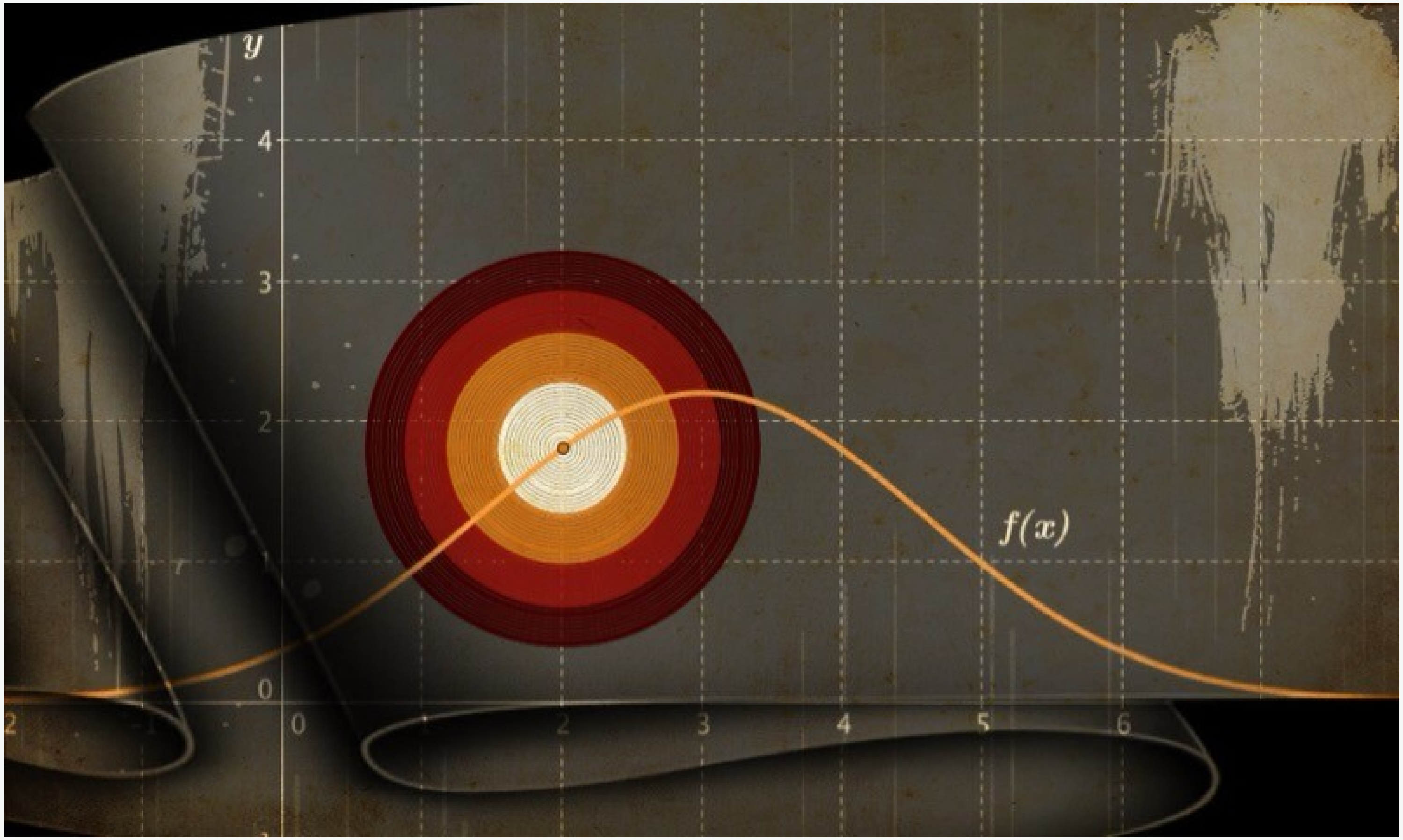

Grenzwert

Ohne Grenzwerte gibt es keine Differential- und Integralrechnung. Jeder einzelne Ausdruck in der Differential- und Integralrechnung ist in irgendeinem Sinn ein Grenzwert.

Wie beschreiben wir

- die Momentangeschwindigkeit? – als Grenzwert mittlerer Geschwindigkeiten.
- den Anstieg einer Kurve? – als Grenzwert der Steigungen von Sekanten
- die Länge einer Kurve? – als Grenzwert der Längen von Polygonzügen.
- die Summe einer unendlichen Reihe? – als Grenzwert von endlichen Summen.
- den Flächeninhalt eines von Kurven begrenzten Bereiches?
  – als Grenzwert der Flächeninhalte von Bereichen, die durch Geradenstücke begrenzt werden.

Grenzwertuntersuchungen von Folgen bilden ein geeignetes Hilfmittel, um das Verhalten einer Funktion in der Umgebung einer Stelle zu charakterisieren. Von besonderem Interesse sind dabei Graphen von Funktionen, die Knicke, Lücken oder Sprünge aufweisen.

Zu den wesentlichen Instrumenten an Bord jedes Autos gehört der Tachometer, der zu jedem Zeitpunkt die Momentangeschwindigkeit anzeigt. Auch wenn sich die Anzeige bei entsprechender Fahrweise sehr schnell ändern kann, wird sie das niemals sprunghaft tun.

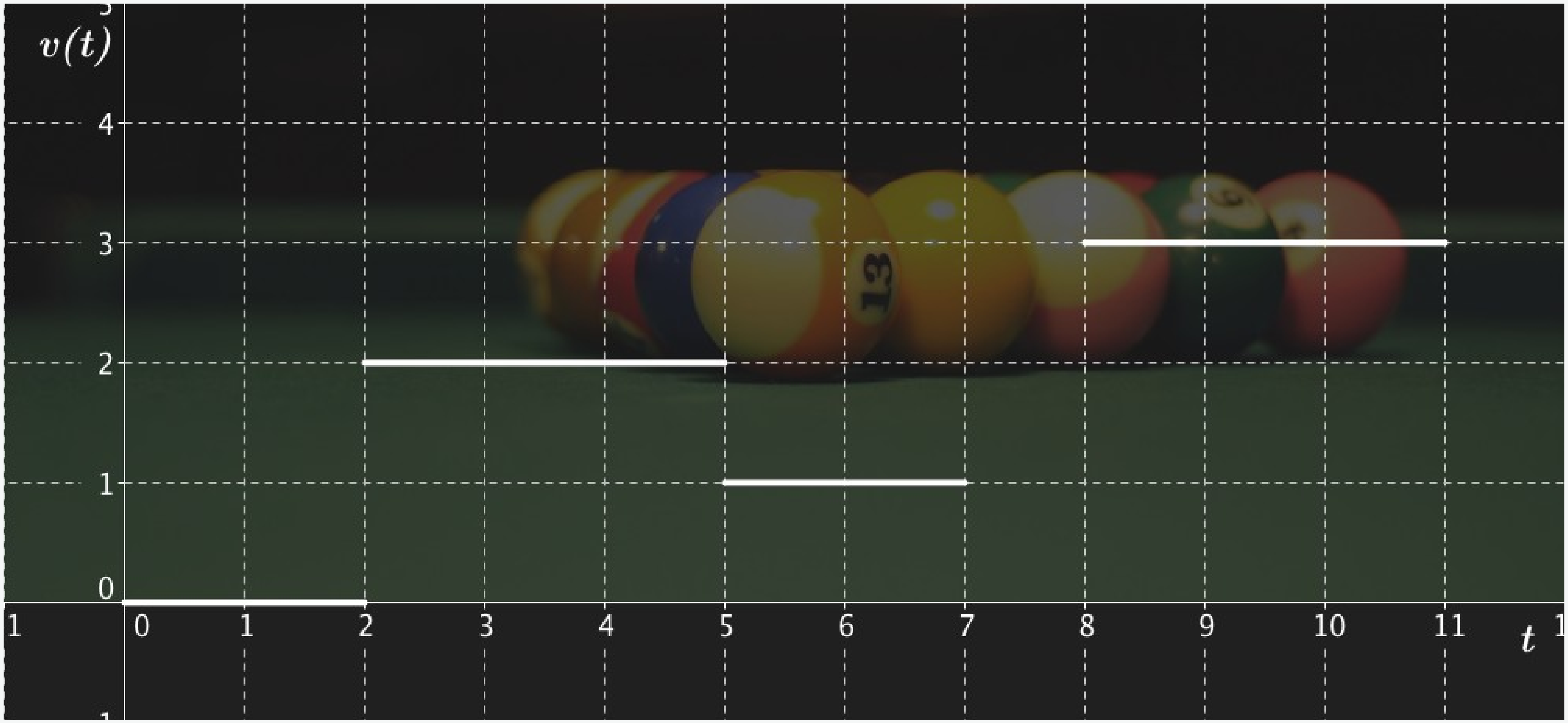

Abb.: Die Bewegung einer Billardkugel lässt sich als eine sprunghafte Änderung der Momentangeschwindigkeit idealisieren

Beim Billard betrachten wir die Idealisierung des vollkommen elastischen Stoßes, bei dem Impuls und Energie erhalten bleiben. Die Kugel ruhen, bis sie einen Impuls erhalten. Dann bewegen sie sich sofort mit einer Geschwindigkeit vorwärts. Den Verlauf der Momentangeschwindigkeit einer Billardkugel zeigt diese Abbildung.

