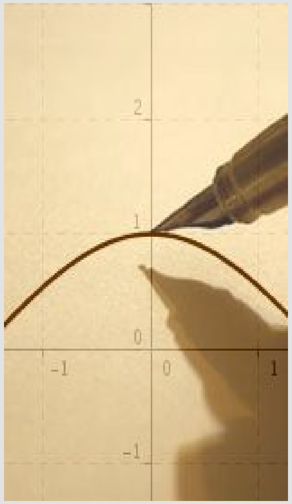
Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Funktionen an der Stelle $x = a$:

Aufgabe 1: $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}, \qquad a = 0$

Aufgabe 2: $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}, \qquad a = 0$



$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \qquad a = 0$$

Diese Funktion hat eine Definitionslücke an der Stelle $x = 0$, an der wir den Grenzwert bestimmen möchten. Um zu einer Idee zu kommen, ist es sinnvoll, sich die Funktion in der Umgebung der Definitionslücke durch Computerprogrammen zeichnen zu lassen.

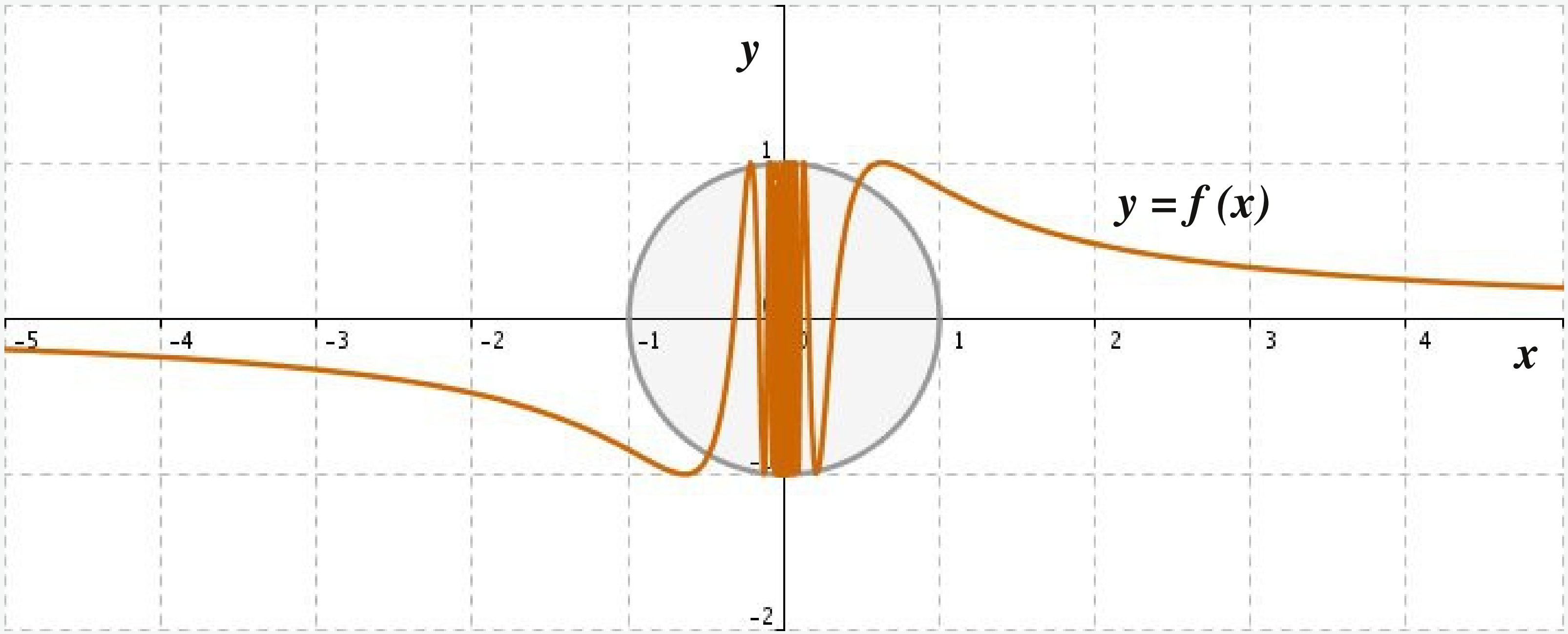


Abb. 10-1: Die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ und ein Bereich in der Umgebung der Stelle $x = 0$ (ein Kreis mit dem Radius $R = 1$)

Offensichtlich oszilliert die Funktion zwischen den Werten -1 und 1, und das umso schneller, je näher man zu der kritischen Definitionslücke kommt.

Im nächsten Schritt vergrößern wir den Bereich um die Null, um einen besseren Eindruck zu gewinnen.

