Funktionen: *Aufgaben*

Inhaltsverzeichnis

1. Funktionen: Grundbegriffe, Eigenschaften

1.1. Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion

Aufgabe 1 Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen; dabei sind a, b und c reelle Parameter.

$$a)\quad f(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

$$b)\quad f(x) = \frac{a}{x-4}\,, \qquad g(x) = \frac{b}{x^2-4}\,, \qquad h(x) = \frac{x}{x^2-b^2}$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der folgenden Funktionen $(a, b, c \in \mathbb{R})$

$$a)\quad f(x) = 3 - x, \qquad g(x) = x^2 - 2\,,$$

$$b)\quad f(x) = 2x^4 + x^2 + 3\,, \qquad g(x) = 3x^5 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 1\,, \qquad h(x) = ax^5 - bx^4 + c\,,$$

$$c)\quad f(x) = e^x\,, \qquad g(x) = \frac{2}{3}e^x\,, \qquad h(x) = e^x - 4\,,$$

$$d)\quad f(x) = a\,e^x\,, \qquad g(x) = e^x + b\,,$$

$$e)\quad f(x) = e^{-x}\,, \qquad g(x) = 2\,e^{-x} + 3\,,$$

$$f)\quad f(x) = \sqrt{x-3}\,, \qquad g(x) = 4\sqrt{x+2}\,,$$

$$g)\quad f(x) = \sqrt{x-2} + 2\,, \qquad g(x) = \sqrt{x+a} - a\,,$$

$$h)\quad f(x) = \sqrt{-x}\,, \qquad g(x) = \sqrt{-x} + 1\,, \qquad h(x) = a\sqrt{-x} + b$$

1.2. Gleiche Funktionen

Aufgabe 1 Bestimmen Sie, ob die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in den Intervallen I_i gleich sind

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}, \quad g(x) = x+2,$
$I_1 = (-\infty, 0], \quad I_2 = [0, 4], \quad I_3 = [4, \infty),$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1} - 3, \quad g(x) = x^2 + x - 2,$
$I_1 = (-\infty, -1], \quad I_2 = [-1, 2], \quad I_3 = [2, \infty),$

c) $f(x) = \sqrt{x-2}\,\sqrt{x-3}, \quad g(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)},$
$I_1 = (-\infty, 3], \quad I_2 = [3, \infty),$

d) $f(x) = 2^{\log_2(x+1)}, \quad g(x) = x+1, \quad I_1 = (-\infty, -1], \quad I_2 = (-1, \infty),$

e) $f(x) = 5^{\log_5(x^2+1)}, \quad g(x) = x^2+1, \quad I_1 = (-\infty, -1], \quad I_2 = (-1, \infty),$

f) $f(x) = \log_3 x^2, \quad g(x) = 2\log_3 x, \quad I = (0, \infty),$

g) $f(x) = \log_3 x^5, \quad g(x) = 5\log_3 x, \quad I = (0, \infty),$

h) $f(x) = \log_2 x^4, \quad g(x) = 4\log_2 |x|, \quad I = \mathbb{R}\setminus\{0\},$

i) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4}, \quad g(x) = x-2, \quad I_1 = \mathbb{R}, \quad I_2 = [2, \infty),$

1.3. Symmetrieverhalten von Funktion

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sin x + \sin^3 x, \quad g(x) = \sin x + x\cos x,$

b) $f(x) = \cos(\sin x), \quad D_1(f) = \mathbb{R}, \quad D_2(f) = [-\pi, \pi], \quad D_3(f) = [0, 2\pi],$

c) $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^3 \cos x$

d) $f(x) = \sin x + \dfrac{x^3}{1+x^2}, \quad g(x) = \sin^2 x + \dfrac{x^2}{1+x^2}, \quad h(x) = x^4 + \dfrac{x}{1+\cos^2 x}$

e) $f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}, \quad h(x) = |x-2| - 3|x| + |x+2|$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften der folgenden Funktionen:

$$a)\quad f(x) = \ln(2-x) \qquad g(x) = \ln\frac{2-x}{2+x}\,,$$

$$b)\quad f(x) = \log_2 \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

2. Grundbegriffe, Eigenschaften: Lösungen

Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion

Lösung 1

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}, \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-b, b\}$

