Definition:

Die Funktion f: $x \to y$ ordnet jedem x eindeutig ein y zu. Kann umgekehrt auch jedem y eindeutig ein x zugeordnet werden, so entsteht die Umkehrfunktion oder inverse Funktion von f. Sie wird mit f^{-1} bezeichnet, d.h.

$$f^{-1} : y \to x$$

Bei gegebener Funktionsgleichung $y = f(x)$ erhält man die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion in zwei Schritten:

1. Schritt: Umstellen der Funktionsgleichung nach x : $x = f^{-1}(y)$

2. Schritt: Vertauschen der Bezeichnung der Variablen (damit die abhängige und unabhängige Variable die übliche Bezeichnung erhalten):

$$y = f^{-1}(x)$$

Dieser Schritt hat formalen Charakter.

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen folgender Funktionen:

Aufgabe 1: $f \, : \, y = \dfrac{x}{2} - 1$

Aufgabe 2: $f \, : \, y = 3\,x - 2$

Aufgabe 3: $f \, : \, y = -\,x + 2$

Aufgabe 4: $f \, : \, y = \dfrac{1}{2\,x}$

Aufgabe 5: $f \, : \, y = \dfrac{x^2}{2}$

Aufgabe 6: $f \, : \, y = x^6$

$$y = f(x), \qquad y = \frac{x}{2} - 1$$

1. Schritt: Die Funktionsgleichung nach der Variablen x auflösen:

$$f^{-1}: \ x = 2y + 2 = f^{-1}(y)$$

2. Schritt: Die Variablen x und y miteinander vertauschen:

$$f^{-1}: \ y = 2x + 2 = f^{-1}(x)$$

An der folgenden Abbildung erkennt man, dass die Graphen der Funktion und der Umkehrfunktion symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y = x$ liegen.

Umkehrfunktion: Lösung 1

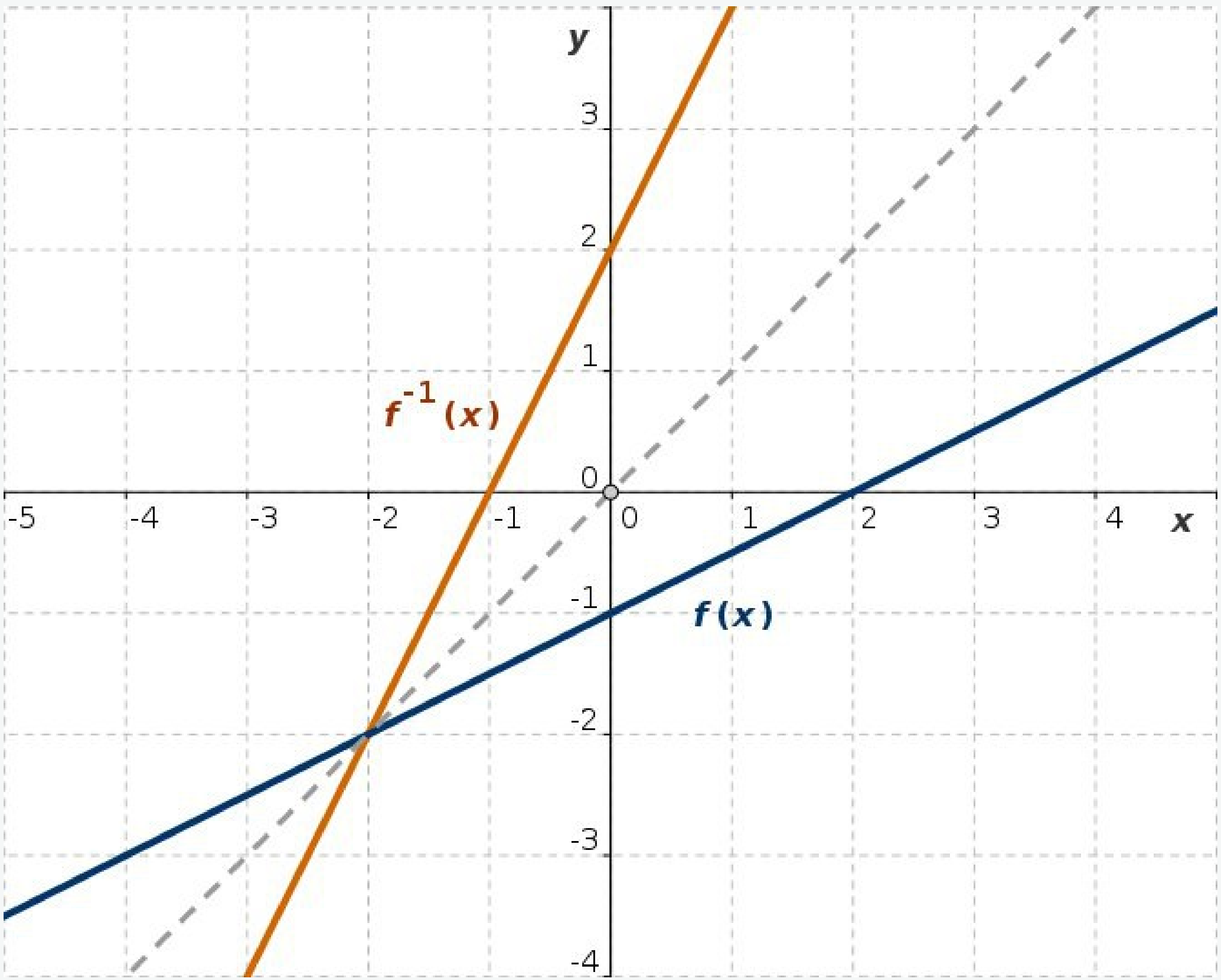

Abb. L1: Funktion (blau) und Umkehrfunktion (rot) sind symmetrisch in Bezug auf die Gerade $y = x$