Bei diesen Anwendungsbeispielen ist das Modell entscheidend für die mathematischen Eigenschaften der auftretenden Funktionen.

Wie kann man das Verhalten von Funktionen in beiden Situationen mathematisch fassen?

Der Unterschied zwischen den beiden Situationen besteht darin, dass wir im ersten Fall vom Verhalten in der Nähe eines bestimmten Zeitpunkts auf das Verhalten zu diesem Zeitpunkt schließen können. Wir können auch sagen, dass sich diese Funktion stabil verhält: Eine kleine Änderung des Arguments (des Zeitpunkts) bewirkt nur eine kleine Änderung des Funktionswertes (der Momentangeschwindigkeit). Im zweiten Fall ist es nicht möglich, das Verhalten kurz vor dem Stoß hat nichts mit dem Verhalten danach zu tun. Die Funktion verhält sich instabil, denn man kann die Änderungen in den Funktionswerten nicht dadurch beliebig klein machen, dass man nur sehr kleine Änderungen im Argument zulässt.

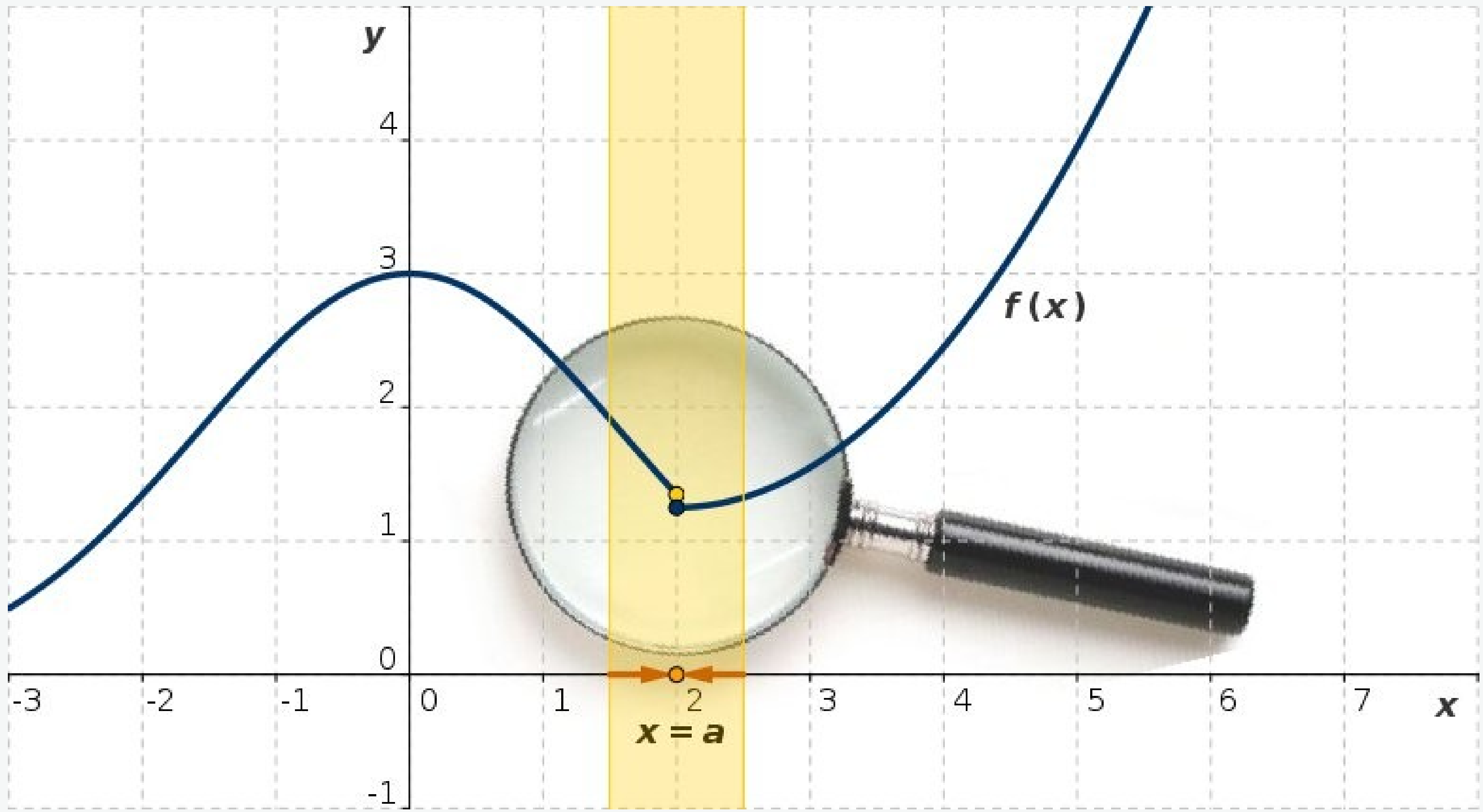

Abb. 2-1: Zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion y = f(x) in der Umgebung eines Punktes x = a

Um das Verhalten von Funktionen zu analysieren, müssen wir sehr genau, mit Hilfe einer mathematischen Lupe, hinsehen. Die Rolle dieser mathematischen Lupe übernehmen in diesem Fall konvergente Folgen.