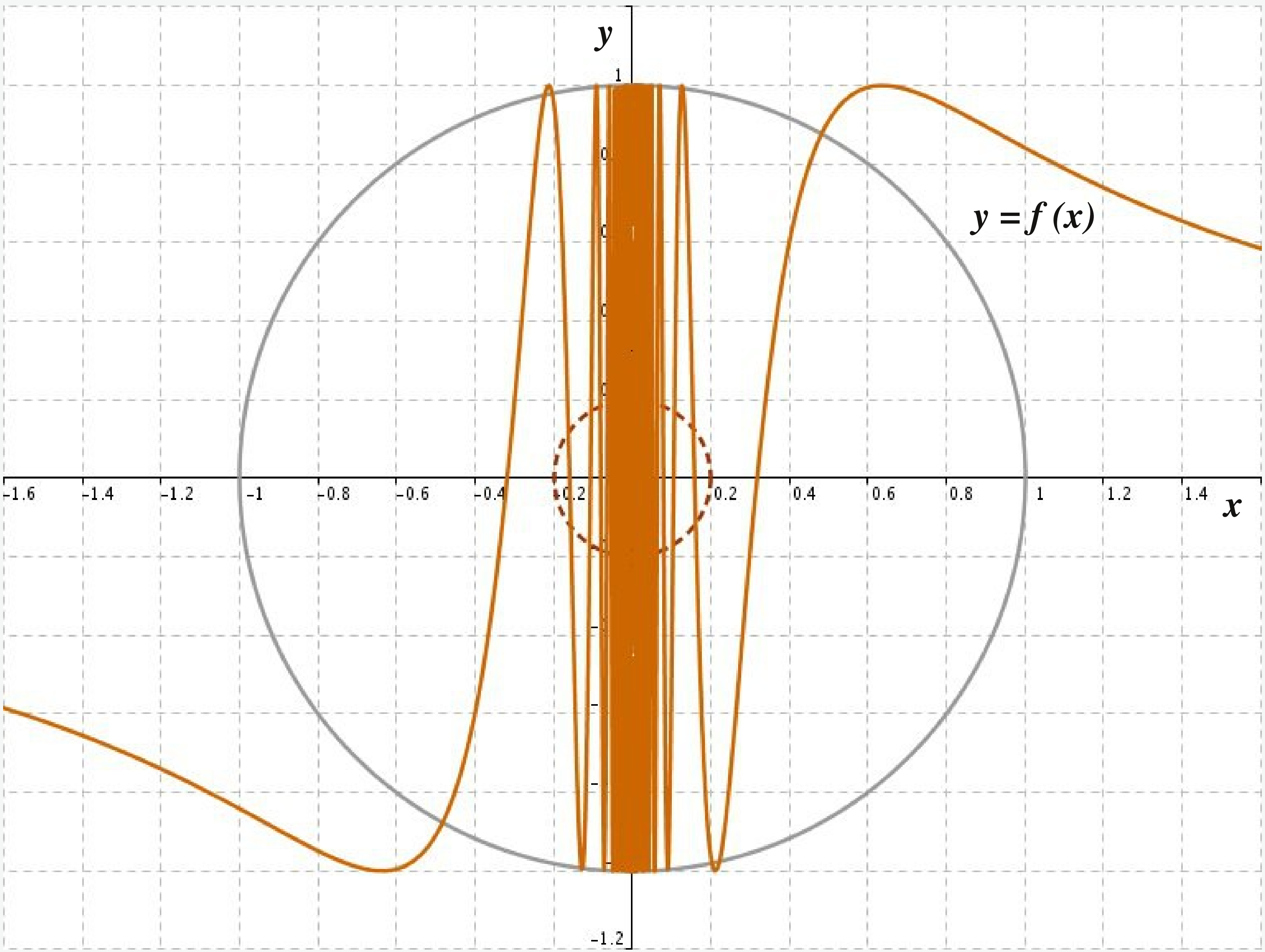


Abb. L1-2: Die Funktion f (x) = sin(1/x) und der Bereich in der Umgebung der Stelle x = 0