$$f(x) = \frac{x}{2} - 1, \qquad f^{-1}(x) = 2x + 2$$

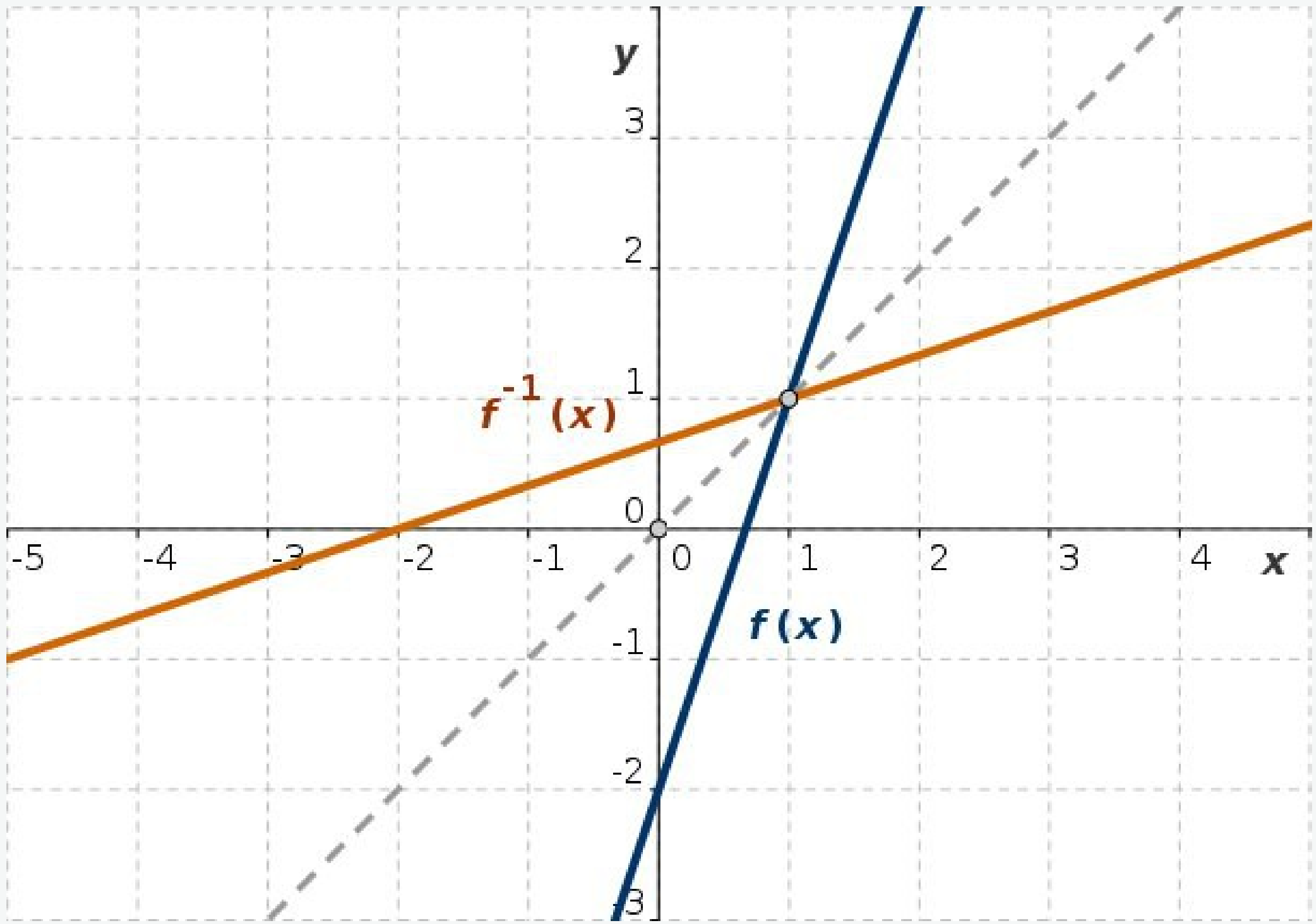

Abb. L2: Funktion (blau) und Umkehrfunktion (rot)

$$f \;:\; y = 3\,x - 2, \qquad f^{-1} \;:\; x = \frac{y+2}{3} = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1} \;:\; y = \frac{x+2}{3} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} = f^{-1}(x)$$

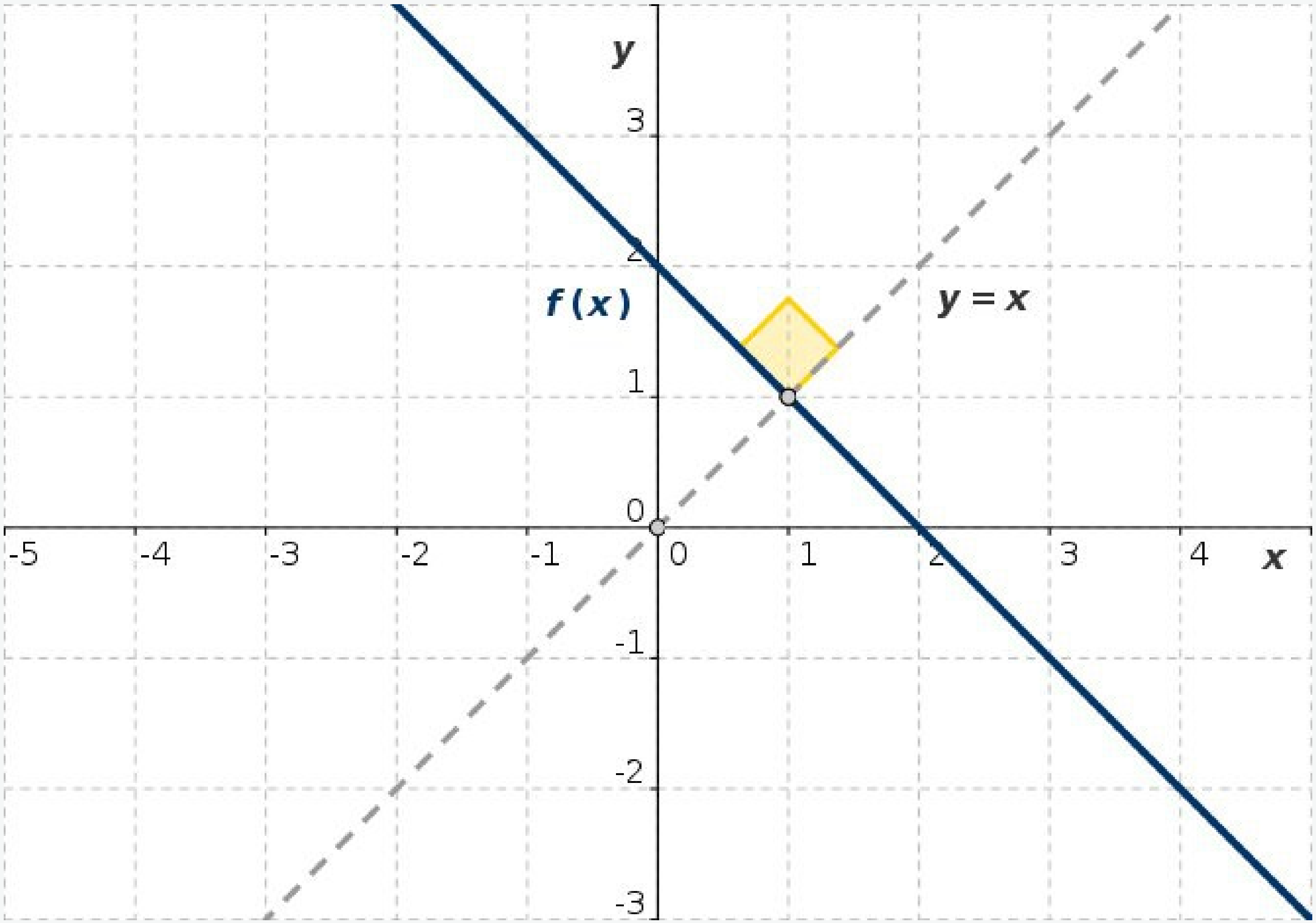

Abb. L3: Funktion und Umkehrfunktion sind identisch

$$f \; : \quad y = 2 - x \, , \qquad f^{-1} \; : \quad x = 2 - y = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1} \; : \quad y = 2 - x = f^{-1}(x)$$