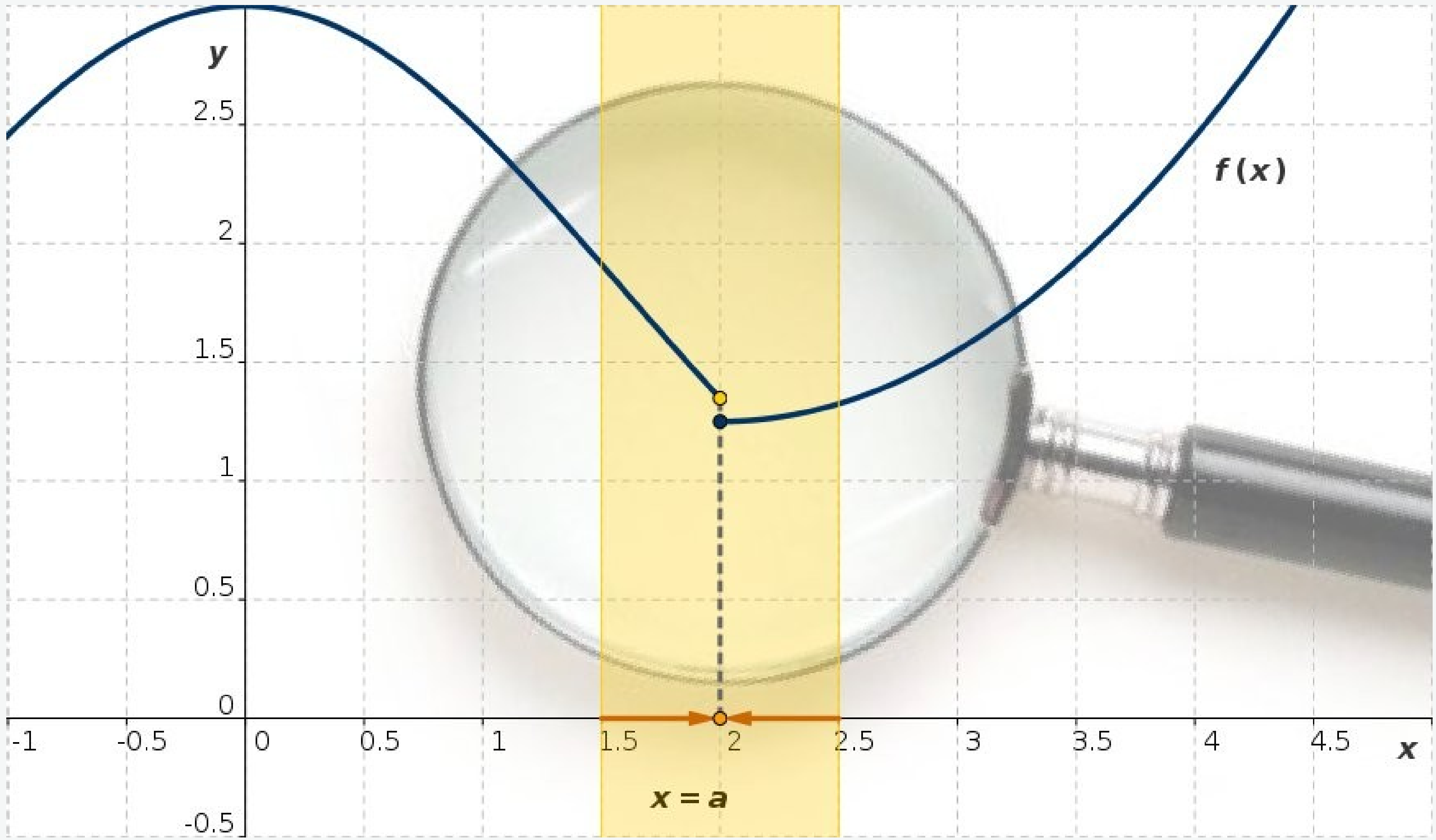

Abb. 2-2: Zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion y = f(x) in der Umgebung eines Punktes x = a

Einige Folgen haben die Eigenschaft, sich mit wachsendem Index immer mehr einer bestimmten Zahl anzunähern. Diese Zahl nennt man Grenzwert oder Limes der Folge. Besitzt eine Folge solchen Grenzwert, so wird sie konvergent, andernfalls divergent genannt.

Definition:

Eine Zahl a heißt Grenzwert einer Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle Folgenglieder mit $n > n(\varepsilon)$ gilt:

$$a_n \in U_\varepsilon(a)$$

Man schreibt: $a_n \to a, \quad n \to \infty$ oder $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

- Die Folge besitzt den Grenzwert a.
- Die Folge konvergiert gegen (den Grenzwert) a.
- Der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ existiert.

Im Verhalten von Zahlenfolgen für wachsende Indices n kommen im Wesentlichen drei “Verhaltensmuster” vor:

Verhaltensmuster 1: Die Glieder der Folge nähern sich mit wachsendem n genau einer Zahl.

Verhaltensmuster 2: Mit wachsendem Index n “nähern sich die Glieder der Folge abwechselnd” zwei verschiedenen Zahlen.

Verhaltensmuster 3: Die Glieder der Folge wachsen mit n über jede noch so große Zahl.

Im Folgenden werden wir diese “Verhaltensmuster” an Beispielen erläutern.

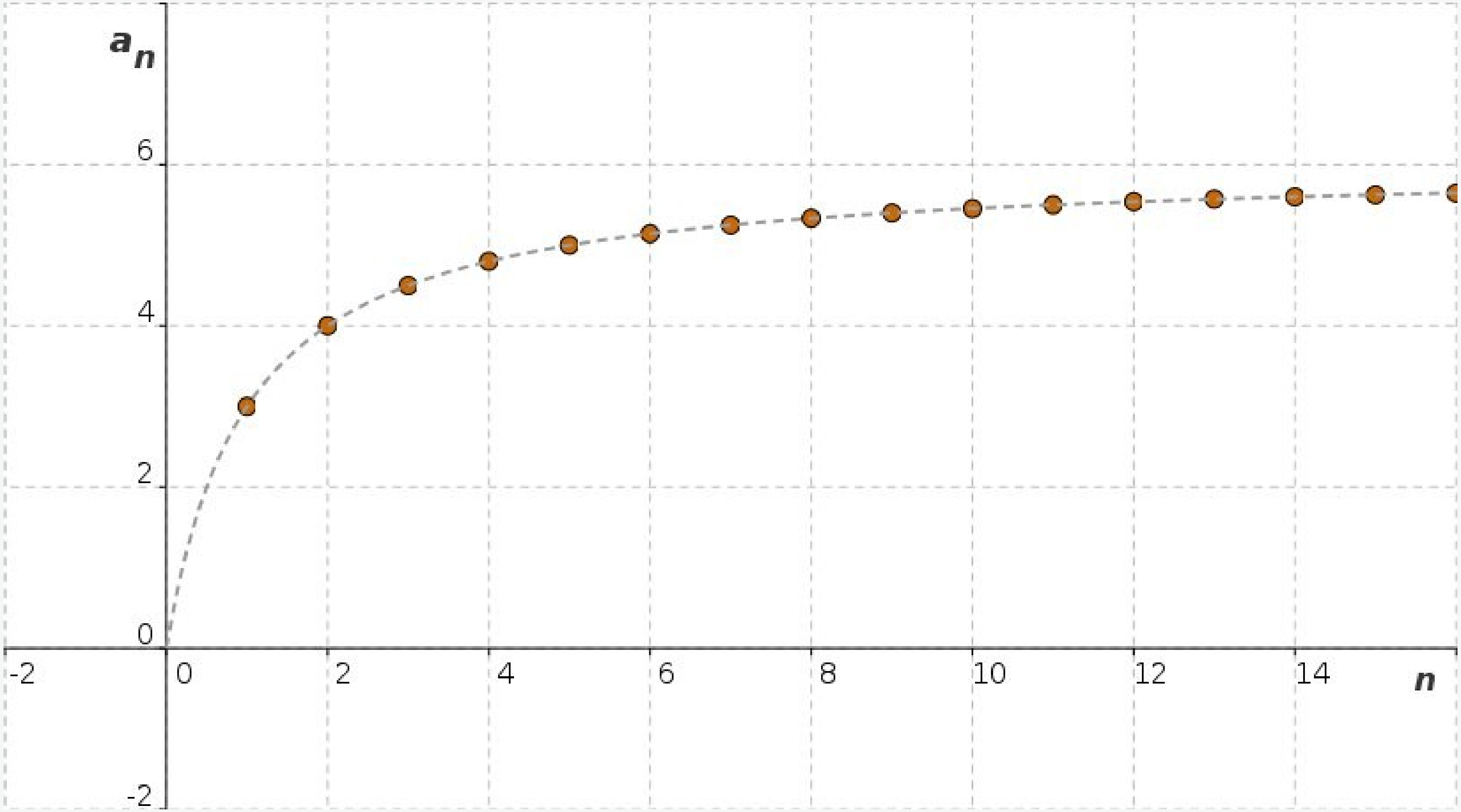

Abb. 3-1: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = \frac{6\,n}{n+1} = 6 - \frac{6}{n+1}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 6$$

Mit dem wachsenden n nähern sich die Glieder der Folge dem Wert 6.

