Der Grenzwert einer Funktion

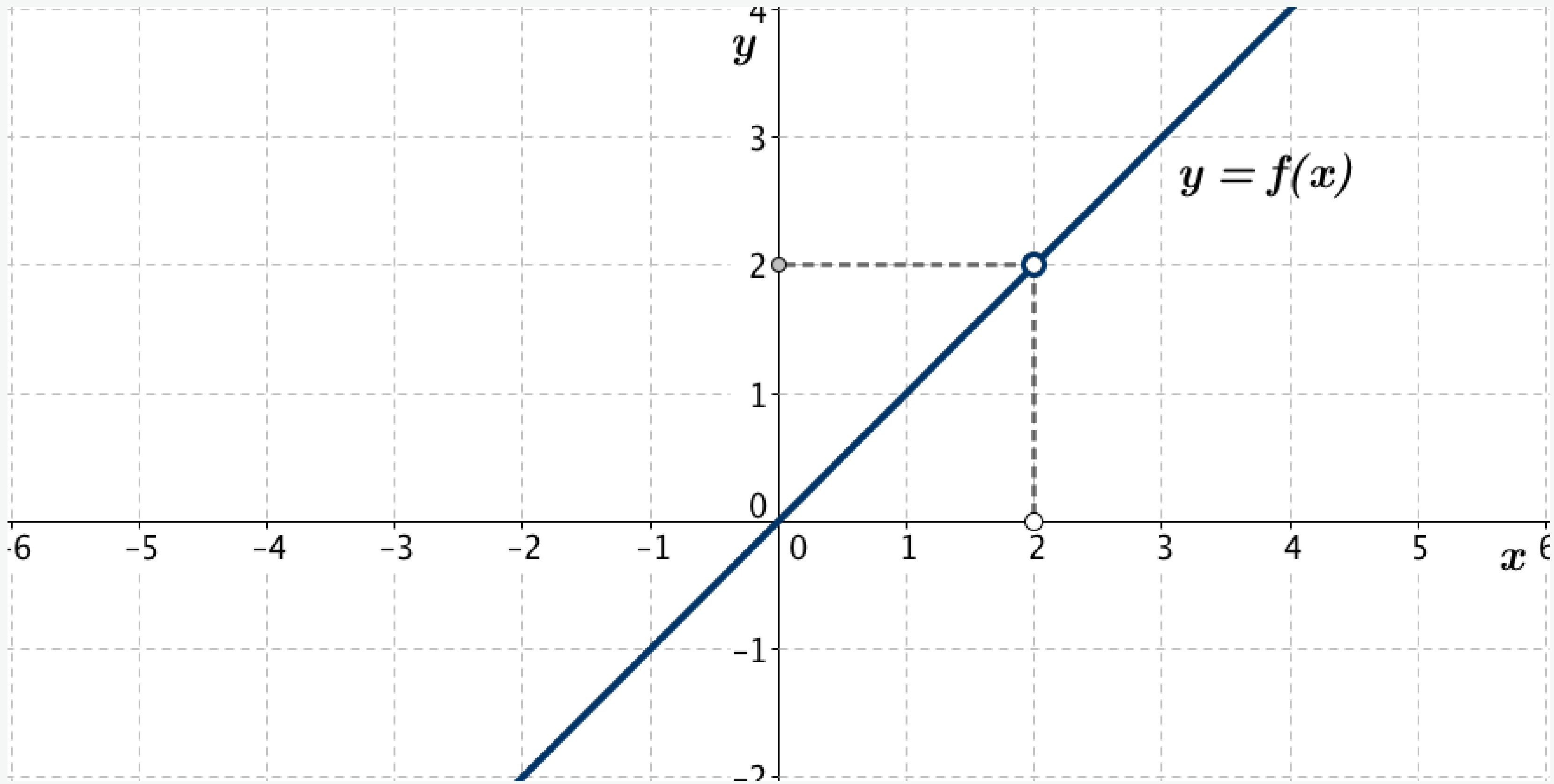


Abb. 8-1: Zur Untersuchung des Funktionsgrenzwertes y = f(x) in der Umgebung des Punktes x = 2

Oft ist der Funktionswert an einer zu untersuchenden Stelle gar nicht definiert. Dennoch kann ein Grenzwert existieren, wie z.B.:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x(x - 2)}{x - 2} = x, \qquad x \neq 2$$

Hier liegt eine Besonderheit vor, denn der Wert $x = 2$ gehört nicht zum Definitionsbereich der Funktion.