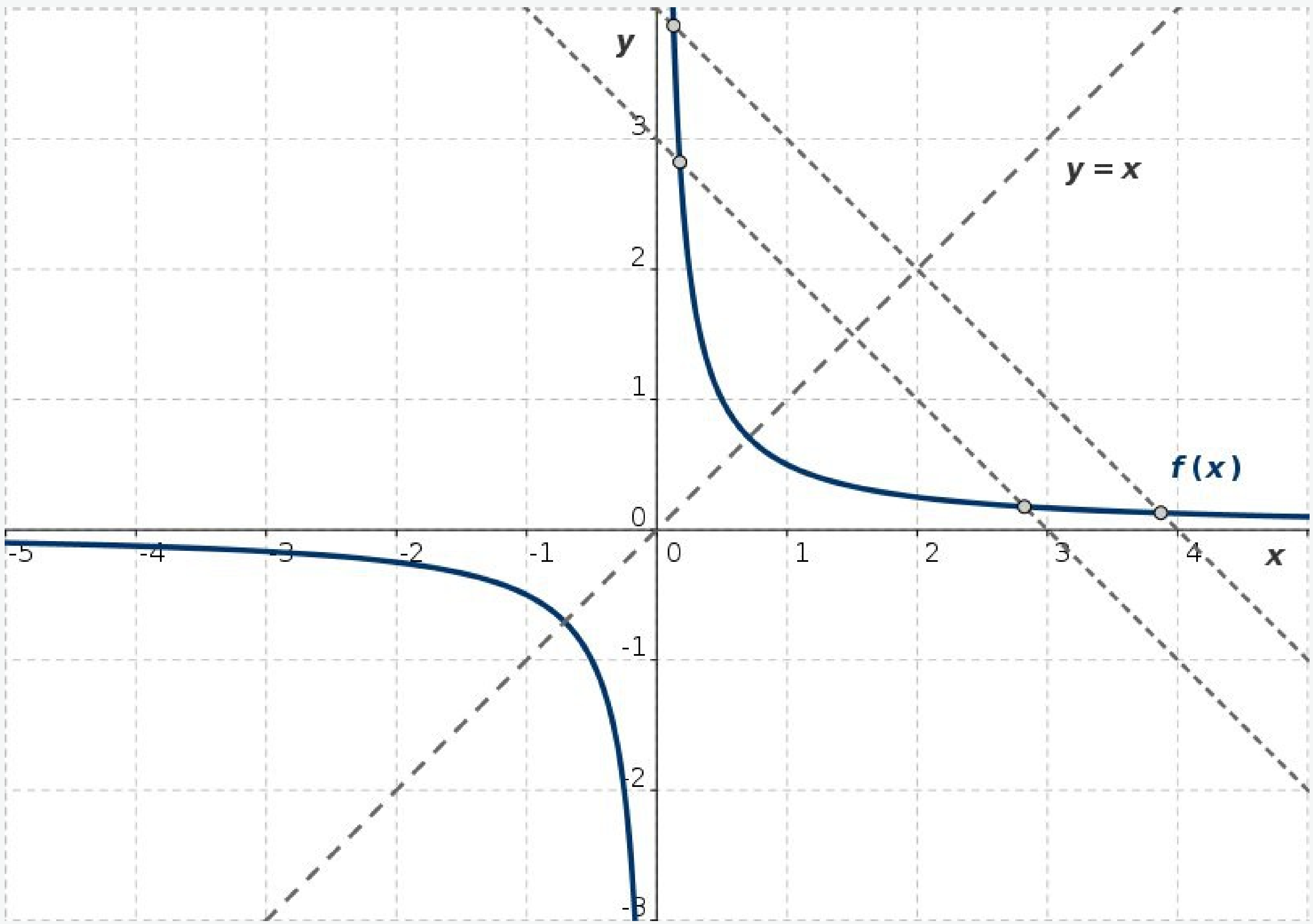

Abb. L4: Funktion und Umkehrfunktion sind gleich

$$f \ : \ y = \frac{1}{2\,x}\,, \qquad f^{-1} \ : \ \ x = \frac{1}{2\,y} \quad (x \to y\,, \quad y \to x) \quad f^{-1} \ : \ y = \frac{1}{2\,x}$$

