Einleitung

http://www.flickr.com/photos/andreapreda/2571391498/

Stellen wir uns eine solche Situation vor: Wir leihen jemandem etwas Geld, sagen wir 1 Euro, und es gelingt uns, den Empfänger zu einer Zinsrate von 100 % pro Jahr zu überreden. Dann haben wir nach einem Jahr $1 + 1 = 2$ Euro.

Wenn wir noch raffinierter sind, können wir versuchen, den Empfänger zu einer Zinsrate von 50 % pro Halbjahr zu überreden. Das klingt, als sei es dasselbe – die halbe Rate, zahlbar doppelt so oft –, ist es aber nicht.

http://www.n24.de/media/_fotos/8verbraucher/2008_1/juli_3/Zinsen-dpa-gr.jpg

Nach den ersten sechs Monaten haben wir $1 + \dfrac{1}{2}$ Euro, und nach weiteren sechs Monaten nahm unser Vermögen wieder um den Faktor $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$ zu, d.h. nach einem Jahr haben wir $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 2.25$ Euro.

Entsprechend führt eine dreimal jährlich zu zahlende Zinsrate von $33\,\dfrac{1}{3}\,\%$ am Jahresende zu einem Anspruch auf eine Rückzahlung von

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37 \quad \text{Euro,}$$

also zu noch mehr.

Kann man vielleicht auf diese Art in einem Jahr ein Vermögen machen?

Nein, das kann man nicht.

$$n = 1, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2$$

$$n = 10, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.59374$$

$$n = 100, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.70481$$

$$n = 1000, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71692$$

$$n = 10000, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71815$$

Der Grund dafür ist: Wenn wir n gegen Unendlich gehen lassen, nähert sich die Größe

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

einem endlichen Grenzwert.

Dieser Grenzwert ist

$$e = 2.7182818284 59 \ldots$$

Diese Zahl e taucht wie die Zahl π in der Mathematik in vielen sehr unterschiedlichen Zusammenhängen auf. Insbesondere kommt sie in Verbindung mit der grundsätzlichen Frage vor, wie rasch sich Dinge verändern.

http://www.beastcoins.com/RomanImperial/II/Hadrian/Hadrian-NIR-COSIII-Crescent7Stars-Eastern.jpg

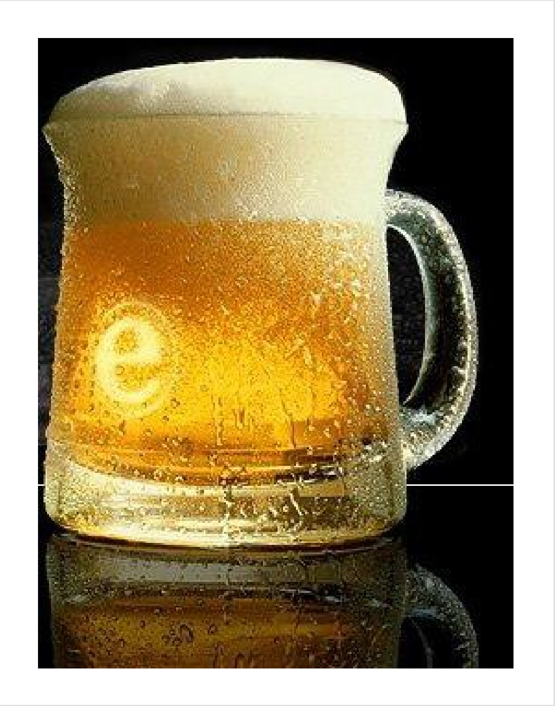
Jahrhunderte lang konnten die Gelehrten den prähistorischen Objekten nur relative Zeiten zuordnen, die auf eine einfache Beobachtung zurückgingen: Wenn sich Archäologen durch eine Erdschicht "durchbuddeln", gehen sie auch in der Zeit zurück. Das ist relativ einfach. Wie steht es aber mit dem absoluten Alter, z.B. eines ausgegrabenen Knochens?

http://www.monstersandcritics.de/downloads/downloads/articles3/152817/article_images/dino1.jpg

Seit den *60*-er Jahren sind Altersbestimmungen mithilfe der Radiocarbonmethode möglich. Die alles entscheidende Gleichung für die Datierung ist:

$$A(t) = A_0 \, e^{-\lambda \, t}$$

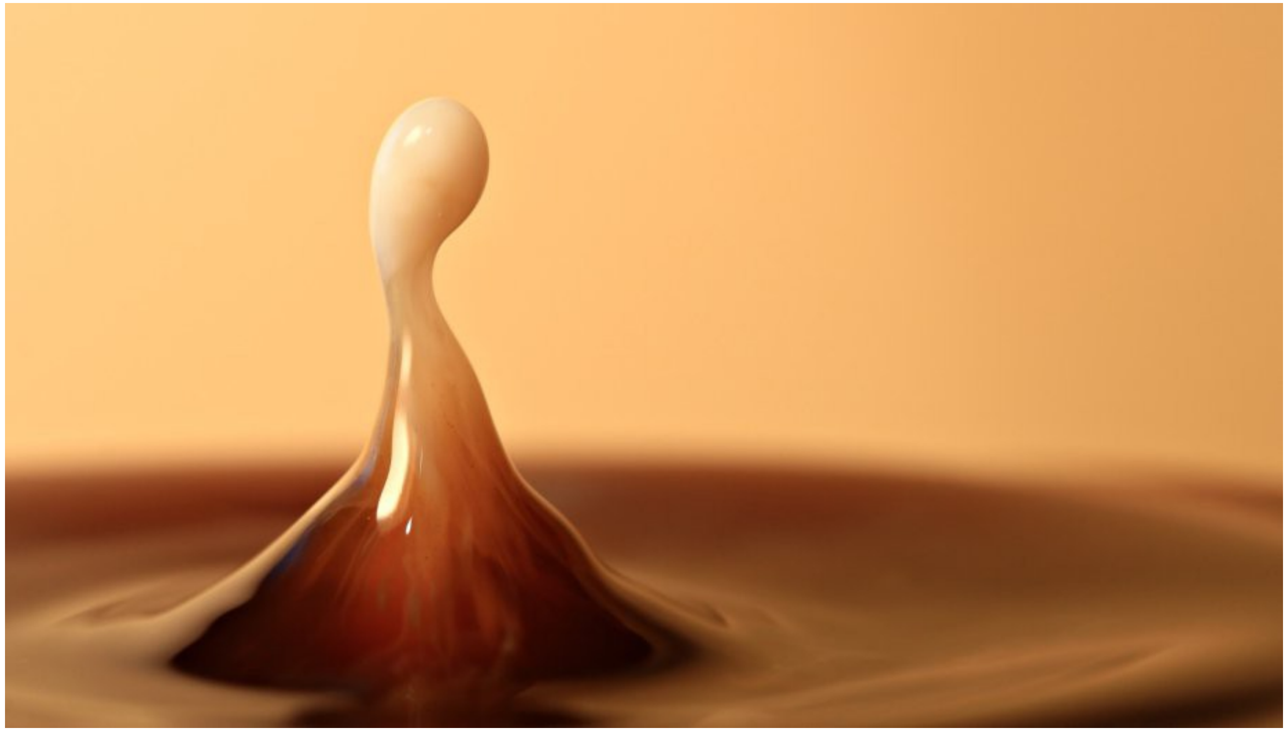
A(t) gibt die Radioaktivität der Probe an, t ist die Zeit in Jahren, die seit dem Tod des Lebewesens vergangen ist, λ ist die Zerfallskonstante von C14.



http://www.elektronik-kompendium.de/public/schaerer/bilder/salgreib.jpg

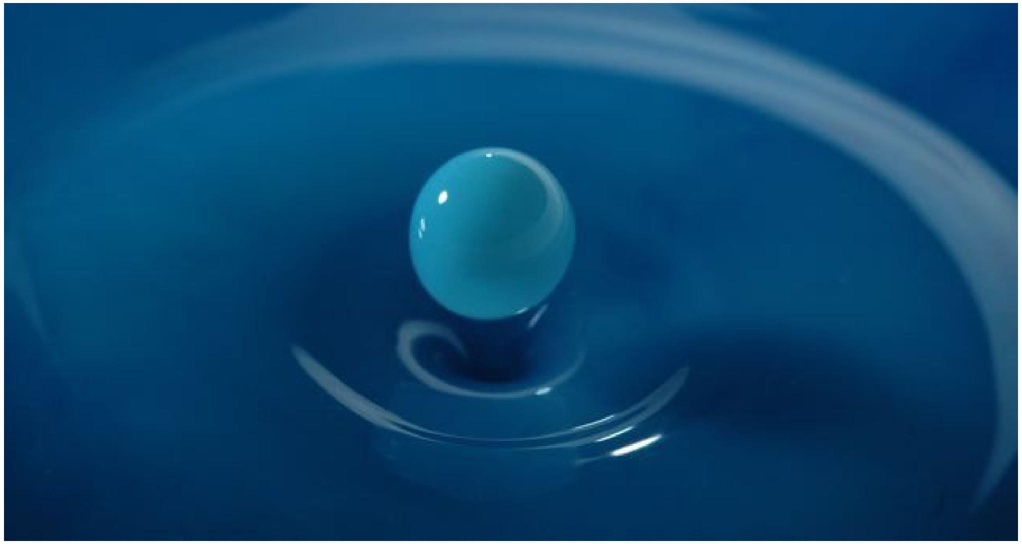
Es ist experimentell nachprüfbar, dass die Höhe des Bierschaums in einem Glas exponentiell mit der Zeit abnimmt. Eine Versuchsreihe lieferte die Abhängigkeit

$$h = h_0 \, e^{-k\,t}, \qquad h_0 = 6 \text{ cm}, \qquad k = 0.022 \; s^{-1}$$



http://img.fotocommunity.com/photos/9011788.jpg

Die Zahl e spielt häufig im Zusammenhang mit Instabilitäten eine Rolle.



