1$$

Deshalb kann ***i*** nicht einfach als $\sqrt{-1}$ definiert werden.

Definition einer imaginären Zahl:

$$\boxed{i\,b\,, \quad (i\,b)^2 = i^2 b^2 = -b^2 < 0 \quad b \in \mathbb{R}\,, \quad b \neq 0}$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Die Normalform der quadratischen Gleichung lautet

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (p,\ q \in \mathbb{R})$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$p = -4, \qquad q = 5, \qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

Im Reellen hat diese quadratische Gleichung keine Lösung. Graphisch bedeutet das, dass es keine Schnittpunkte der Funktionskurve mit der x-Achse gibt.

Die Lösung schreibt man dann

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

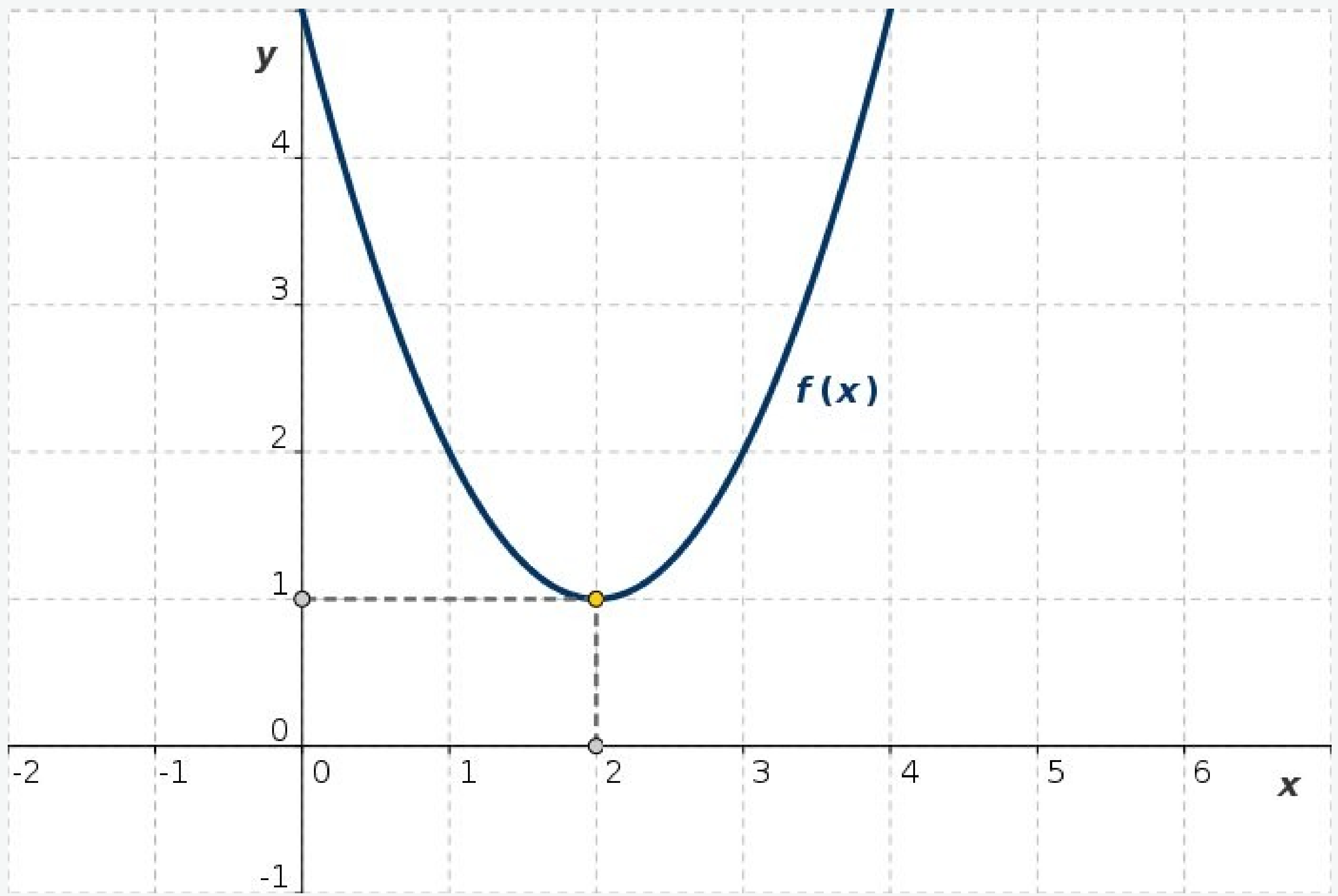


Abb. 2: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5$


i