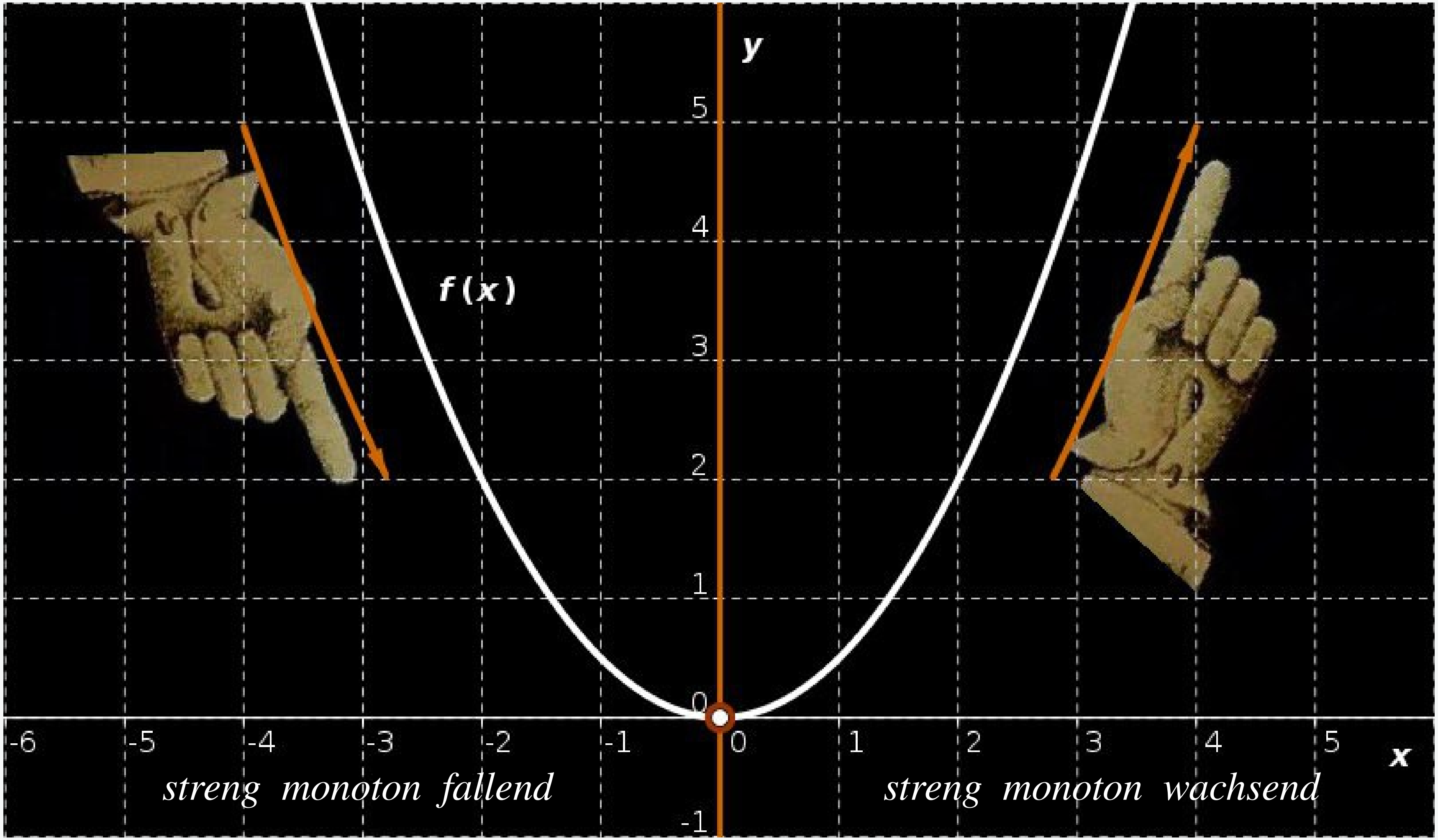

Abb. L5a: Die Funktion $y = x^2/2$ und ihr Monotonieverhalten

Die Funktion $y = x^2/2$ ist nicht umkehrbar im ganzen Definitionsbereich, aber umkehrbar in Bereichen mit einem bestimmten Monotonieverhalten, d.h. für negative und positive x. Im Folgenden werden wir die Funktion in beiden Bereichen betrachten.

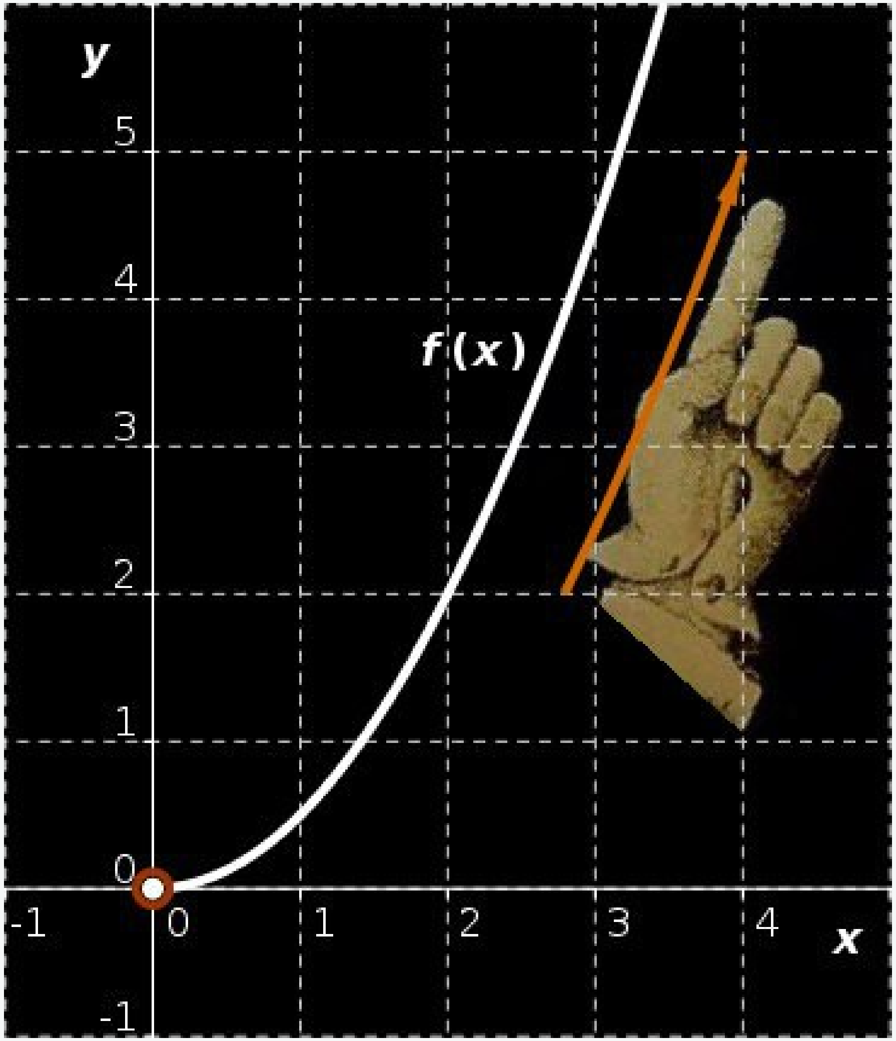

Abb. L5b: Die Funktion $y = x^2/2$ im Bereich positiver x

Wir bestimmen zuerst die Umkehrfunktion der Funktion $y = x^2/2$ im Bereich positiver x. Die Funktion ist in diesem Bereich streng monoton wachsend.

Streng monoton wachsende Funktion (Abb. L.5b)

$$f_1 : \quad y = \frac{x^2}{2}, \qquad D(f_1) = [0, \infty)$$

$$f_1^{-1} : \quad x = \sqrt{2y}, \qquad x \to y, \quad y \to x : \quad y = \sqrt{2x}$$

$$D(f_1^{-1}) = [0, \infty), \qquad W(f_1^{-1}) = [0, \infty)$$

Die Funktion und die Umkehrfunktion sind in Abb. L5c dargestellt.