http://gallery.photo.net/photo/10040340-lg.jpg

Abb. 1-1: Der Tropfen fällt in eine Milchschale

Stellen wir uns zum Beispiel vor, ein kleiner Tropfen fällt in eine Milchschale, und die Milch spritzt hoch. Der fallende Tropfen ist anfänglich mehr oder weniger kugelförmig. Aufgrund dieser anfänglichen Symmetrie sollte man meinen, dass die Milchoberfläche beim Aufprall symmetrisch reagiert.

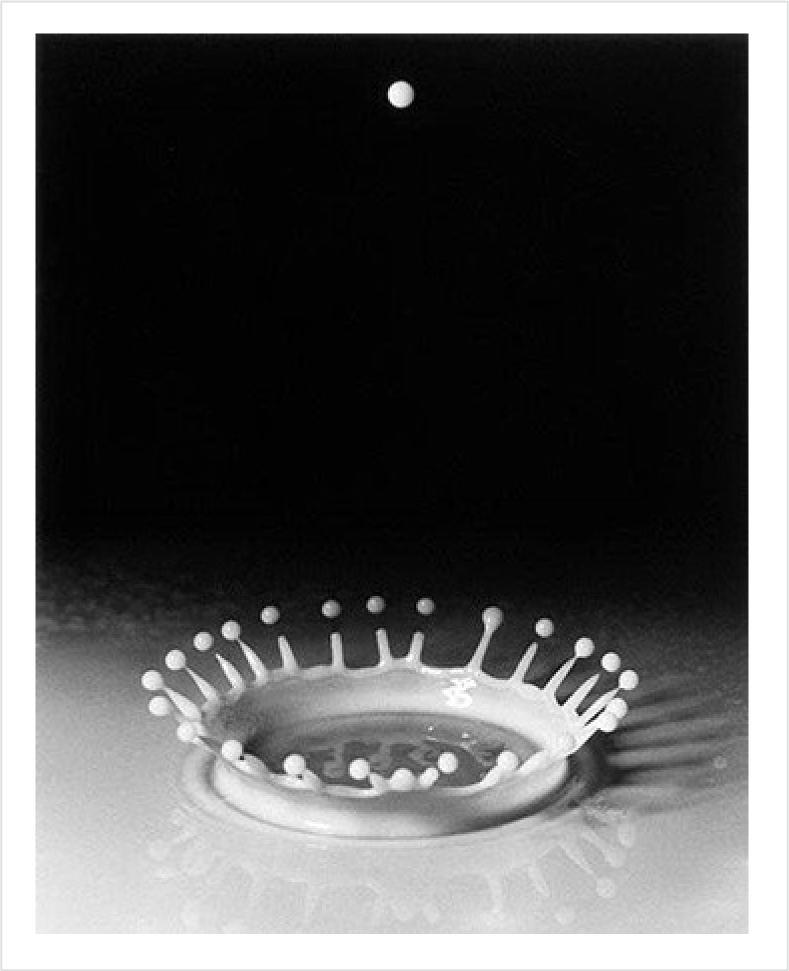
http://gallery.photo.net/photo/6312824-lg.jpg

http:///blog.photosandponderings.com/wp-content/uploads/2009/04/dsc_6757.jpg

Abb. 1-2: Wie die Milchoberfläche beim Aufprall reagiert

Das entspricht zunächst auch der Beobachtung: Die Oberfläche steigt anfänglich vom Aufprallpunkt aus in einem glatten, kreisförmigen Ring nach oben, dessen dünne Wand sich sanft nach außen krümmt.

Kurze Zeit später und ohne erkennbaren Grund bilden sich am oberen Rand dieser dünnen Milchwand Wellen mit “Gipfeln” und “Tälern”. Diese Wellenförmigkeit prägt sich sehr schnell stärker aus, und die Gipfel werden zu lang gezogenen Zacken, von denen jeder am Ende einen winzigen Milchtropfen abstößt.