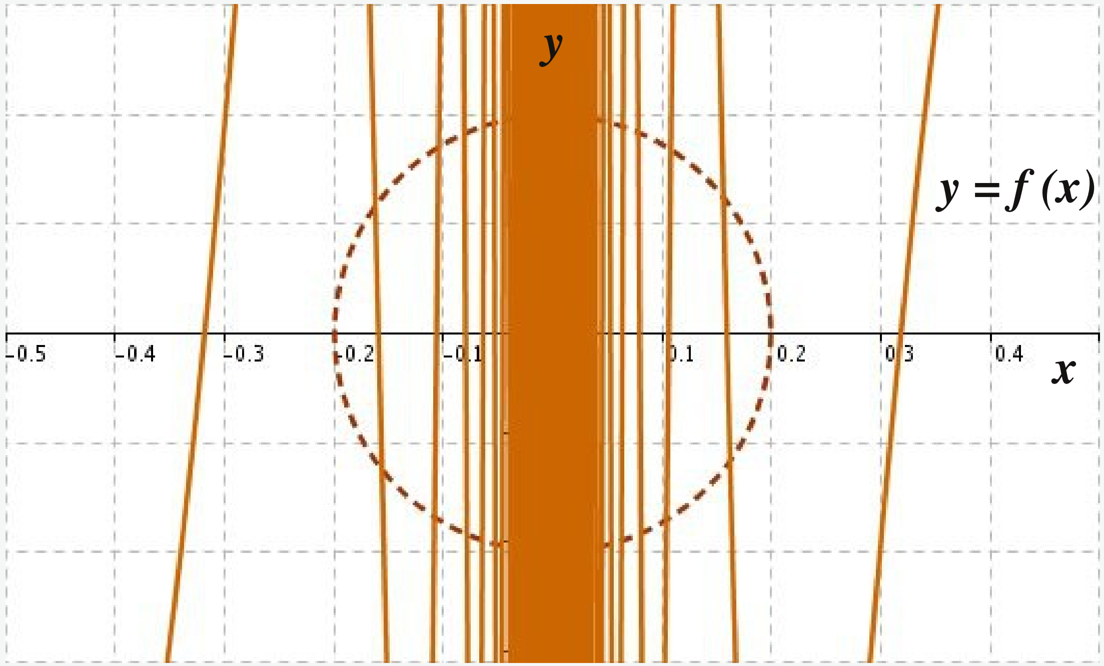


Abb. L1-3: Die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ und ein Bereich in der Umgebung der Stelle $x = 0$ (ein Kreis mit dem Radius $R = 0.2$)

Die vergrößerte und noch weiter vergrößerte Darstellungen zeigen uns, dass man wohl keinen Grenzwert erwarten kann. Im Folgenden werden wir das zeigen.

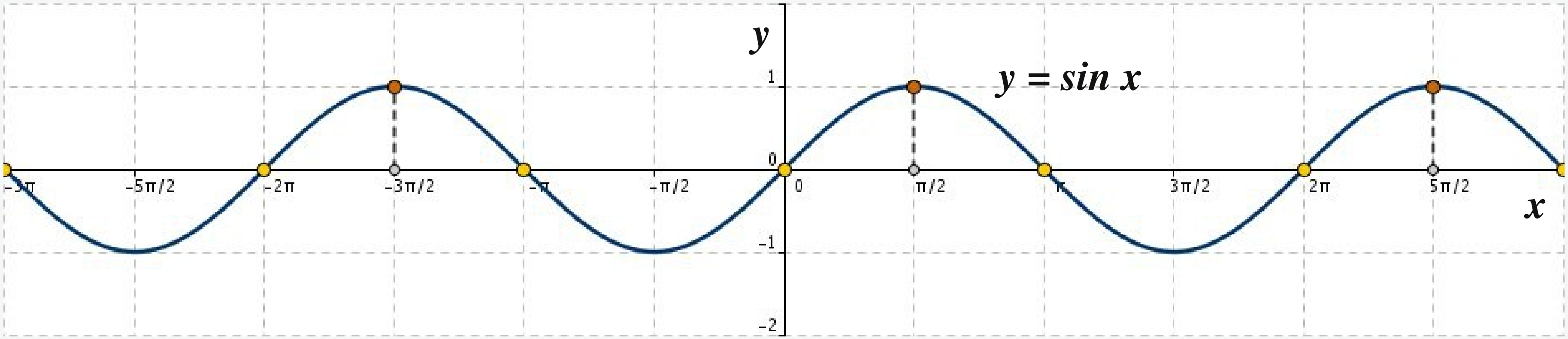


Abb. L1-4: Die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ mit den gezeichneten Punkten $(\pi n, 0)$ (gelb) und $(2\pi n + \pi/2, 1)$ (rot)

Um den Grenzwert zu bestimmen, nehmen wir zwei Nullfolgen

$$x_1(n) = \frac{1}{\pi n}, \qquad x_2(n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \qquad \lim_{n \to \infty} x_1(n) = \lim_{n \to \infty} x_2(n) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_1(n)) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{\pi n}\right) = \lim_{n \to \infty} \sin(\pi n) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_2(n)) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = \lim_{n \to \infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt keinen Grenzwert für $x \to 0$.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \qquad a = 0$$

Um den Grenzwert zu bestimmen, nehmen wir wie in Aufgabe 1 zwei Nullfolgen

$$x_1(n) = \frac{1}{\pi n}, \qquad x_2(n) = \frac{1}{2\pi n + \dfrac{\pi}{2}}, \qquad \lim_{n \to \infty} x_1(n) = \lim_{n \to \infty} x_2(n) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_1(n)) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{\pi n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} = \lim_{n \to \infty} \frac{0}{\pi n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_2(n)) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{2\pi n + \dfrac{\pi}{2}}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin\left(2\pi n + \dfrac{\pi}{2}\right)}{2\pi n + \dfrac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi n + \dfrac{\pi}{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