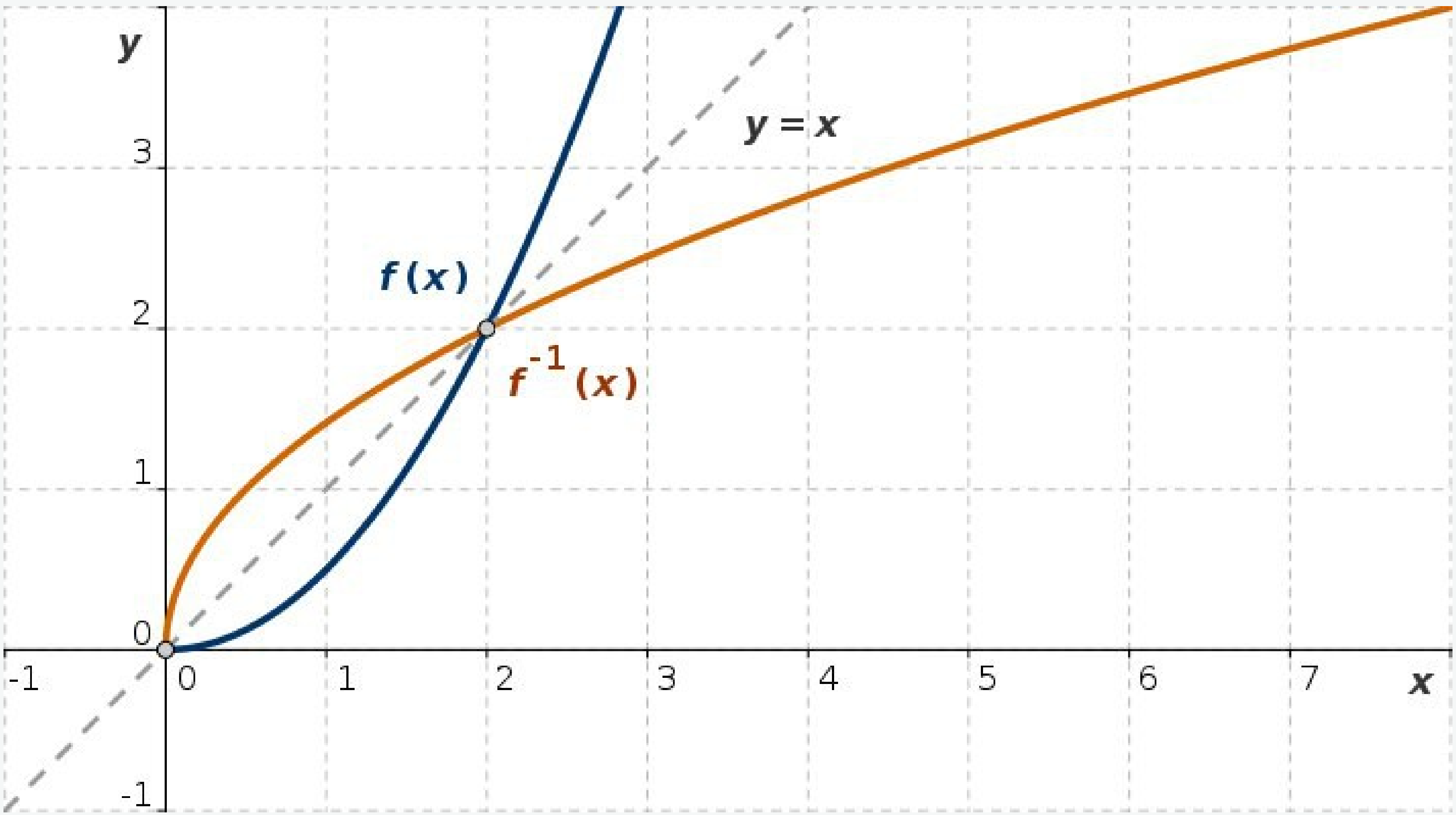

Abb. L5c: Die Funktion $y = f(x)$ im Bereich positiver x und ihre Umkehrfunktion

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{2x}$$

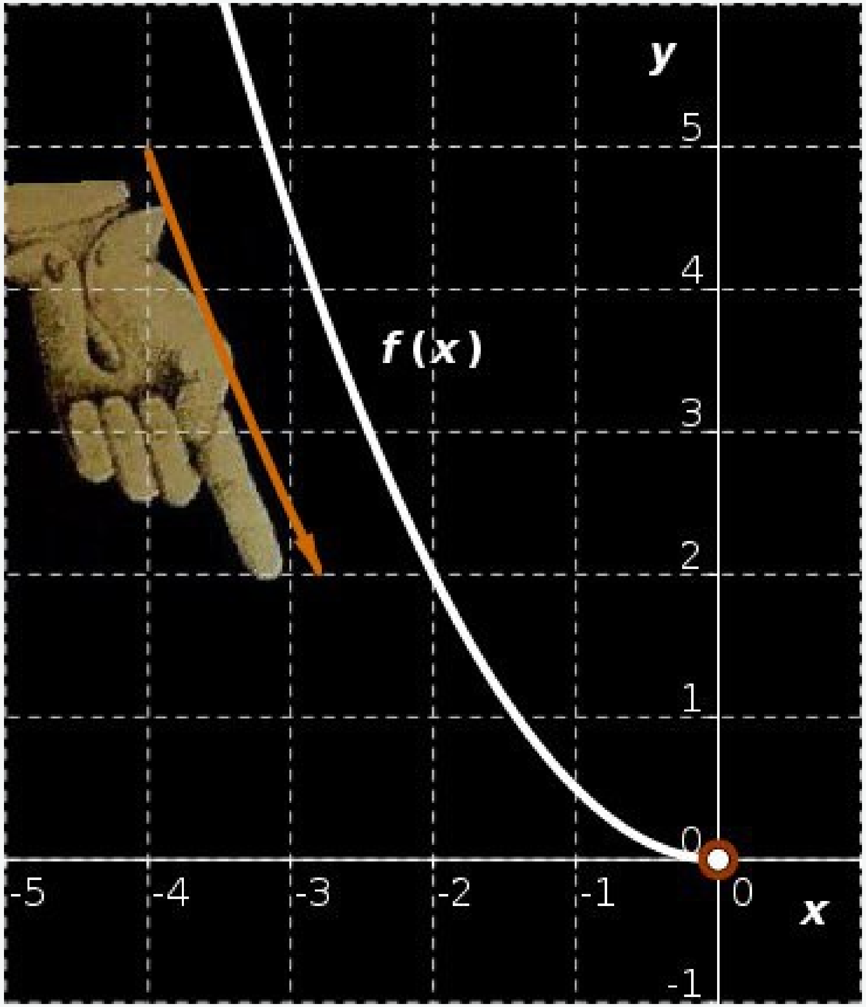

Abb. L5d: Die Funktion $y = x^2/2$ im Bereich negativer x

Wir bestimmen jetzt die Umkehrfunktion der Funktion $y = x^2/2$ im Bereich negativer x. Die Funktion ist in diesem Bereich streng monoton fallend.

Streng monoton fallende Funktion (Abb. L.5d)

$$f_2: \quad y = \frac{x^2}{2}, \qquad D(f_2) = (-\infty, 0)$$

$$f_2^{-1}: \quad x = -\sqrt{2y}, \qquad x \to y, \quad y \to x: \qquad y = -\sqrt{2x}$$

$$D(f_2^{-1}) = (0, \infty), \qquad W(f_2^{-1}) = (-\infty, 0)$$

Die Funktion und die Umkehrfunktion sind in Abb. L5e dargestellt.

Die Umkehrfunktion für positive und negative x sind in Abb. L5f dargestellt.