Untersuchung in der Umgebung des Punktes $x = 2$ mit Hilfe einer gegen 2 konvergierenden Folge.

Annäherung von links:

$$x_l(n) = 2 - \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} x_l(n) = 2, \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_l(n)) = \lim_{n \to \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 2$$

Annäherung von rechts:

$$x_r(n) = 2 + \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} x_r(n) = 2, \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_r(n)) = \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

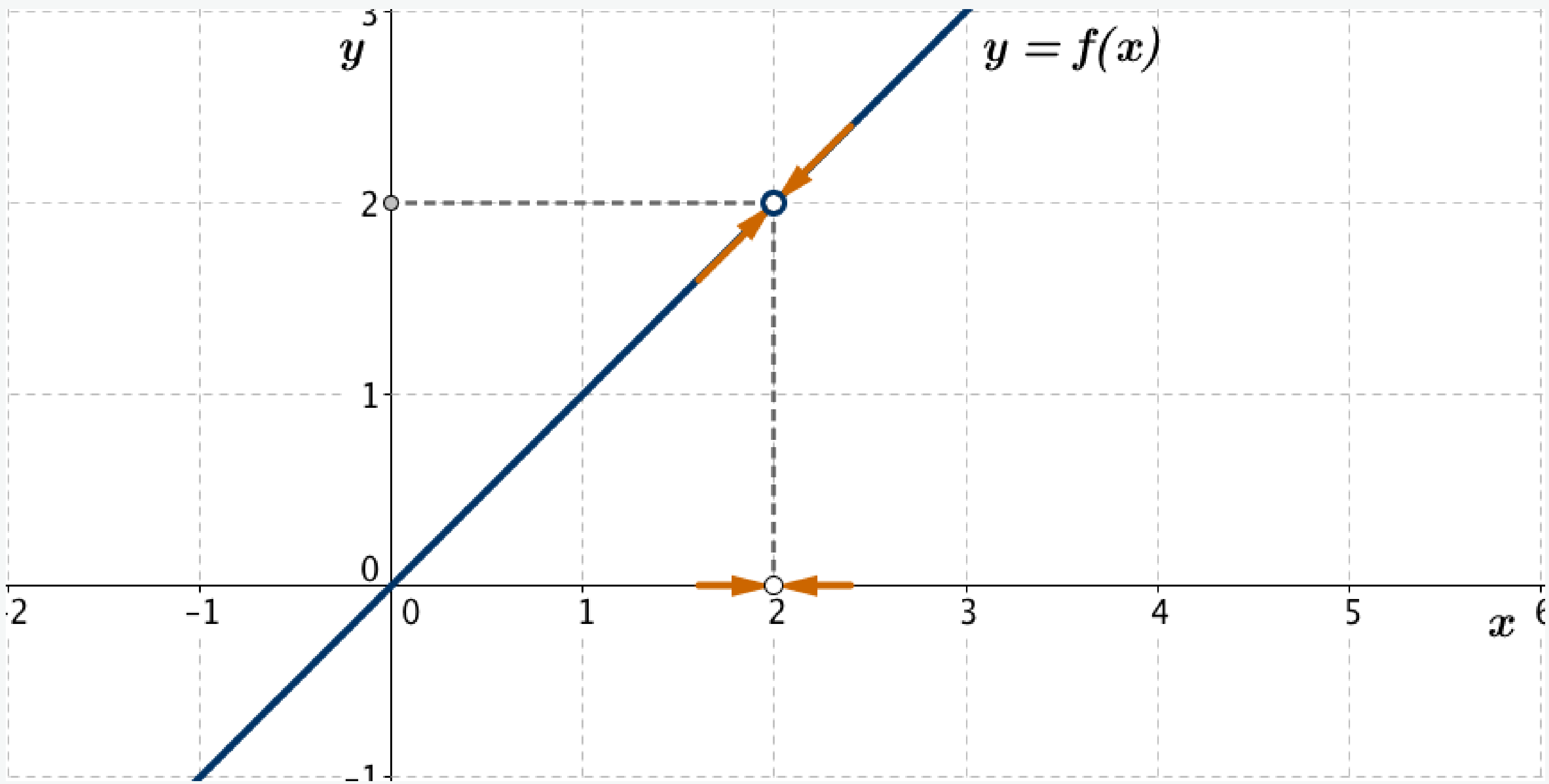


Abb. 8-4: Zur Bestimmung des Grenzwertes einer Funktion $y = f(x)$ in der Umgebung einer Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist

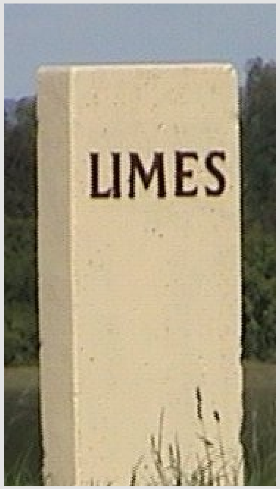
Der Funktionswert ist für $x = 2$ nicht definiert, aber der Grenzwert existiert.

- Die Funktion $y = f(x)$ ist in der Umgebung der Stelle $x = 2$ untersucht worden

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

- Die Funktion ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert.
- Der linksseitige Grenzwert existiert und ist gleich 2.
- Der rechtsseitige Grenzwert existiert und ist gleich 2.
- Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert sind gleich.

Die Existenz eines Grenzwertes setzt nicht voraus, dass der Funktionswert an der untersuchten Stelle existiert.



http://www.baldern.eu/foto617.JPG

- Die Umgebung U einer Stelle $x = a$ gehört zum Definitionsbereich einer Funktion $y = f(x)$

$$U \in D(f) \qquad \text{oder} \qquad U \setminus \{ a \} \in D(f)$$

- Eine Zahlenfolge aus dem Definitionsbereich der Funktion $y = f(x)$ konvergiert gegen $x = a$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a\,, \qquad a \in \mathbb{R}$$

- Die Folge der Funktionswerte konvergiert gegen g

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to a} f(x) = g\,, \qquad g \in \mathbb{R}$$

Der Grenzwert einer Funktion

- Es wird nicht gefordert, dass $x = a$ im Definitionsbereich ist.

- Der Grenzübergang $x \to a$ bedeutet, dass x der Stelle a beliebig nahe kommt, ohne den Wert a anzunehmen!

Es gibt Funktionen, für die an einzelnen Stellen keine Grenzwerte existieren. Klären wir, ob ein Grenzwert von rechts oder links vorhanden ist.