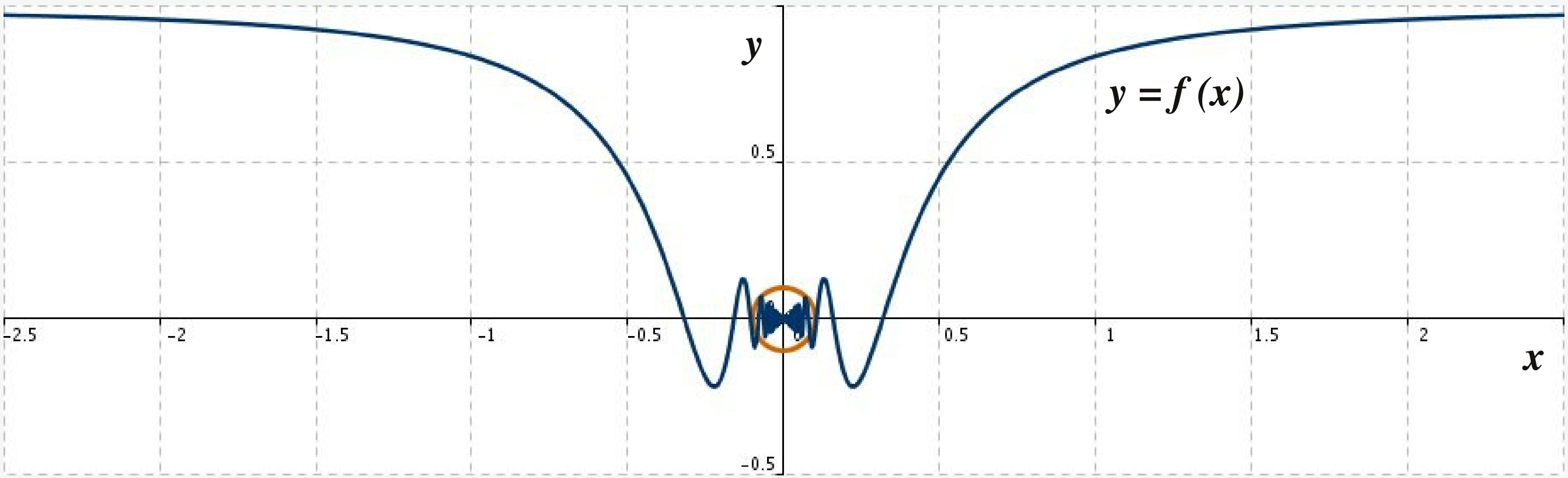


Abb. L2-1: Die Funktion $f(x) = x \sin(1/x)$ mit einem Bereich in der Umgebung von Null (ein Kreis mit dem Radius $r = 0.01$)

Im nächsten Schritt vergrößern wir den Bereich um die Null.

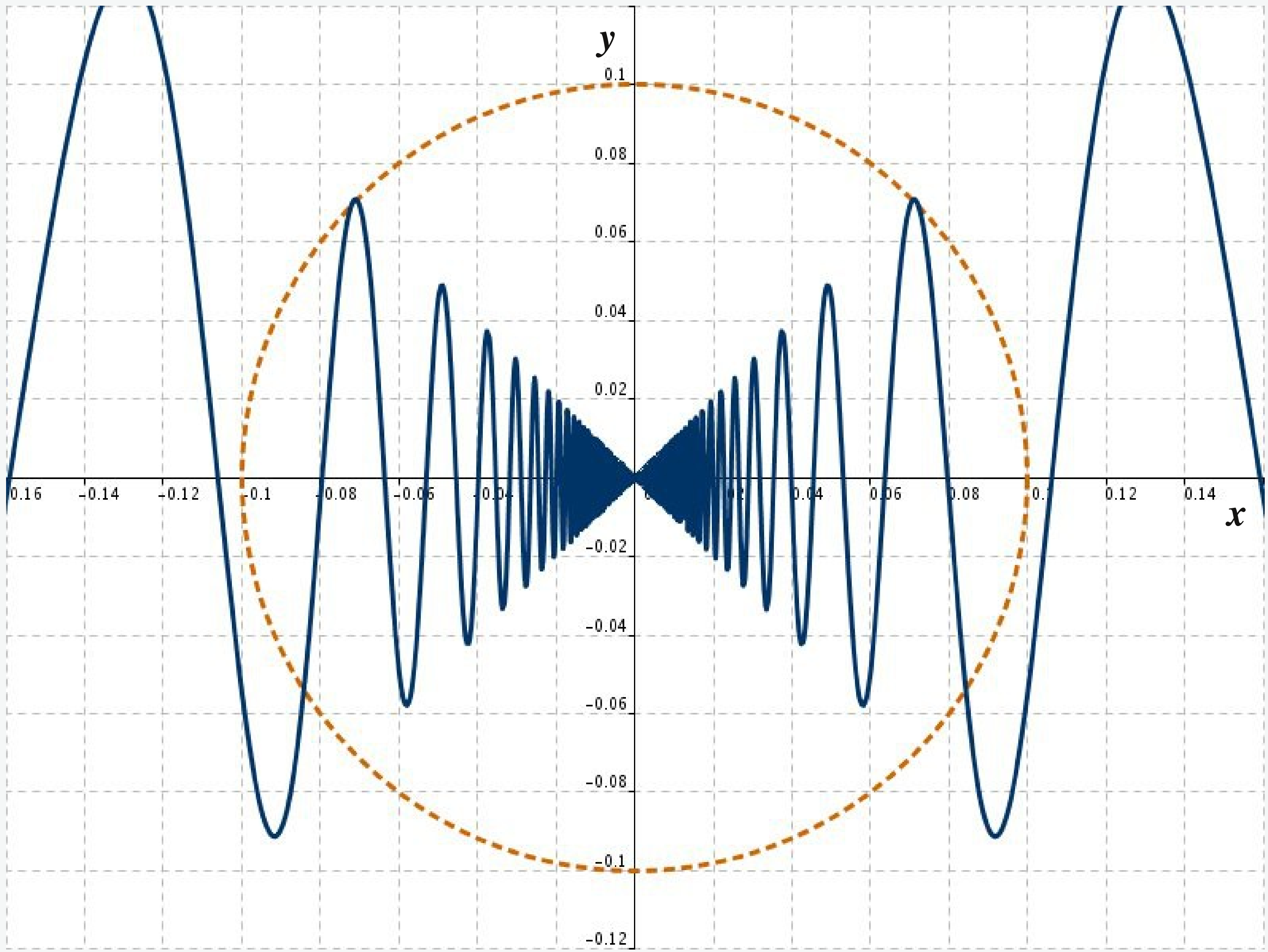


Abb. L2-2: Die Funktion $f(x) = x \sin(1/x)$ mit dem eingezeichneten Kreis mit Radius $r = 0.01$