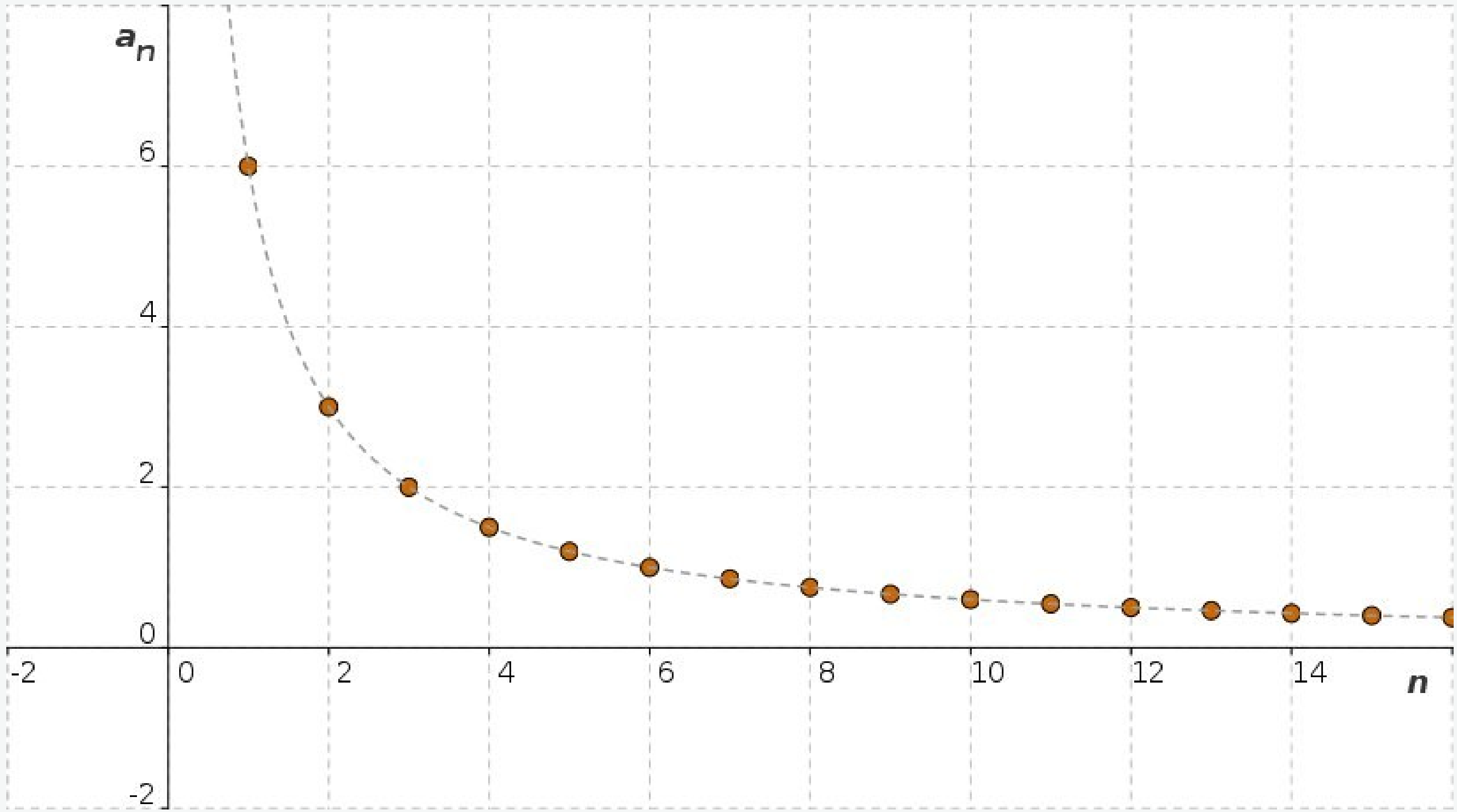

Abb. 3-2: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = \frac{6}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Mit dem wachsenden n nähern sich die Glieder der Folge dem Wert Null.

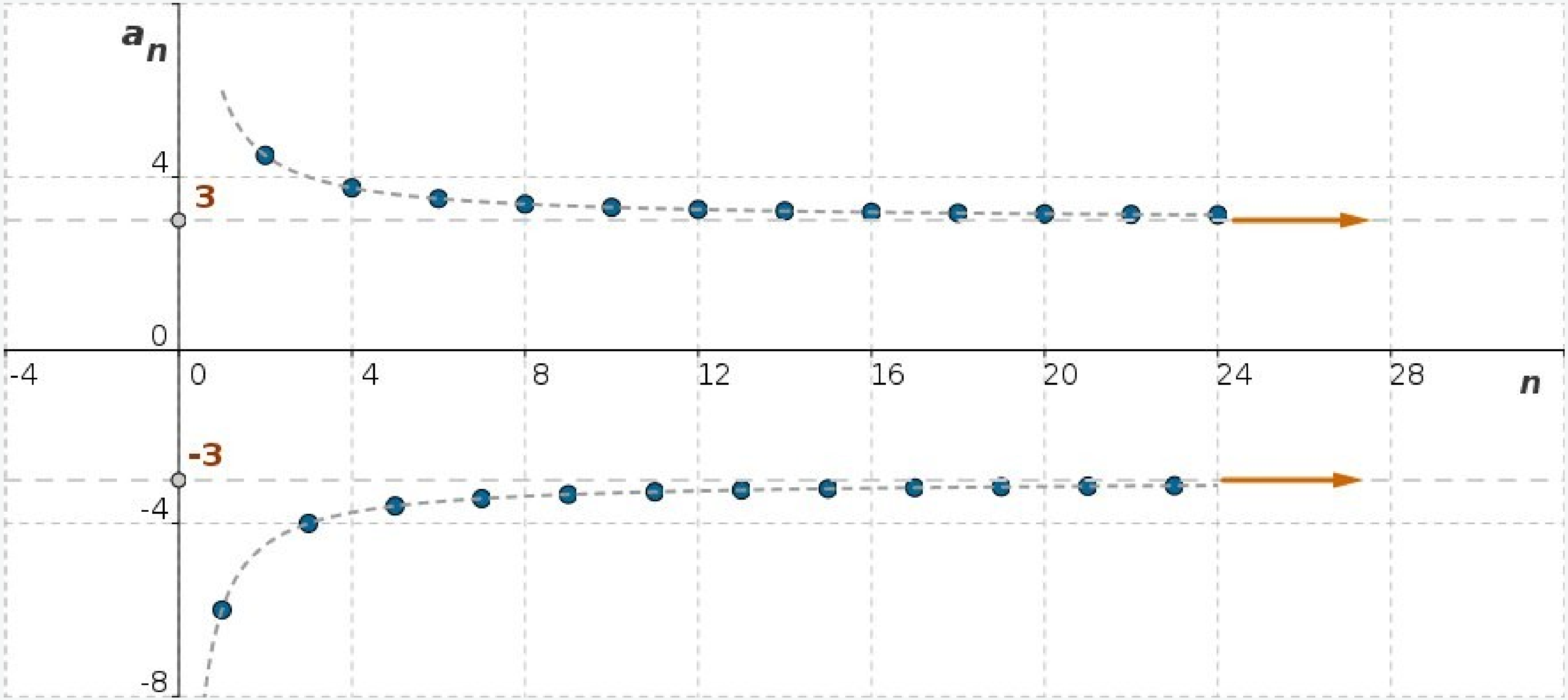

Abb. 3-3: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = (-1)^n \cdot 3 \, \frac{n+1}{n} = (-1)^n \cdot 3 \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Mit wachsendem Index n “nähern sich die Glieder der Folge abwechselnd” zwei verschiedenen Zahlen: 3 und -3. Der Grenzwert existiert nicht.