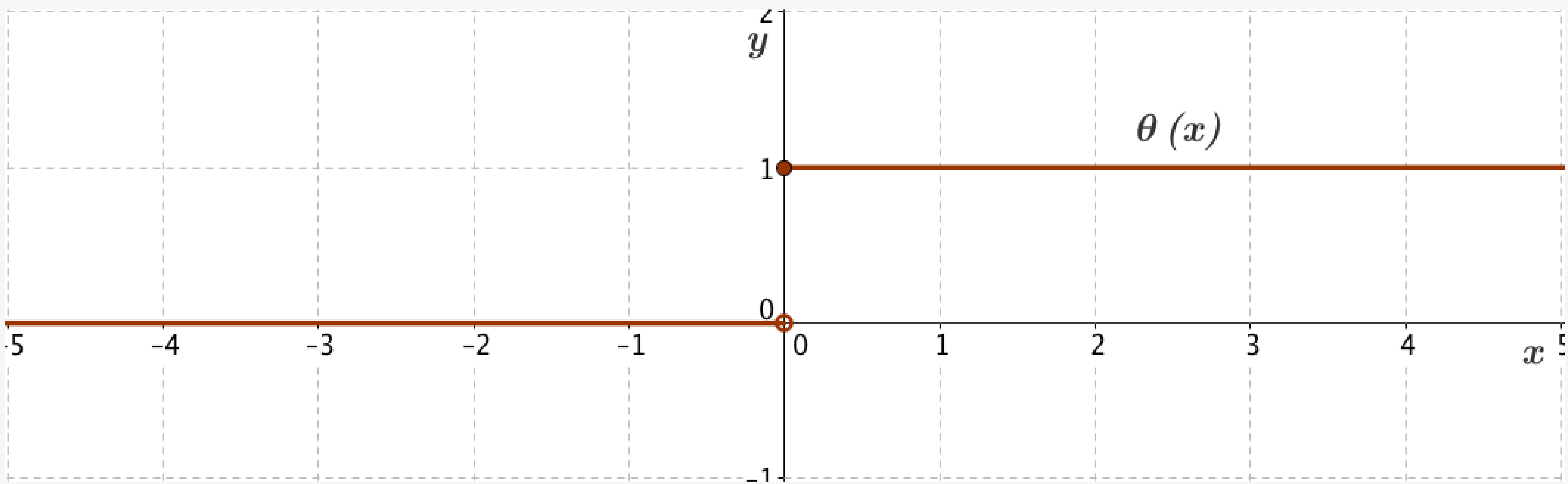


Abb. B3: Die Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion, auch Theta-, Treppen-, Stufen-, Sprung- oder Einheitssprungfunktion genannt, ist eine in der Mathematik und Physik oft verwendete Funktion. Sie ist nach dem britischen Mathematiker und Physiker Oliver Heaviside (1850–1925) benannt.

Die Heaviside-Funktion hat für jede beliebige negative Zahl den Wert Null, andernfalls den Wert eins. Sie ist also die charakteristische Funktion der positiven reellen Zahlen.

Wir untersuchen die Heaviside-Funktion an der Stelle $x = 0$.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Bei der rechtsseitigen Annäherung an die Stelle $x = 0$:

$$\lim_{n \to \infty} \theta(x_n^r) = \lim_{n \to \infty} \theta\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1 \qquad \left(x_n^r = \frac{1}{n}\right)$$

Dies gilt für jede von rechts gegen Null konvergierende Folge.

Bei der linksseitigen Annäherung an die Stelle $x = 0$:

$$\lim_{n \to \infty} \theta(x_n^l) = \lim_{n \to \infty} \theta\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0 \qquad \left(x_n^l = -\frac{1}{n}\right)$$

- Die einseitigen Grenzwerte existieren, aber sie sind verschieden.
- Der Funktionswert an der Stelle $x = a$ stimmt mit dem rechtsseitigen Grenzwert überein.