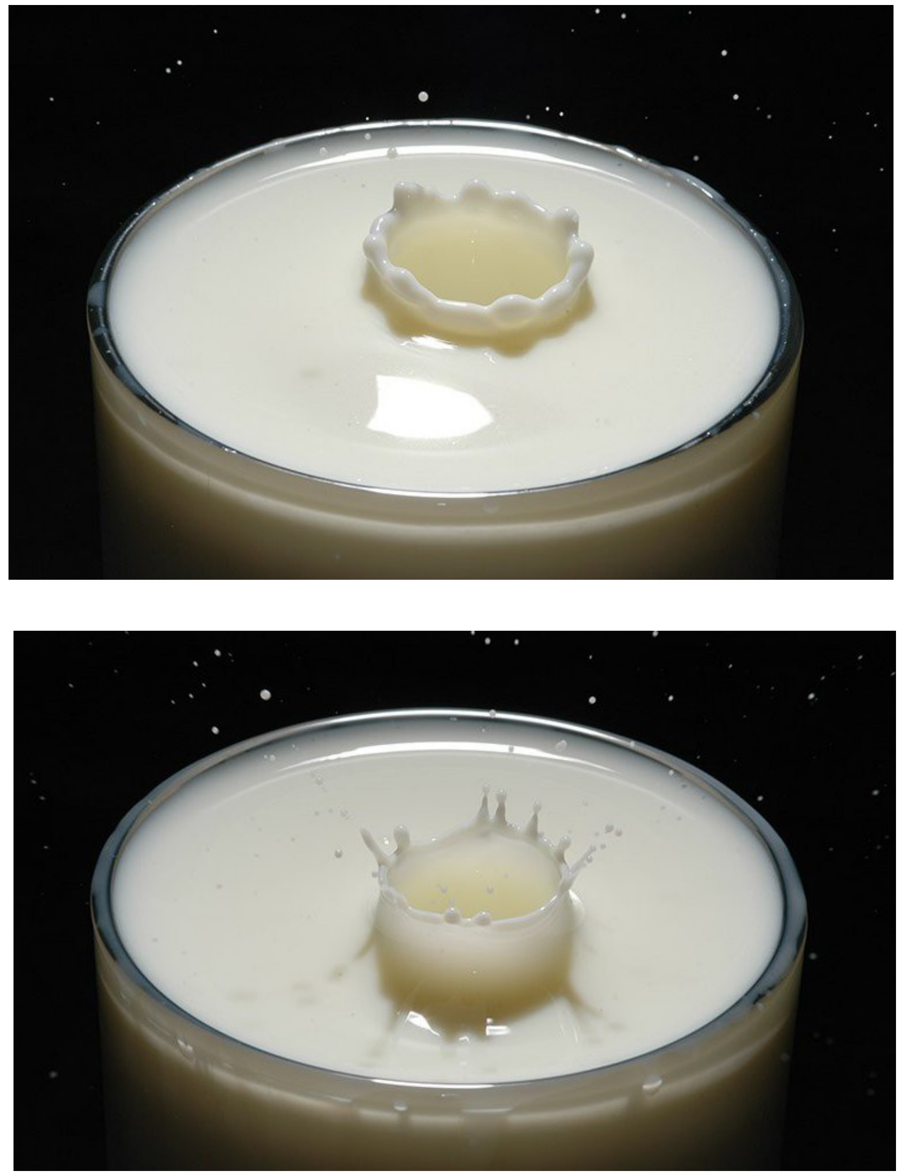
http://www.ljclark.com/seeing/Images/MilkDropW2.jpg

Abb. 1-3: Die Gipfel werden zu lang gezogenen Zacken, von denen jeder am Ende einen winzigen Milchtropfen abstößt.

http://www.nies.ch/misc/index.de.php/image200509-d70-5633.php

Abb. 2-1: Der Tropfen fällt in eine Milchschale

Wir zeigen noch einmal an einem Glass mit Milch, wie sich eine Instabilität entwickelt.



Http://www.nies.ch/misc/index.de.php/image200509-d70-5628.php, http://www.nies.ch/misc/image200509-d70-5673.jpg

Abb. 2-2: Die Milchoberfläche reagiert beim Aufprall

http://www.scantips.com/speed.html

Woher kommt dieses Zackenmuster?

Warum bleiben die Milchwände beim Aufsteigen nicht symmetrisch und bewahren die kreisrunde Form?

Die symmetrische Bewegung ist im Prinzip möglich, man beobachtet die selten, weil kleine unerwünschte und unvermeidliche Störungen im Laufe der Zeit rasch zunehmen und das Ergebnis stark verändern.

Die symmetrische Bewegung ist im Prinzip möglich, man beobachtet sie selten, weil kleine unerwünschte und unvermeidliche Störungen im Laufe der Zeit rasch zunehmen und das Ergebnis stark verändern.

Die ursprüngliche symmetrische Bewegung ist instabil. Es ist ähnlich wie bei einem Bleistift, den man auf der Spitze balacieren will. Von entscheidender Bedeutung ist dabei, dass zu Beginn der Instabilität die kleinen Störungen proportional zur Größe der jeweiligen Störungen zunehmen, und hier kommt wieder die Zahl e ins Spiel.


$e = 2.718 \ldots$