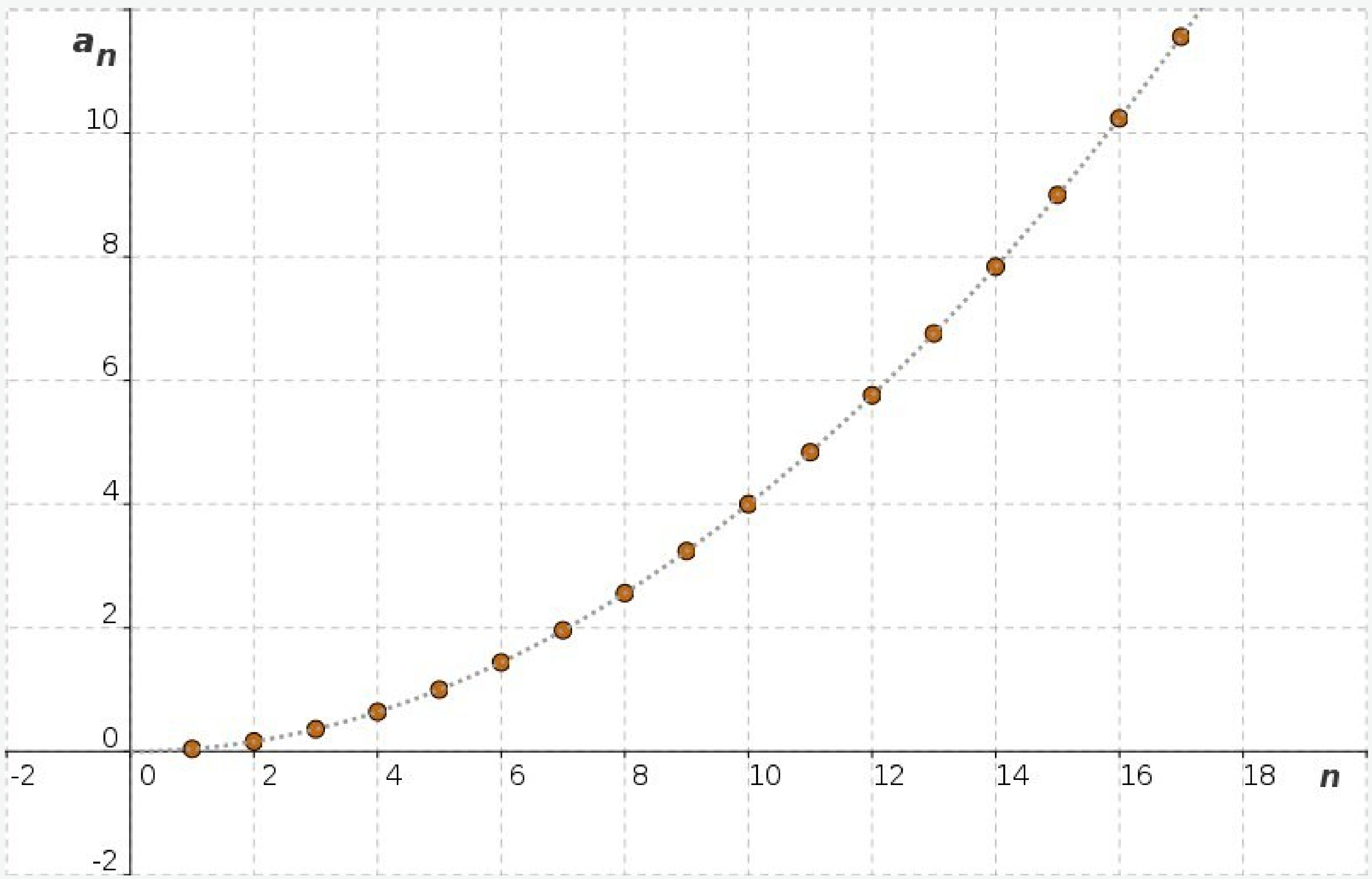

Abb. 3-4: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = n^2 , \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

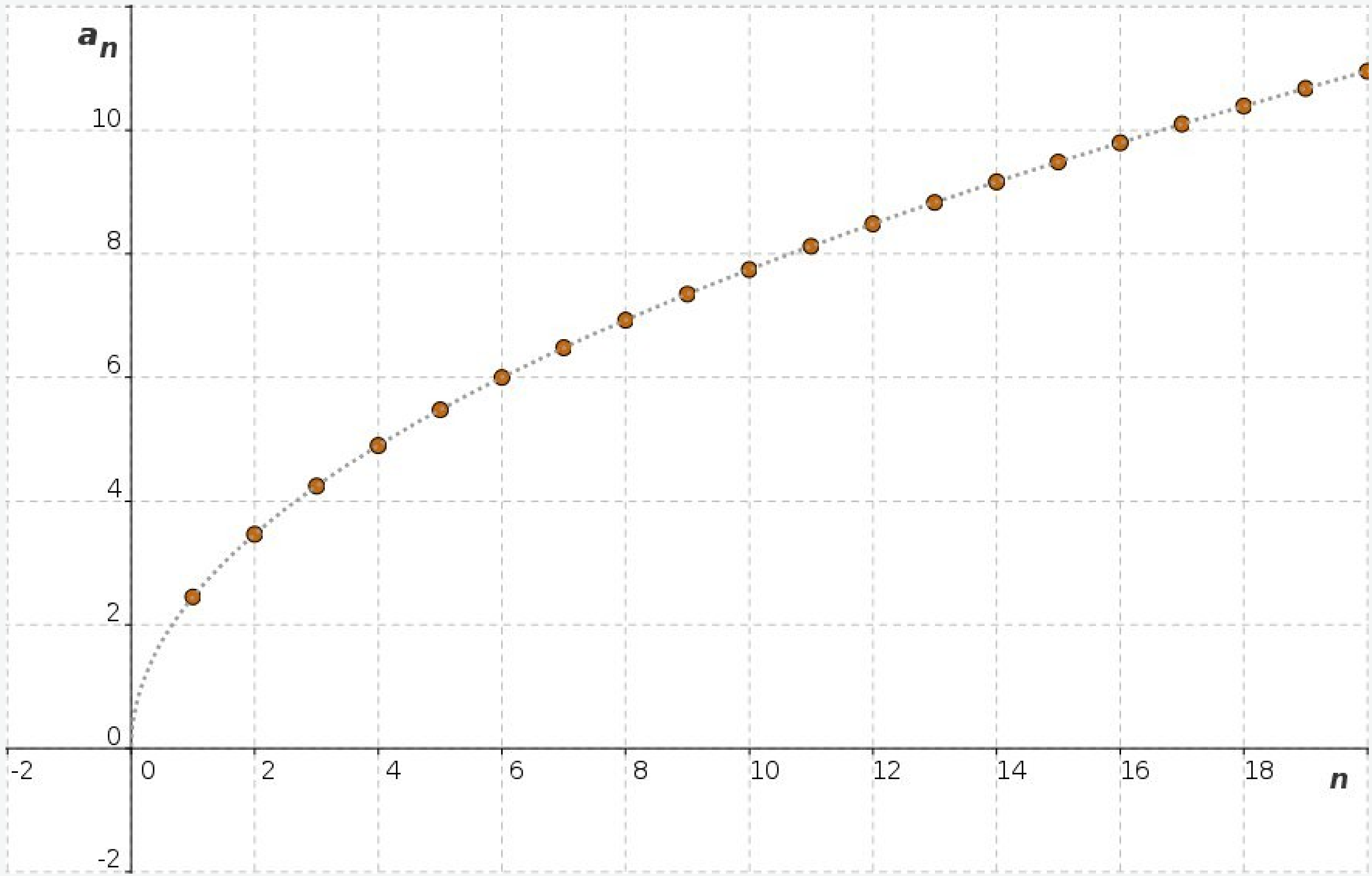

Abb. 3-5: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = \sqrt{n}\,, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

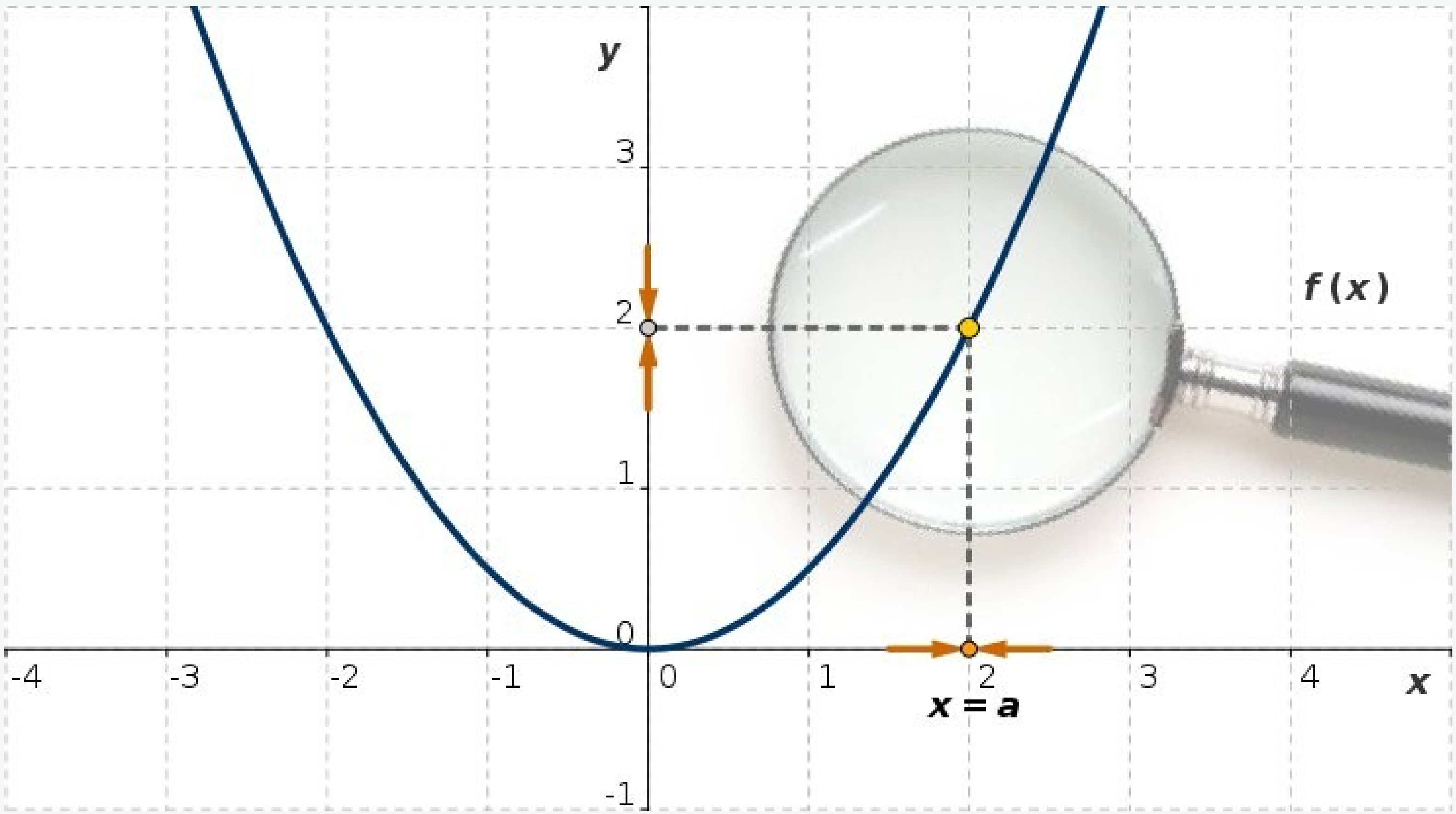

Abb. 6-1: Zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion $y = 0.5\, x^2$ in der Umgebung des Punktes $x = 2$

Im Folgenden analysieren wir das Verhalten der Funktion $y = 0.5\, x^2$ mit Hilfe einer gegen 2 konvergierenden Folge.