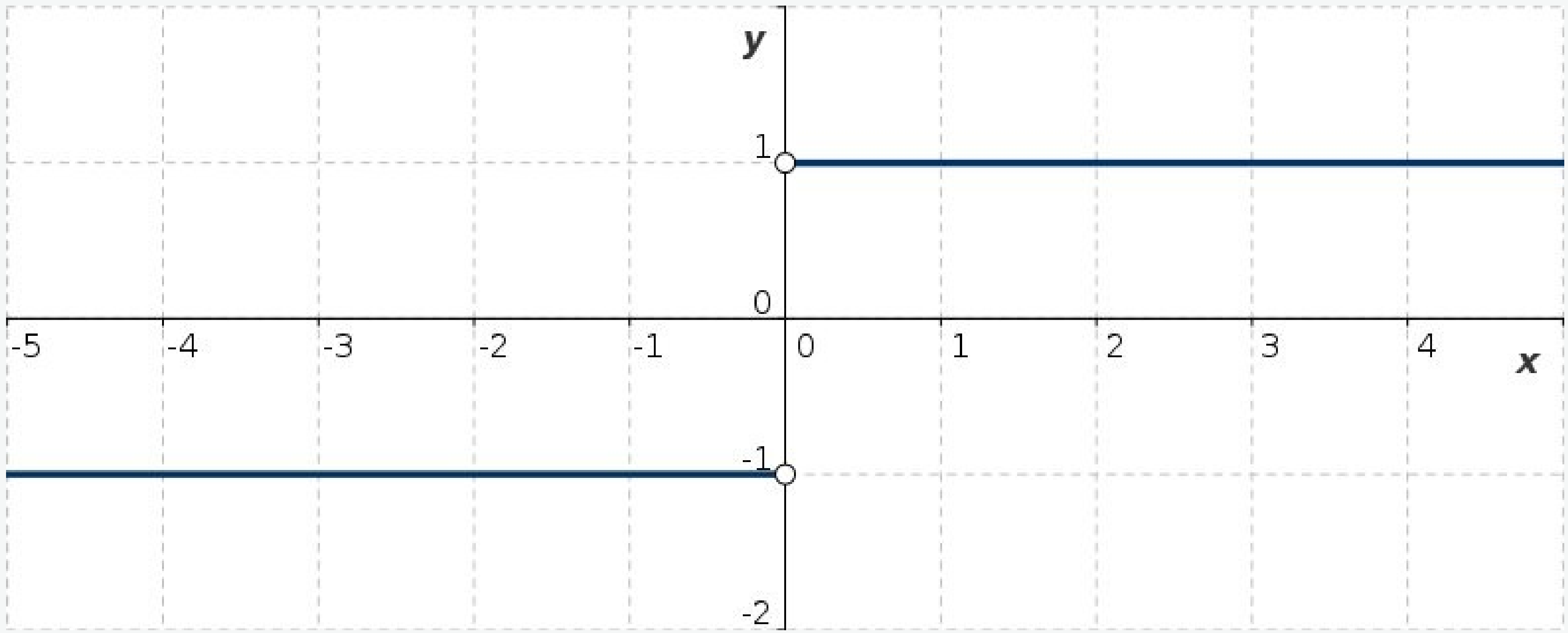


Abb. B4: Die Funktion $y = x\,/\,|\,x\,|$

$$f\,(x) = \frac{x}{|\,x\,|} = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} f\left(x_n^r\right) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1\,, \qquad \lim_{n \to \infty} f\left(x_n^l\right) = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1$$

Die Funktion $f\,(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht erklärt. Der Grenzwert einer Funktion an einer Stelle existiert nicht, auch wenn beide einseitigen Grenzwerte vorhanden sind, aber nicht übereinstimmen.