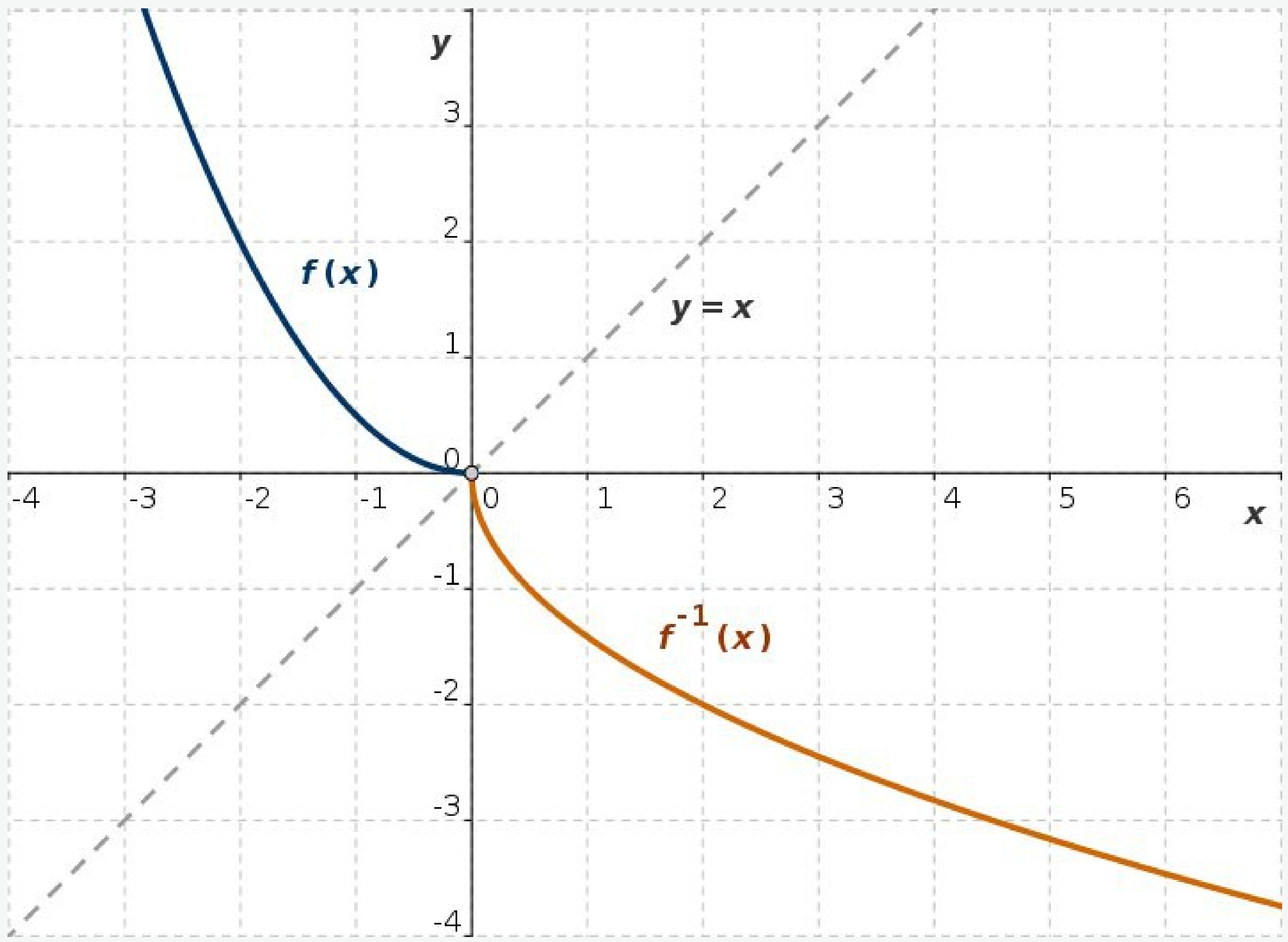

Abb. L5e: Die Funktion $y = f(x)$ im Bereich negativer x und ihre Umkehrfunktion

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, \qquad f^{-1}(x) = -\sqrt{2x}$$