Beispiele von vier gegen *2* konvergierenden Folgen

$$\left\langle x_1(n) = 2 - \frac{1}{n} \right\rangle = 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{11}{6},\ \frac{13}{7},\ \frac{15}{8}\ \ldots$$

$$\left\langle x_2(n) = 2 + \frac{1}{n} \right\rangle = 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{11}{5},\ \frac{13}{6},\ \frac{15}{7},\ \frac{17}{8}\ \ldots$$

$$\left\langle x_3(n) = 2 - \frac{1}{n^2} \right\rangle = 1,\ \frac{7}{4},\ \frac{17}{9},\ \frac{31}{16},\ \frac{49}{25},\ \frac{71}{36},\ \frac{97}{49},\ \frac{127}{64}\ \ldots$$

$$\left\langle x_4(n) = 2 + \frac{1}{n^2} \right\rangle = 3,\ \frac{9}{4},\ \frac{19}{9},\ \frac{33}{16},\ \frac{51}{25},\ \frac{73}{36},\ \frac{99}{49},\ \frac{129}{64}\ \ldots$$

Die erste und die dritte Folgen konvergieren gegen *2* von links,
die zweite und die vierte Folgen konvergieren gegen *2* von rechts.

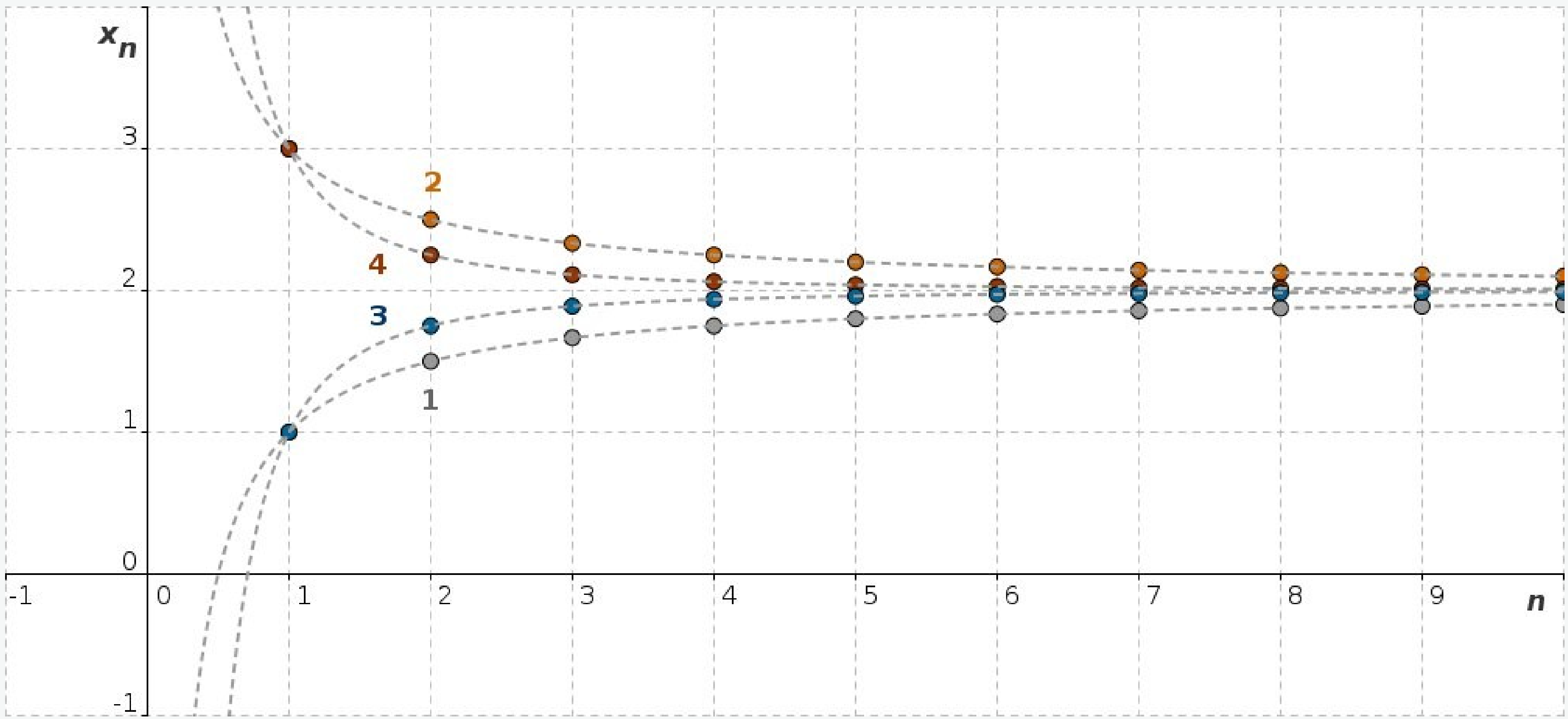

Abb. 6-2: Graphische Darstellung der ersten Glieder von vier Folgen, die gegen 2 konvergieren

$$x_1(n) = 2 - \frac{1}{n}, \quad x_2(n) = 2 + \frac{1}{n}, \quad x_3(n) = 2 - \frac{1}{n^2}, \quad x_4(n) = 2 + \frac{1}{n^2}$$

Eine gegen 2 konvergierende Folge

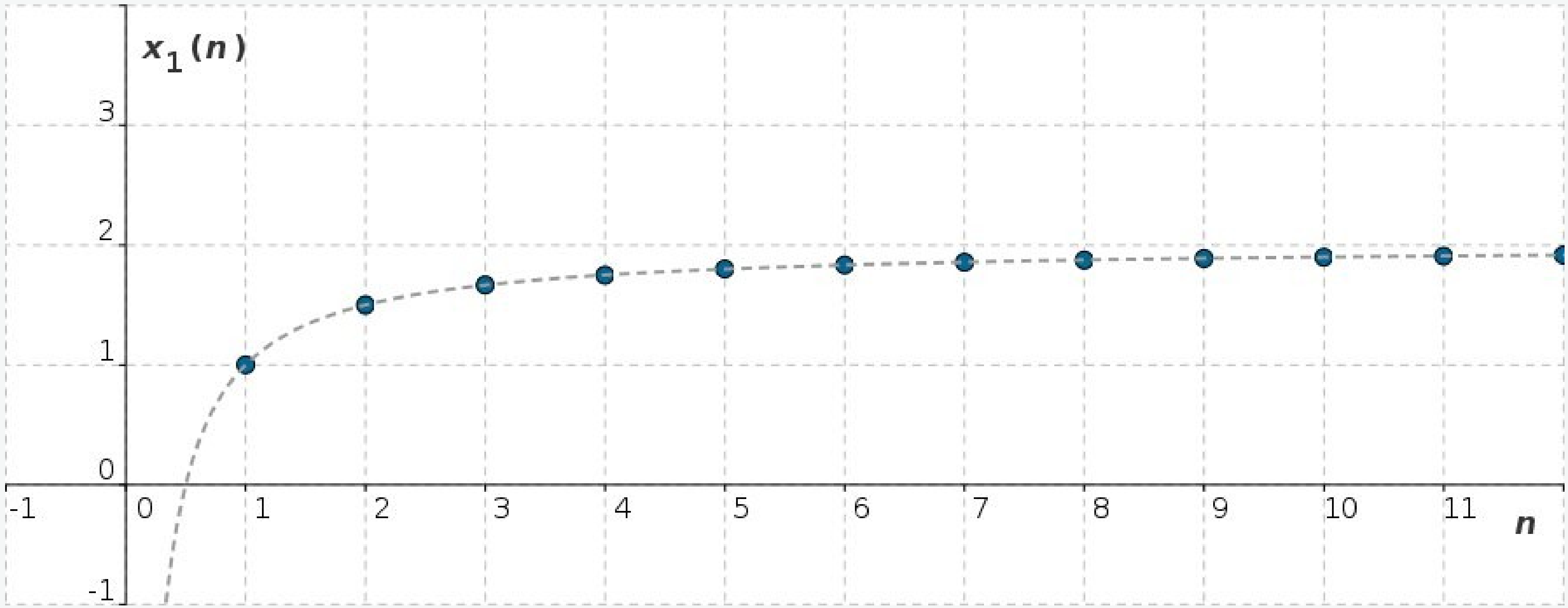

Abb. 6-3: Graphische Darstellung der ersten Glieder der gegen 2 konvergierten Folge x = 2 - 1/n