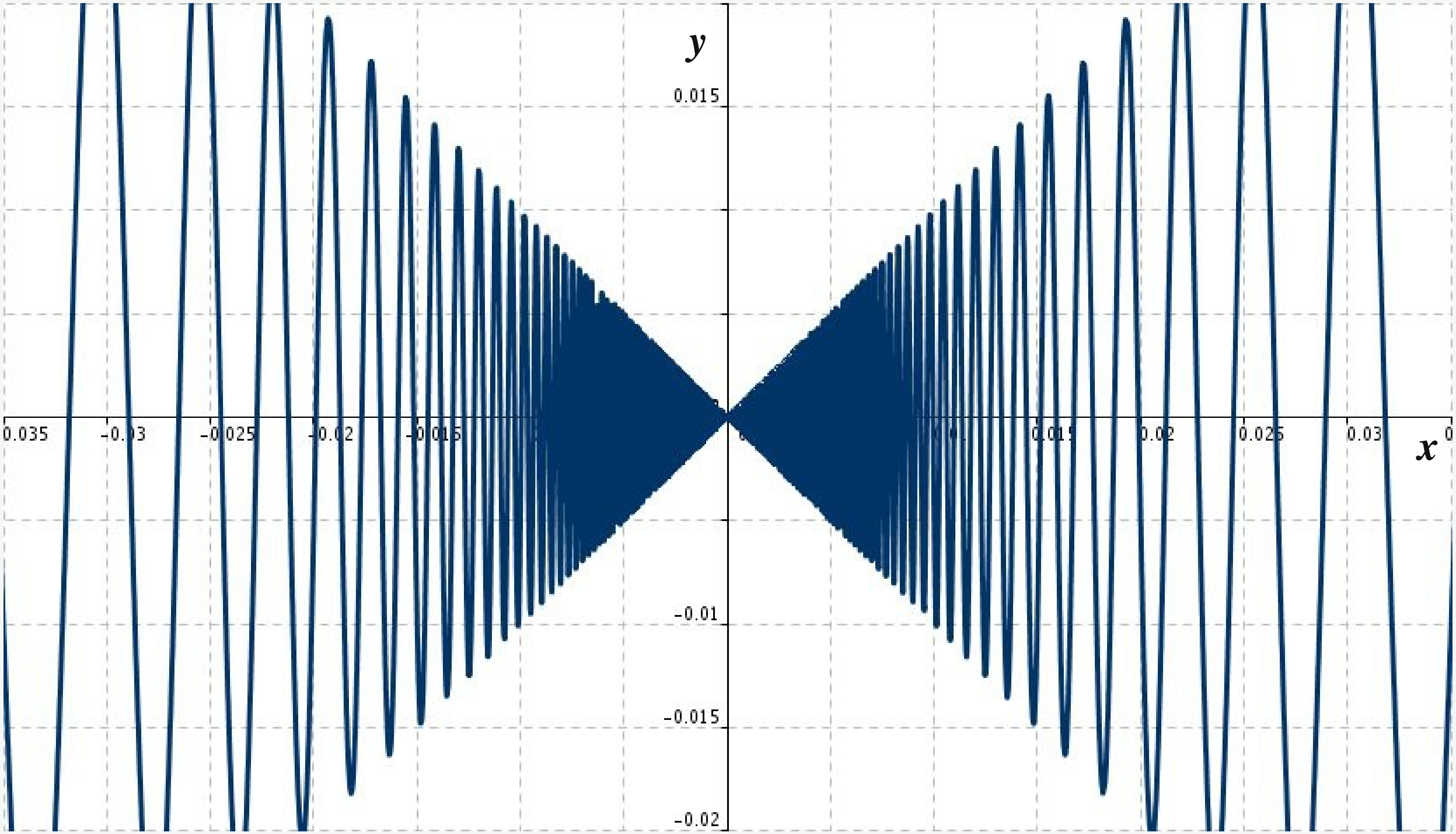


Abb. L2-3: Die Funktion $f(x) = x \sin(1/x)$ in der Umgebung von Null

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Funktionen an der Stelle $x = a$:

Aufgabe 3: $$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \qquad a = 0$$

Aufgabe 4: $$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x}, \qquad a = 0$$

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \qquad a = 0$$

Um den Grenzwert zu bestimmen, nehmen wir wie in den ersten Aufgaben zwei Nullfolgen

$$x_1(n) = \frac{1}{\pi n}, \qquad x_2(n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \qquad \lim_{n\to\infty} x_1(n) = \lim_{n\to\infty} x_2(n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_1(n)) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\pi n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi n)}{(\pi n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{(\pi n)^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_2(n)) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi n)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