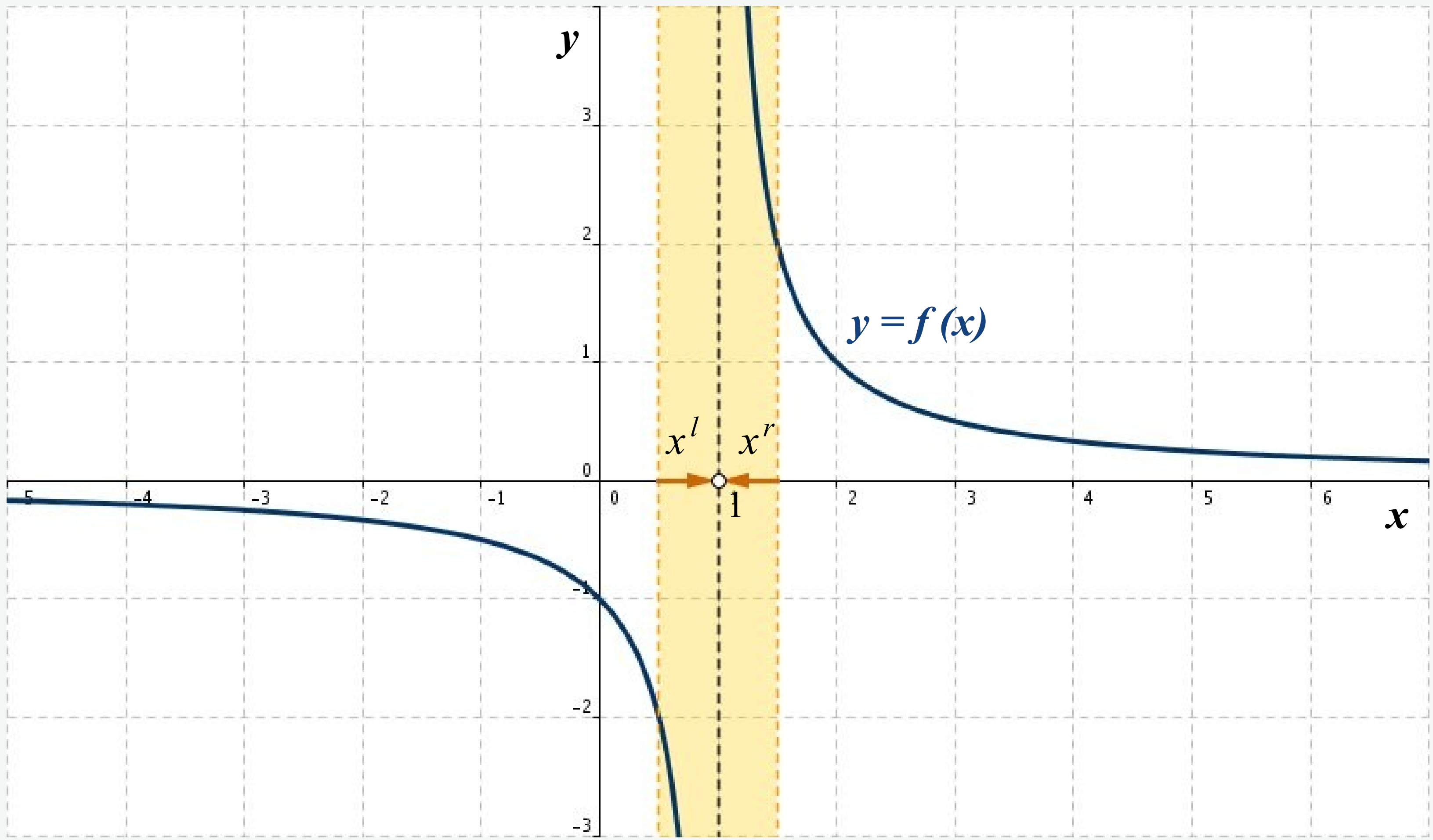


Abb. B5: Die Funktion f (x) = 1 / 1 – x und die Umgebung der Stelle x = 1

Wir analysieren das Verhalten der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ in der Umgebung der Stelle $x = 1$

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad x \neq 1$$

$$x_n^r = 1 + \frac{1}{n}, \qquad x_n^l = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to 1 + \varepsilon} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \to \infty} n = \infty$$

$$\lim_{x \to 1 - \varepsilon} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \to \infty} (-n) = -\infty$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt bei $x = 1$ keinen Grenzwert.