Für die erste gegen *2* von links konvergierende Folge

$$\left\langle x_1(n) = 2 - \frac{1}{n} \right\rangle = 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{11}{6},\ \frac{13}{7},\ \frac{15}{8}\ \ldots$$

betrachten wir die entsprechende Folge von Funktionswerten.

n	$x_n = 2 - \frac{1}{n}$	$f(x_n) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2$	n	$x_n = 2 - \frac{1}{n}$	$f(x_n) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2$
1	1	0.5	8	1.875	1.7578
2	1.5	1.1250	9	1.8888	1.7839
3	1.6666	1.3888	10	1.9	1.805
4	1.7	1.5313	11	1.9091	1.8223
5	1.8	1.62	12	1.9166	1.8368
6	1.8333	1.6806	13	1.9231	1.8491
7	1.8571	1.7245	14	1.9286	1.8597

Tabelle: Zur Untersuchung des Verhaltens einer Folge von Funktionswerten in der Umgebung der Stelle $x = 2$ (Annäherung von links)

Jedem Glied der im Definitionsbereich der Funktion $f(x) = 0.5\, x^2$ liegenden Folge

$$\left\langle x_l(n) = 2 - \frac{1}{n} \right\rangle = 1, \;\; 1.5, \;\; 1.666, \;\; 1.7, \;\; 1.8, \;\; 1.8333, \;\; 1.8571 \;\; \ldots$$

wird durch die Funktionsgleichung genau ein Funktionswert zugeordnet. Der Tabelle ist zu entnehmen, dass die Folge gegen den Wert *2* konvergiert.

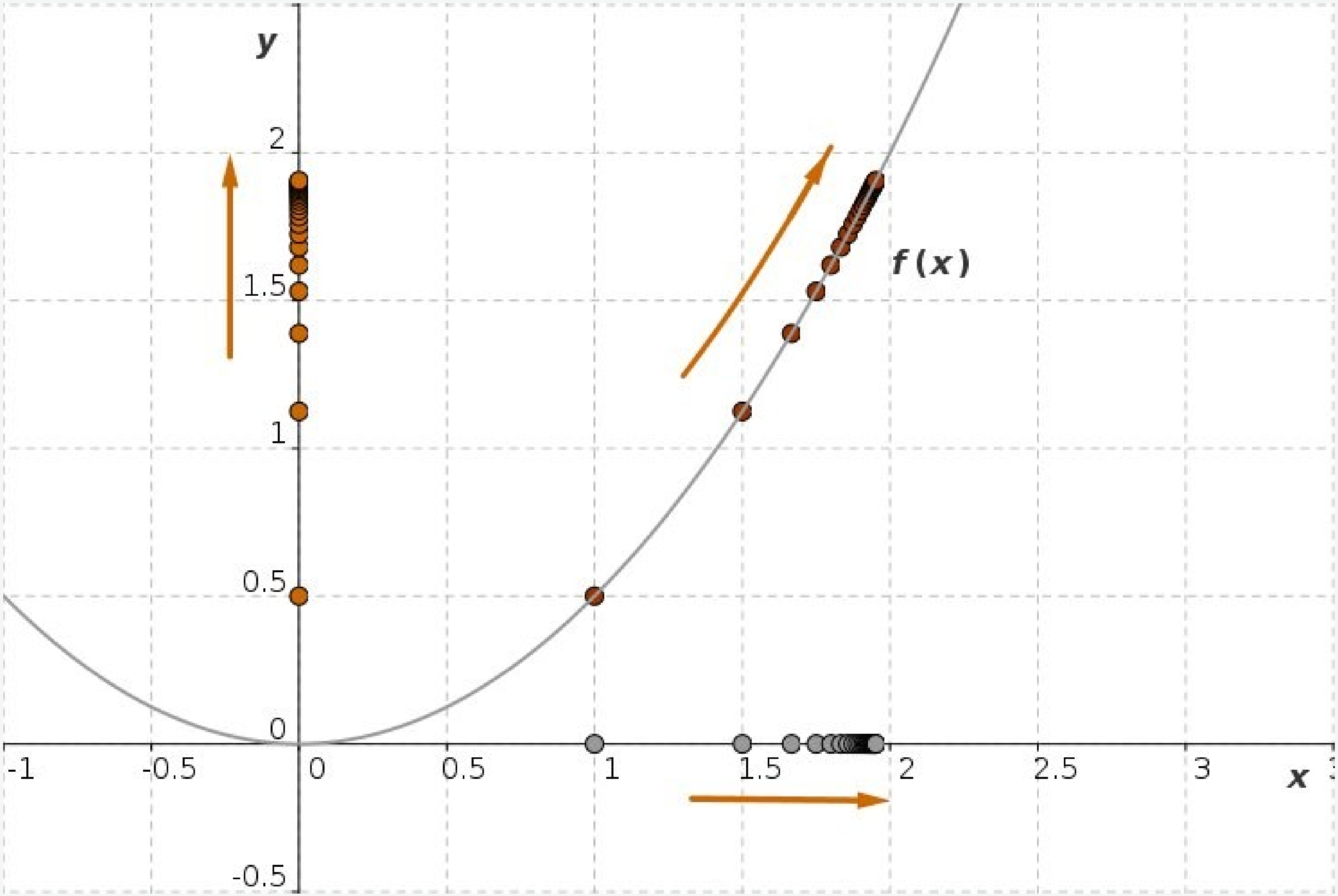

Abb. 7-1: Zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion y = 0.5 x² in der Umgebung des Punktes x = 2 mit Hilfe einer konvergierenden Folge (Annäherung von links, Index "l")

$$x_l(n) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$x_l(n) = 2 - \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} x_l(n) = 2$$

$$f(x_l(n)) = f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_l(n)) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty}\left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n \to \infty} 4 - \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - 0 + 0\right) = 2$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_l(n)) = \lim_{x \to 2 - \varepsilon} f(x) = 2$$

Da die x-Werte der Folgenglieder kleiner als 2 sind, nennt man diesen Grenzwert den linksseitigen Grenzwert von $f(x) = 0.5\, x^2$ an der Stelle $x = 2$.