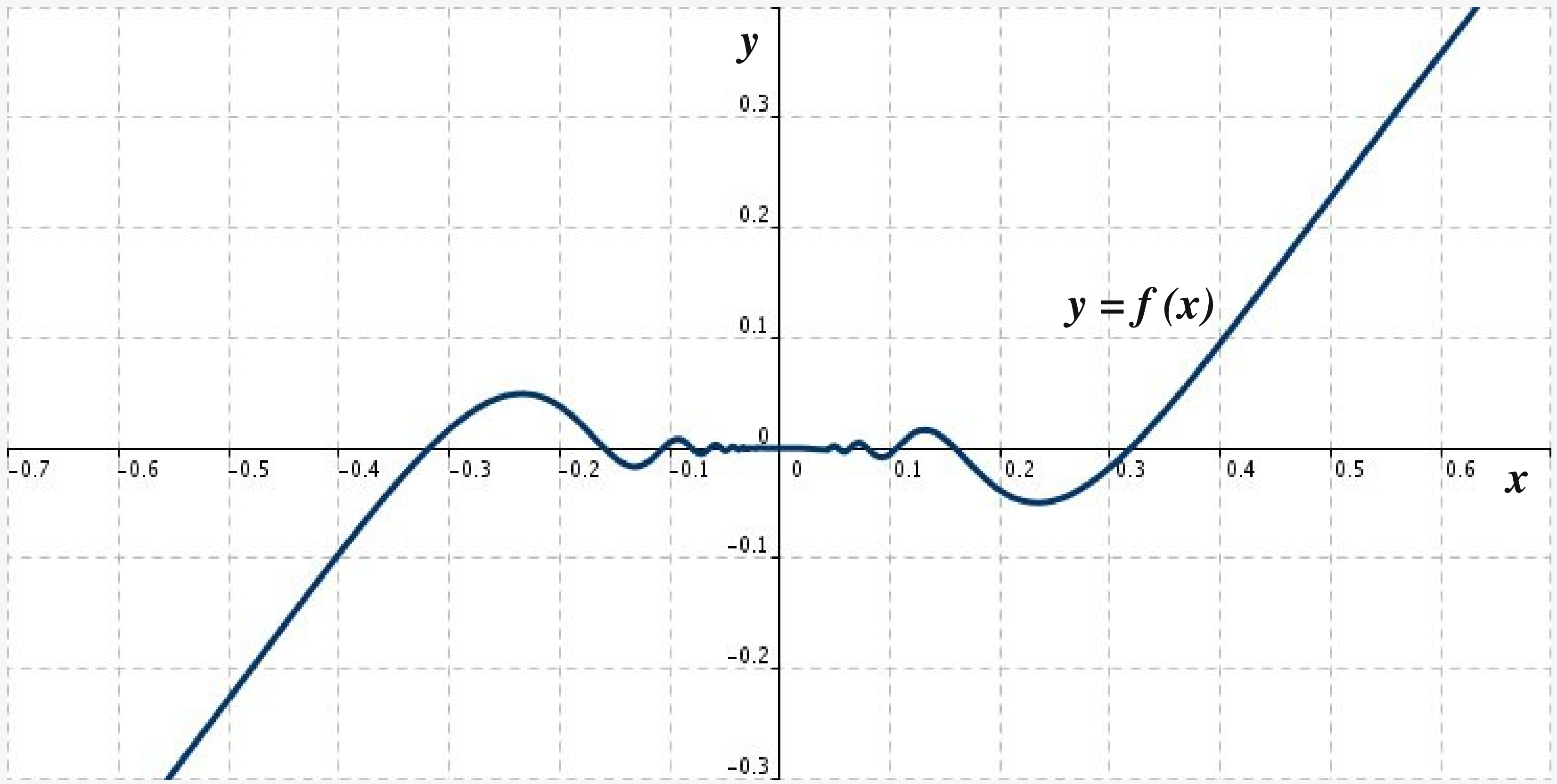


Abb. L3-1: Die Funktion $f(x) = x^2 \sin(1/x)$

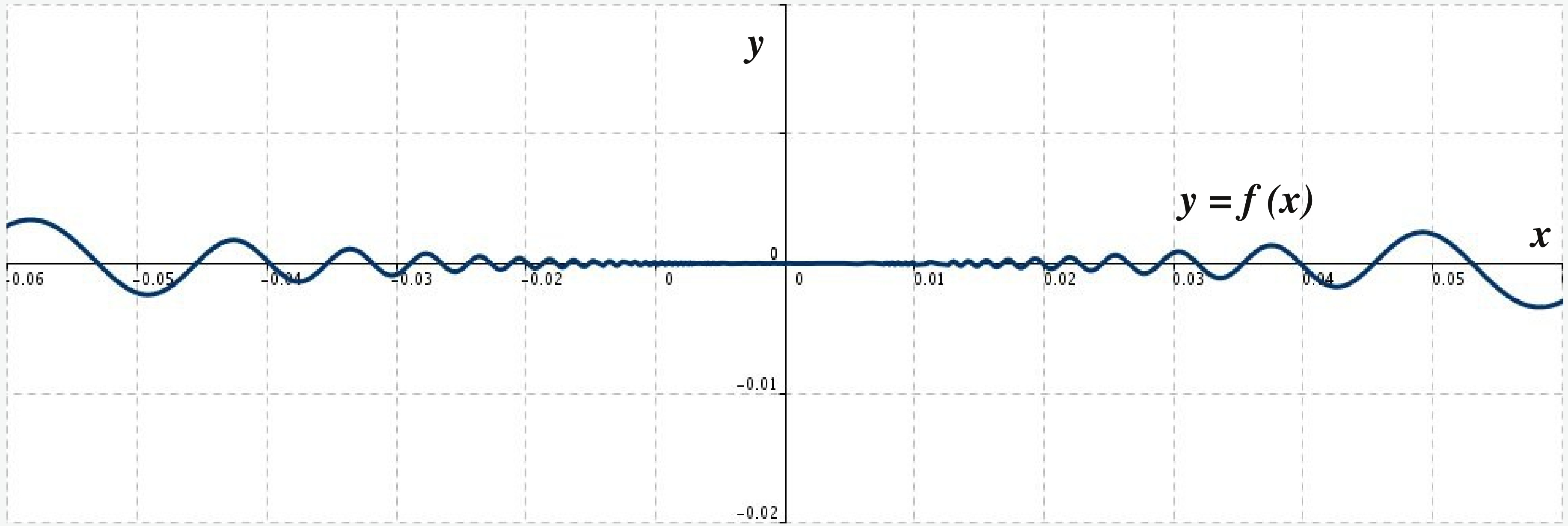


Abb. L3-2: Die Funktion $f(x) = x^2 \sin(1/x)$

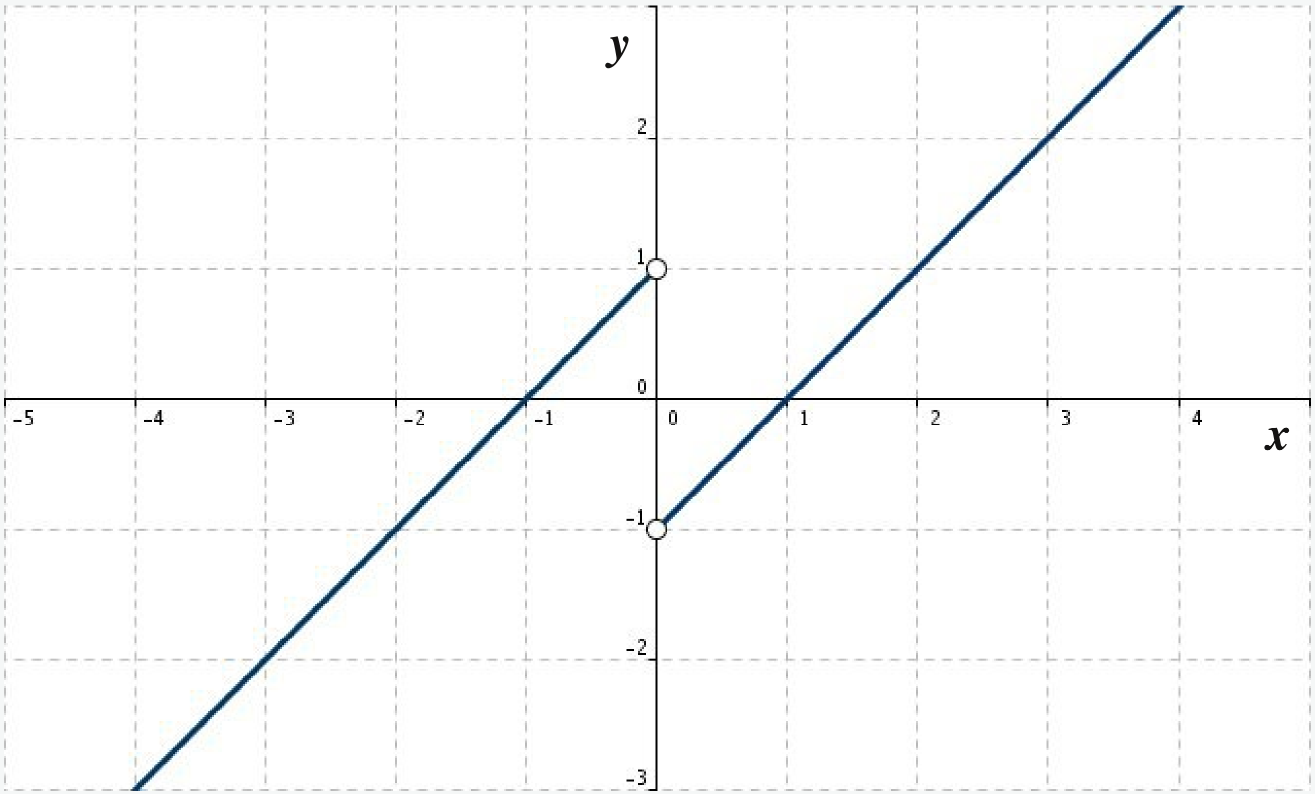


Abb. L4-1: Die Funktion $f(x) = (x^2 - |x|)/x$

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x}, \qquad a = 0$$

Die Funktion hat eine Definitionslücke an der Stelle $x = 0$.