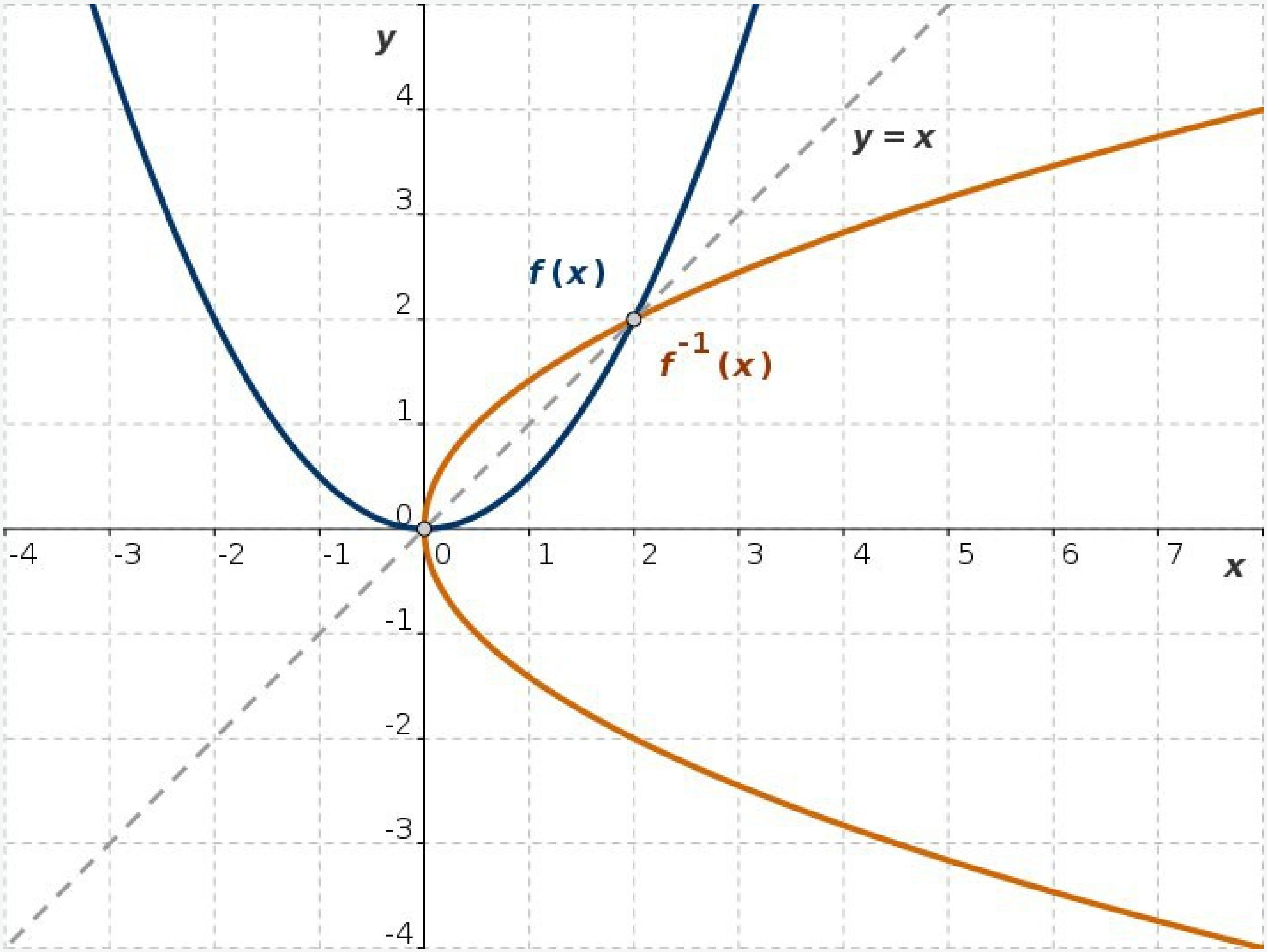

Abb. L5f: Die Funktion $y = f(x)$ und ihre Umkehrfunktion

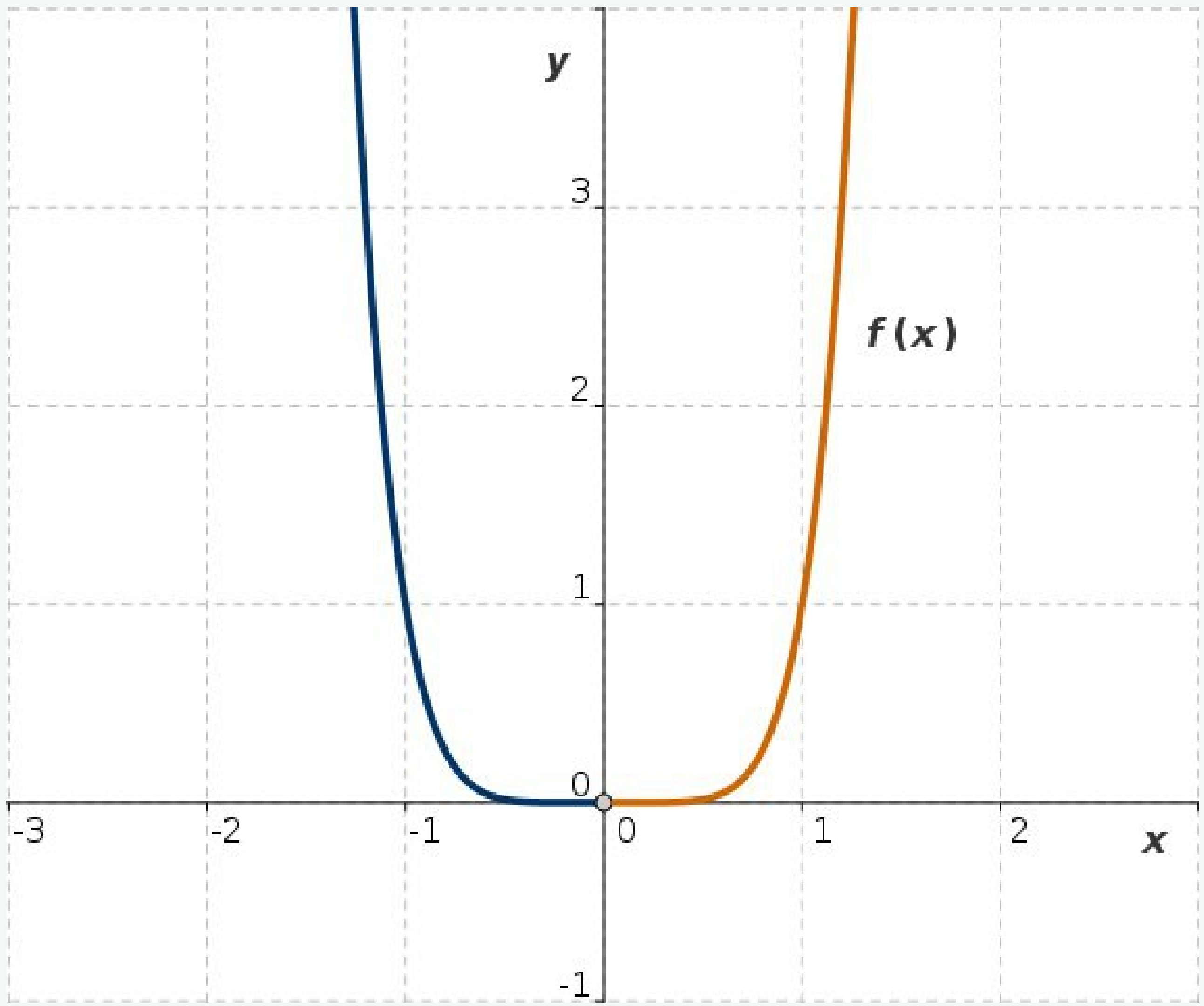

Abb. L6a: Die Funktion $y = f(x)$ ist streng monoton fallend im Bereich negativer x und streng monoton wachsend im Bereich positiver x

$$f(x) = x^6$$

$$f(x) = x^6$$

$$f_1: \quad y = x^6, \qquad D(f_1) = [0, \infty)$$

$$f_2: \quad y = x^6, \qquad D(f_2) = (-\infty, 0)$$

$$f_1^{-1}: \quad x = \sqrt[6]{y}, \qquad f_2^{-1}: \quad x = -\sqrt[6]{y}$$

$$f_1^{-1}: \quad y = \sqrt[6]{x}, \qquad D(f_1^{-1}) = [0, \infty), \qquad W(f_1^{-1}) = [0, \infty)$$

$$f_2^{-1}: \quad y = -\sqrt[6]{x}, \qquad D(f_2^{-1}) = [0, \infty), \qquad W(f_2^{-1}) = (-\infty, 0)$$