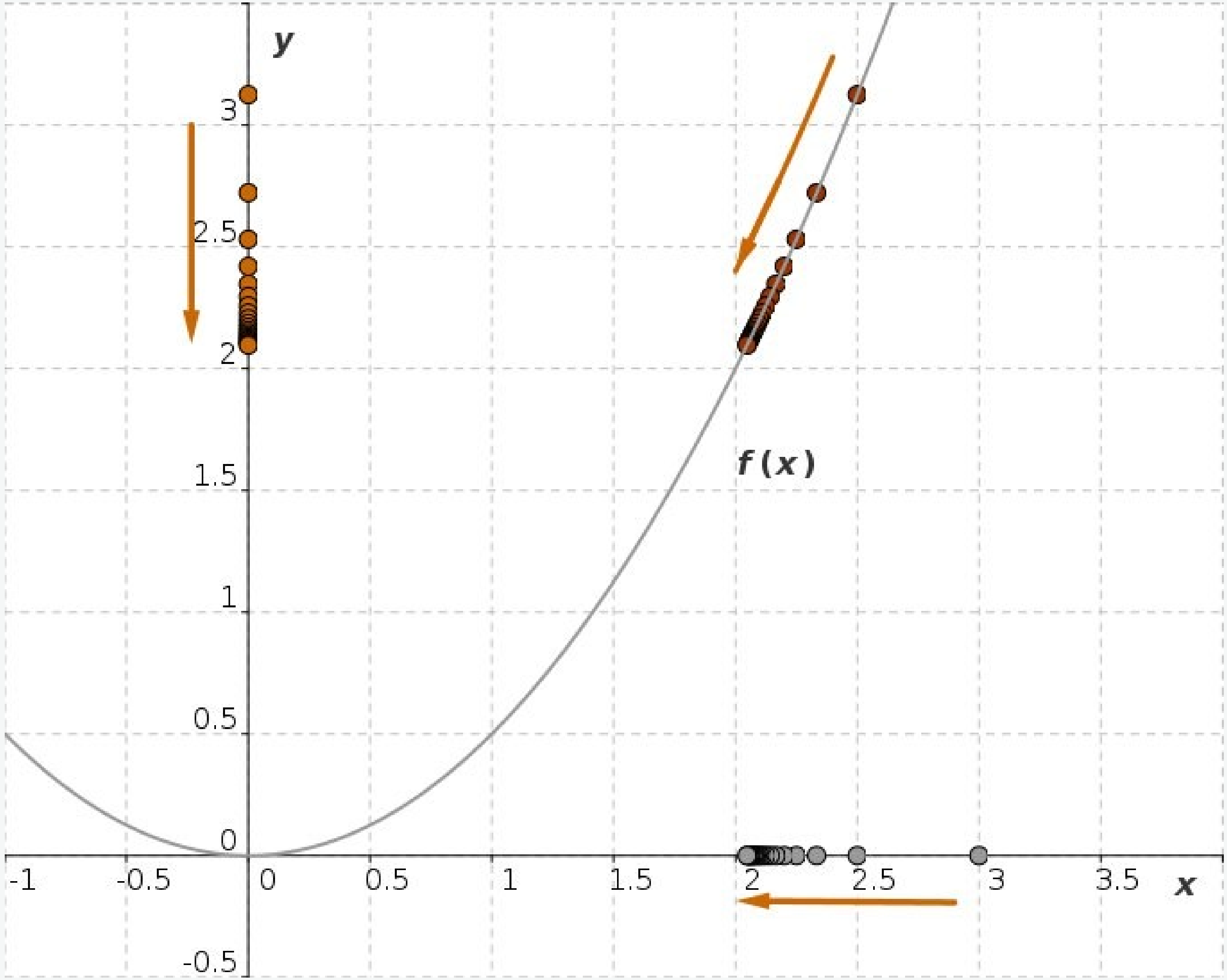

Abb. 7-2: Zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion $y = 0.5\,x^2$ in der Umgebung des Punktes $x = 2$ mit Hilfe einer konvergierenden Folge (Annäherung von rechtss, Index “r”)

$$x_r(n) = 2 + \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} x_r(n) = 2$$

$$f\,(x_r(n)) = f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\lim_{n \to \infty} f\,(x_r(n)) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{n \to \infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n \to \infty}\left(4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n \to \infty} 4 + \lim_{n \to \infty}\frac{4}{n} + \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(4 + 0 + 0) = 2$$

$$\lim_{n \to \infty} f\,(x_r(n)) = \lim_{x \to 2 + \varepsilon} f\,(x) = 2$$

Da die x-Werte der Folgenglieder größer als *2* sind, nennt man diesen Grenzwert den rechtsseitigen Grenzwert von $f\,(x) = 0.5\,x^2$ an der Stelle $x = 2$.

Der Grenzwert einer Funktion für $x \to a$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass der Funktionsgrenzwert auch im Fall einer anderen gegen *2* konvergierenden Folge unverändert bleibt

$$x_r(n) = 2 + \frac{1}{n^3}, \qquad \lim_{n \to \infty} x_r(n) = 2$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_r(n)) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{n^3} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n^3} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left(4 + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^6} \right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \to \infty} 4 + \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n^3} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^6} \right) = 2$$

Allgemeiner gilt: Der Funktionsgrenzwert ist unabhängig von der gewählten Zahlenfolge.

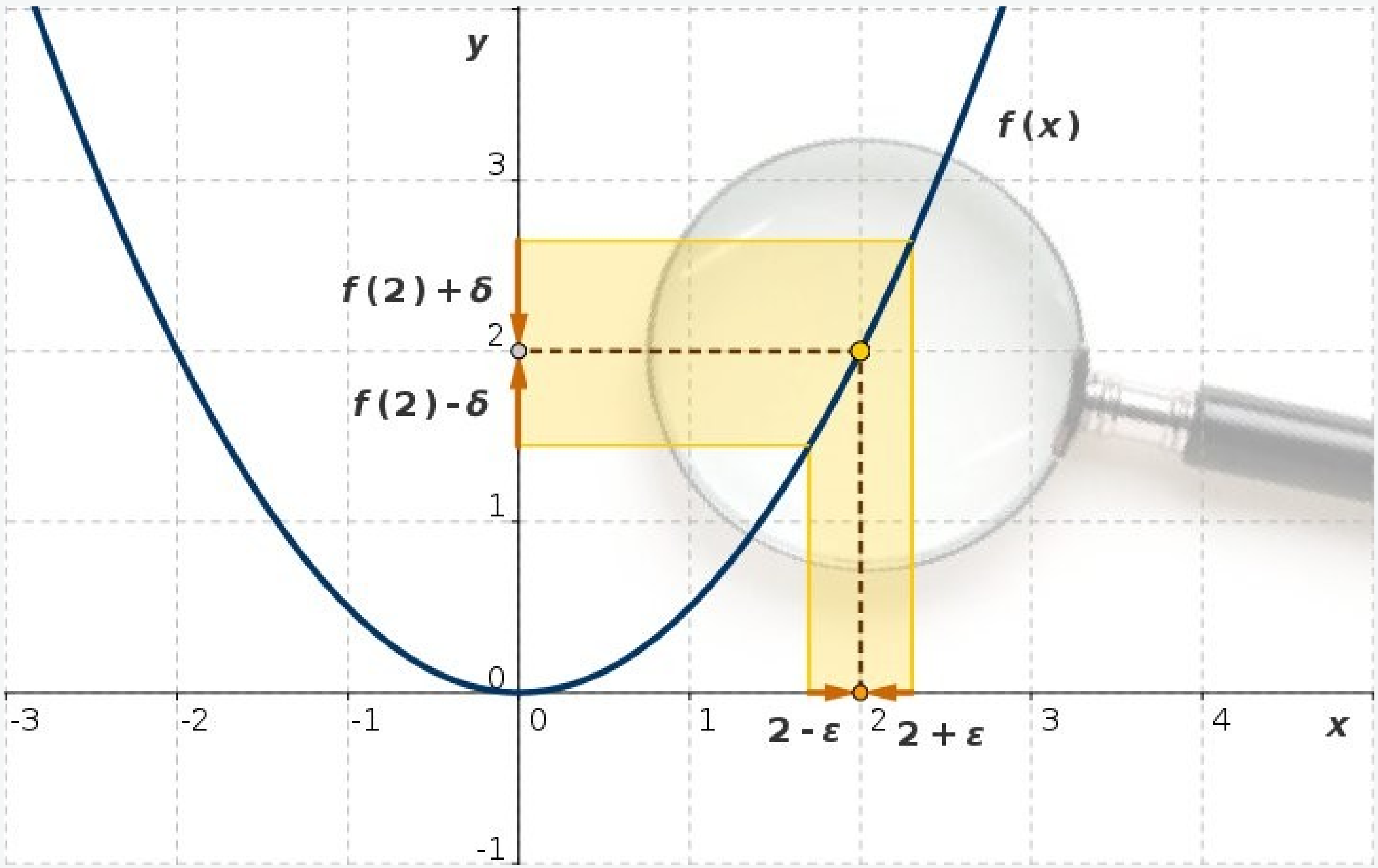

Abb. 7-3: Zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion $y = 0.5\,x^2$ in der Umgebung des Punktes $x = 2$ mit Hilfe konvergierender Folgen (Annäherung von links und rechts)

$$\lim_{x \to 2 + \varepsilon} f(x) = \lim_{x \to 2 - \varepsilon} f(x) = f(x = 2) = 2$$

Für die Funktion $y = 0.5\, x^2$ existieren sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert der Funktion und beide sind gleich *2*.

Zusammenfassung:

- Die Funktion $y = 0.5\, x^2$ ist in der Umgebung der Stelle $x = 2$ untersucht worden.
- Die Funktion ist an der Stelle $x = 2$ definiert.
- Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existieren und sind gleich dem Funktionswert in diesem Punkt.