Wir betrachten eine Nullfolge $x_1(n)$: $\lim\limits_{x \to 0+\varepsilon} x_1(n) = 0 \quad (x > 0)$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_1(n)) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_1^2(n) - |x_1(n)|}{x_1(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_1^2(n) - x_1(n)}{x_1(n)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (x_1(n) - 1) = -1$$

Es ist nicht wichtig, was für eine Nullfolge x_n ist.

Betrachtet man eine Nullfolge auf der anderen Seite, d.h. Für negative x-Werte

$$x_2(n) : \lim_{x \to 0-\varepsilon} x_2(n) = 0 \quad (x < 0)$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_2(n)) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_2^2(n) - |x_2(n)|}{x_2(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_2^2(n) - (-x_2(n))}{x_2(n)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (x_2(n) + 1) = 1$$

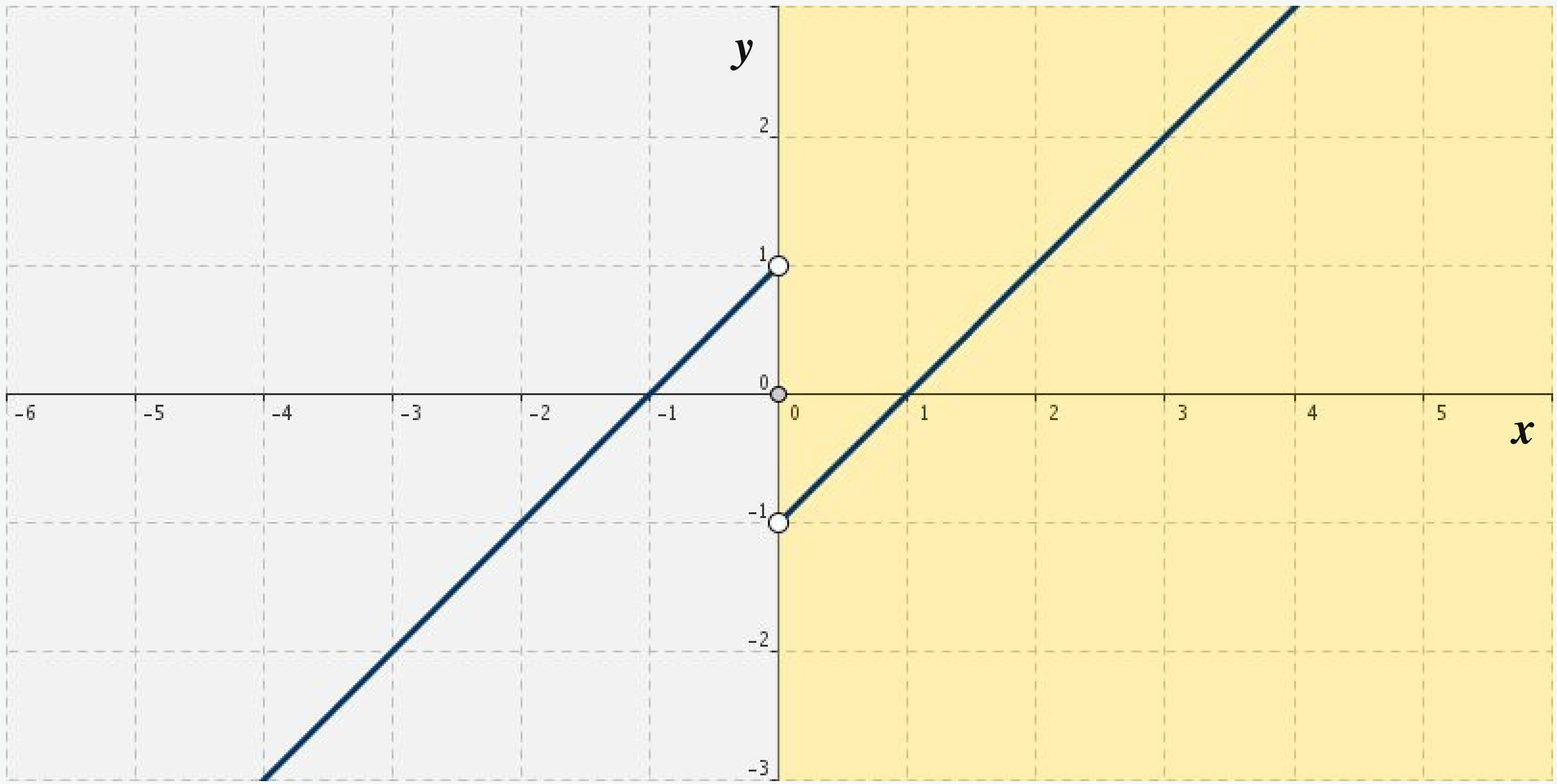


Abb. L4-2: Die Funktion $f(x) = (x^2 - |x|) / x$

Die einseitigen Grenzwerte existieren, aber sie sind verschieden. Die Funktion $f(x)$ besitzt keinen Grenzwert an der Stelle $x = 0$.