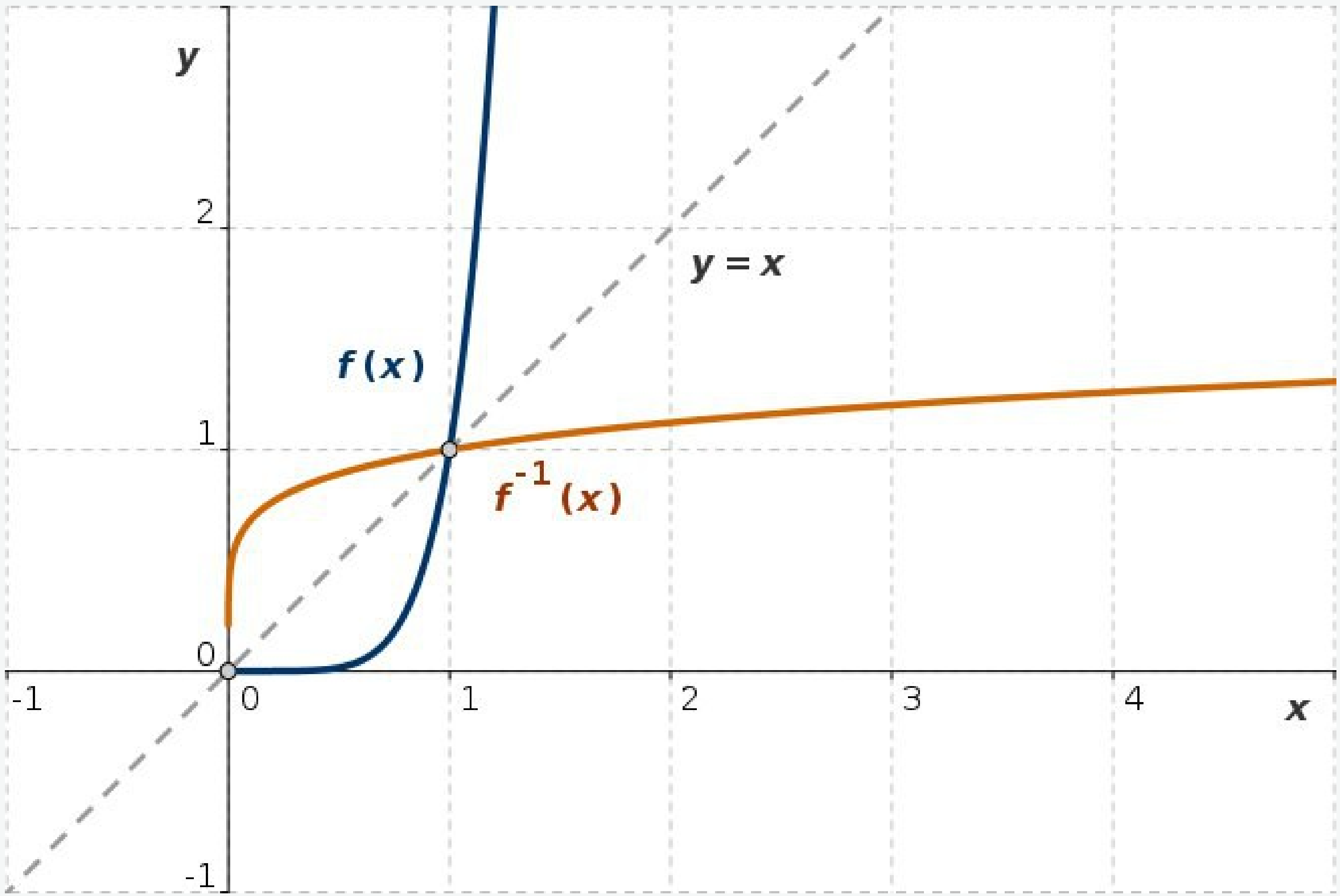

Abb. L6b: Die Funktion $y = f(x)$ im Bereich positiver x und ihre Umkehrfunktion

$$f(x) = x^6, \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}$$

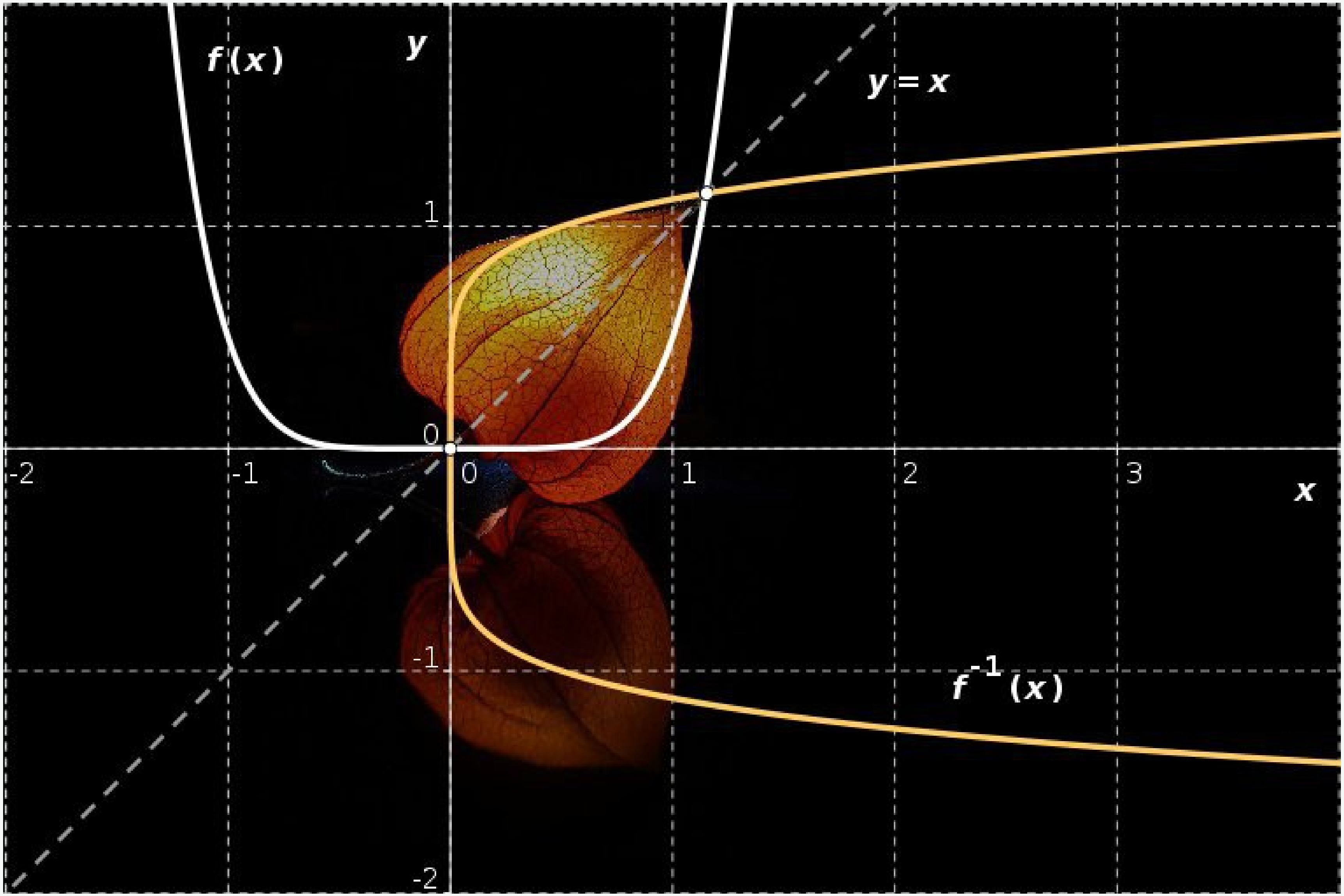

Abb. L6c: Die Funktion $y = f(x)$ und ihre Umkehrfunktion