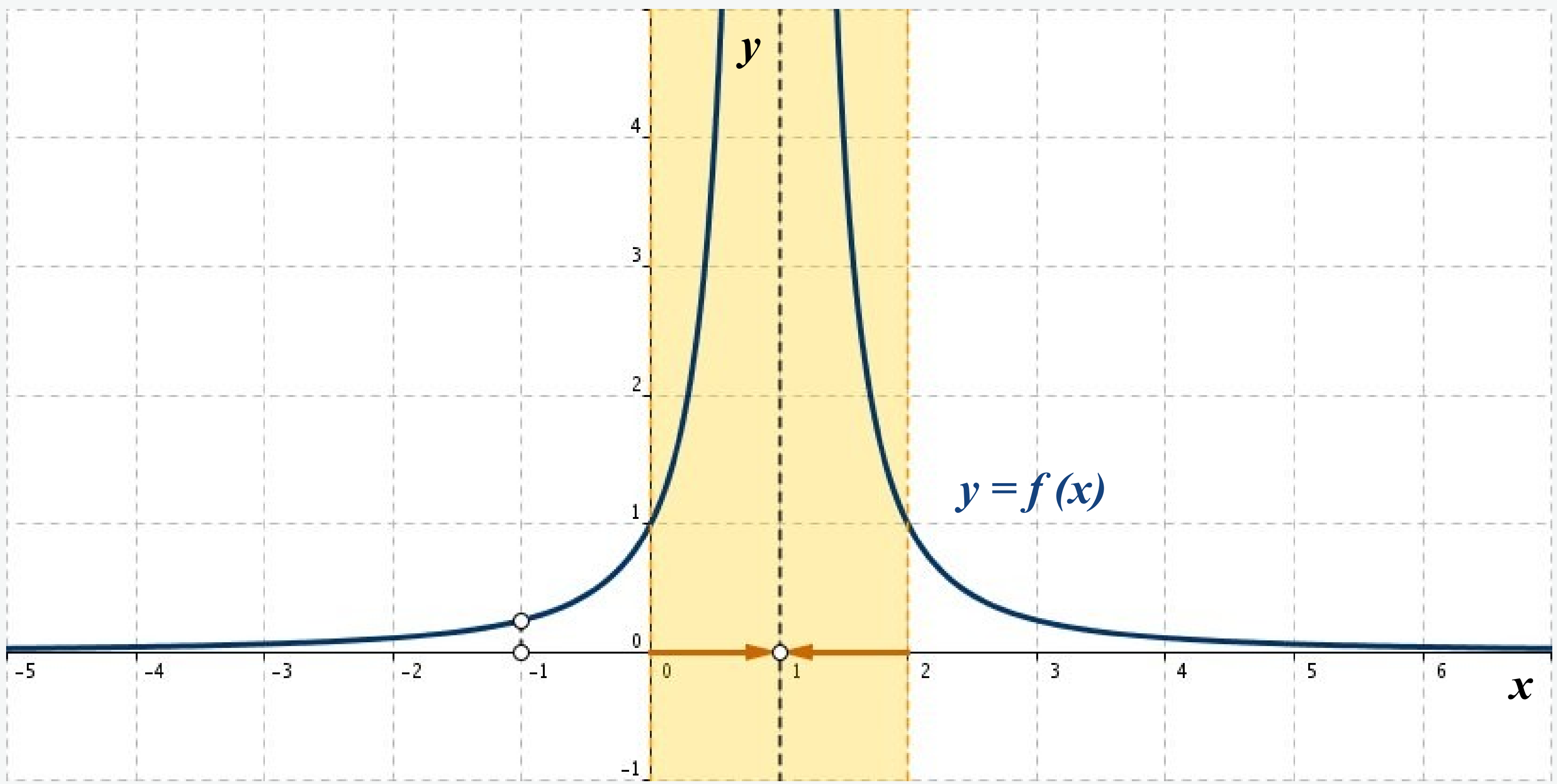


Abb. B7: Die Funktion $f(x) = (1 + x)/((1 - x^2)(1 - x))$ und die Stellen $x = -1$ und $x = 1$

Wir analysieren das Verhalten der Funktion $f(x) = \dfrac{1 + x}{(1 - x^2)(1 - x)}$ an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$.

Die Funktion $f(x)$ besitzt zwei Definitionslücken, nämlich die Stellen $x = -1$ und $x = 1$. Durch Umformen mittels der dritten binomischen Formel erhält man

$$f(x) = \frac{1 + x}{(1 - x^2)(1 - x)} = \frac{1 + x}{(1 + x)(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2}, \qquad x \neq -1$$

Die erste Definitionslücken an der Stelle $x = -1$:

$$x_n^r = -1 + \frac{1}{n}, \qquad x_n^l = -1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(-1 - \frac{1}{n}\right) = -1$$

$$\lim_{x \to -1 + \varepsilon} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(-1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 - \left(-1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -1 - \varepsilon} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(-1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 - \left(-1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

Die zweite Definitionslücke an der Stelle $x = 1$:

$$x_n^r = 1 + \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$x_n^l = 1 - \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to 1 + \varepsilon} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2} = \lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$$

$$\lim_{x \to 1 - \varepsilon} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2} = \lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt einen Grenzwert an der Stelle $x = -1$ und keinen Grenzwert an der Stelle $x = 1$.

Der Limes in Deutschland

- Der rechtsseitige Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$\lim_{x \to a + \varepsilon} f(x) = g_r$$

- Der linksseitige Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$\lim_{x \to a - \varepsilon} f(x) = g_l$$

- Der Grenzwert von $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$ existiert nicht, falls

$$g_l \neq g_r$$

Der Limes in Deutschland: http://www.film-commission-hessen.de/lhmedia/pics/3019-tor.JPG