Lösung 2

a) $D(f) = W(f) = \mathbb{R}; \qquad D(g) = \mathbb{R}, \quad W(g) = [-2, \infty),$

b) $D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = [3, \infty); \qquad D(g) = W(g) = \mathbb{R}; \qquad D(h) = W(h) = \mathbb{R},$

c) $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}, \qquad W(f) = D(g) = (0, \infty), \quad W(h) = (-4, \infty),$

d) $D(f) = \mathbb{R}; \quad W(f) = (0, \infty)$ falls $a > 0, \quad W(f) = (-\infty, 0)$ falls $a < 0,$
$D(g) = \mathbb{R}; \quad W(h) = (b, \infty),$

e) $D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = (0, \infty); \qquad D(g) = \mathbb{R}, \quad W(g) = (3, \infty),$

f) $D(f) = [3, \infty), \quad W(f) = [0, \infty); \qquad D(g) = [-2, \infty), \quad W(g) = [0, \infty),$

g) $D(f) = W(f) = [2, \infty); \qquad D(g) = W(g) = [-a, \infty),$

h) $D(f) = (-\infty, 0], \quad W(f) = [0, \infty); \qquad D(g) = (-\infty, 0], \quad W(g) = [1, \infty);$
$D(h) = (-\infty, 0], \quad W(h) = [b, \infty),$

Gleiche Funktionen

Lösung 1

a) $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich in den Intervallen I_1 und I_3 und unterschiedlich im Intervall $I_2 = [0, 4]$, da $x = 2$ nicht zum Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ gehört: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad D(g) = \mathbb{R}.$

b) $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich in den Intervallen I_1 und I_3 und unterschiedlich auf dem Intervall $I_2 = [0, 4]$, da $x = 1$ nicht zum Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ gehört: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad D(g) = \mathbb{R}.$
<u>Hinweis:</u> $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

c) Die Funktion $f(x) = \sqrt{x-2}\,\sqrt{x-3}$ ist im Intervall $I_1 = (-\infty, 3\,]$ nicht definiert, während $g(x)$ nur im Intervall $(2, 3)$ nicht definiert ist. Man kann also die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall I_1 nicht vergleichen. Im Intervall I_2 kann man sie vergleichen.

d) <u>Hinweis:</u> $a^{\log_a b} = b$

$$D(f) = (-1, \infty), \qquad D(g) = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) \ \text{ im Intervall } \ I_2 = (-1, \infty)$$

e) $D(f) = D(g) = \mathbb{R}.$ $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich in den beiden Intervallen I_1 und I_2.

f) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad D(g) = (0, \infty).$ $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich im Intervall I.

g) $D(f) = D(g) = (0, \infty).$ $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich im Intervall I.

h) $D(f) = D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich im Intervall I.

i) $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$. Nur im Intervall $I_2 = [2, \infty)$ ist $f(x) = g(x)$.

Symmetrieverhalten von Funktion

Lösung 1 a) $f(x)$ und $g(x)$ sind ungerade Funktionen.

b) $f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x)$.
$f(x)$ ist gerade Funktion in den Intervallen D_1 und D_2.

c) $f(x)$ und $g(x)$ sind ungerade Funktionen.

d) $f(x)$ ist ungerade Funktion, $g(x)$ ist gerade Funktion, $h(x)$ besitzt keine Symmetrie.

e) $g(x)$ ist gerade Funktion im Definitionsbereich $[-2, 2]$.

f) $f(x)$ und $h(x)$ sind gerade Funktionen:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{1+(-x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = f(x) \\
g(-x) &= \frac{(-x)-1}{|(-x)-1|} = \frac{-(x+1)}{|-(x+1)|} = -\frac{x+1}{|x+1|}, \qquad g(-x) \neq g(x), \qquad g(-x) \neq -g(x) \\
h(-x) &= |(-x)-2| - 3|-x| + |(-x)+2| = |-(x+2)| - 3|x| + |-(x-2)| \\
&= |x-2| - 3|x| + |x+2| = h(x)
\end{aligned}$$

Lösung 2 a) $g(x)$ ist ungerade Funktion.

b) $f(x)$ ist ungerade Funktion:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \log_2 \frac{1+\sin(-x)}{1-\sin(-x)} = \log_2 \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \log_2 \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{-1} = \\
&= -\log_2 \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = -f(x)
\end{aligned}$$