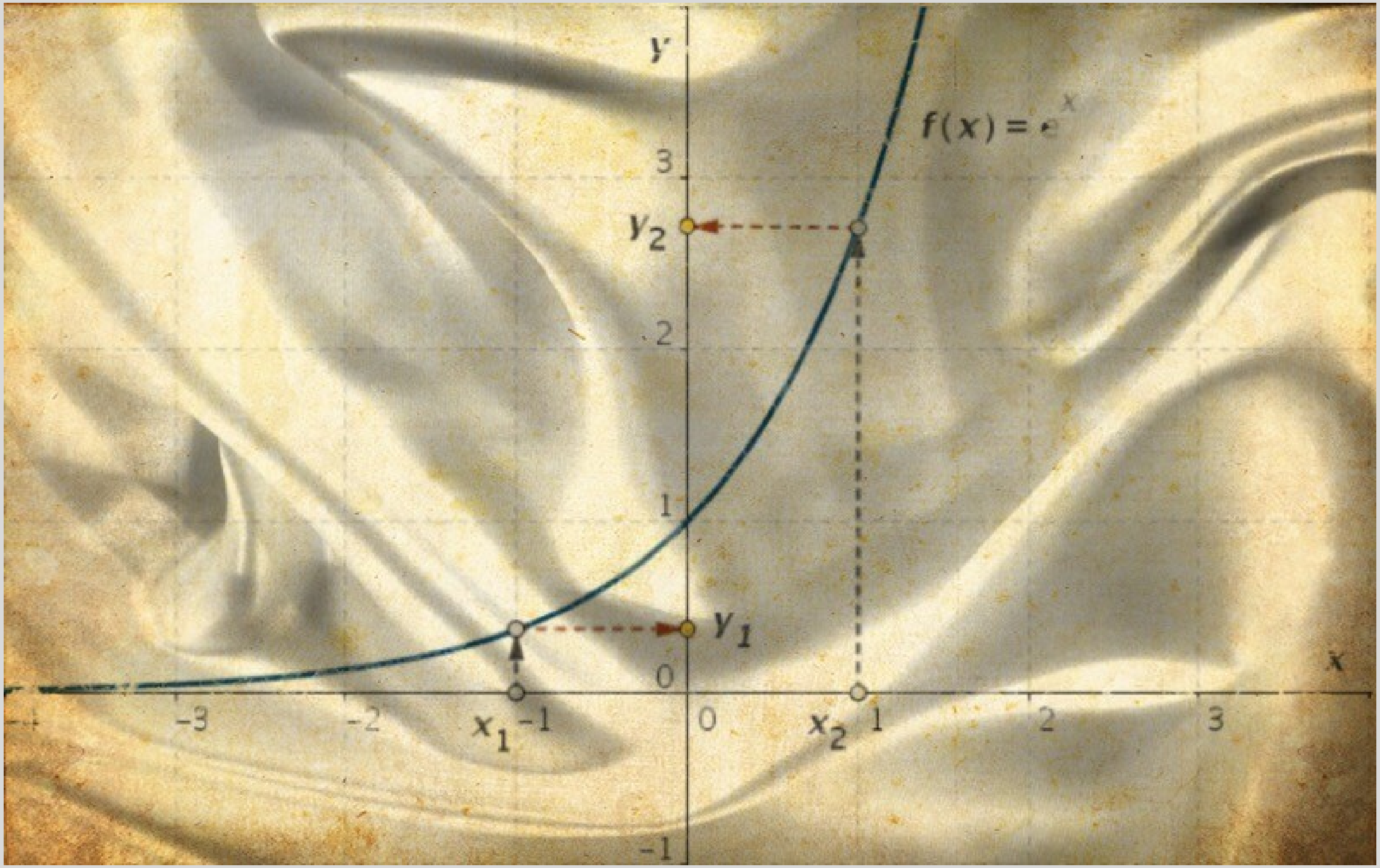

Umkehrfunktionen

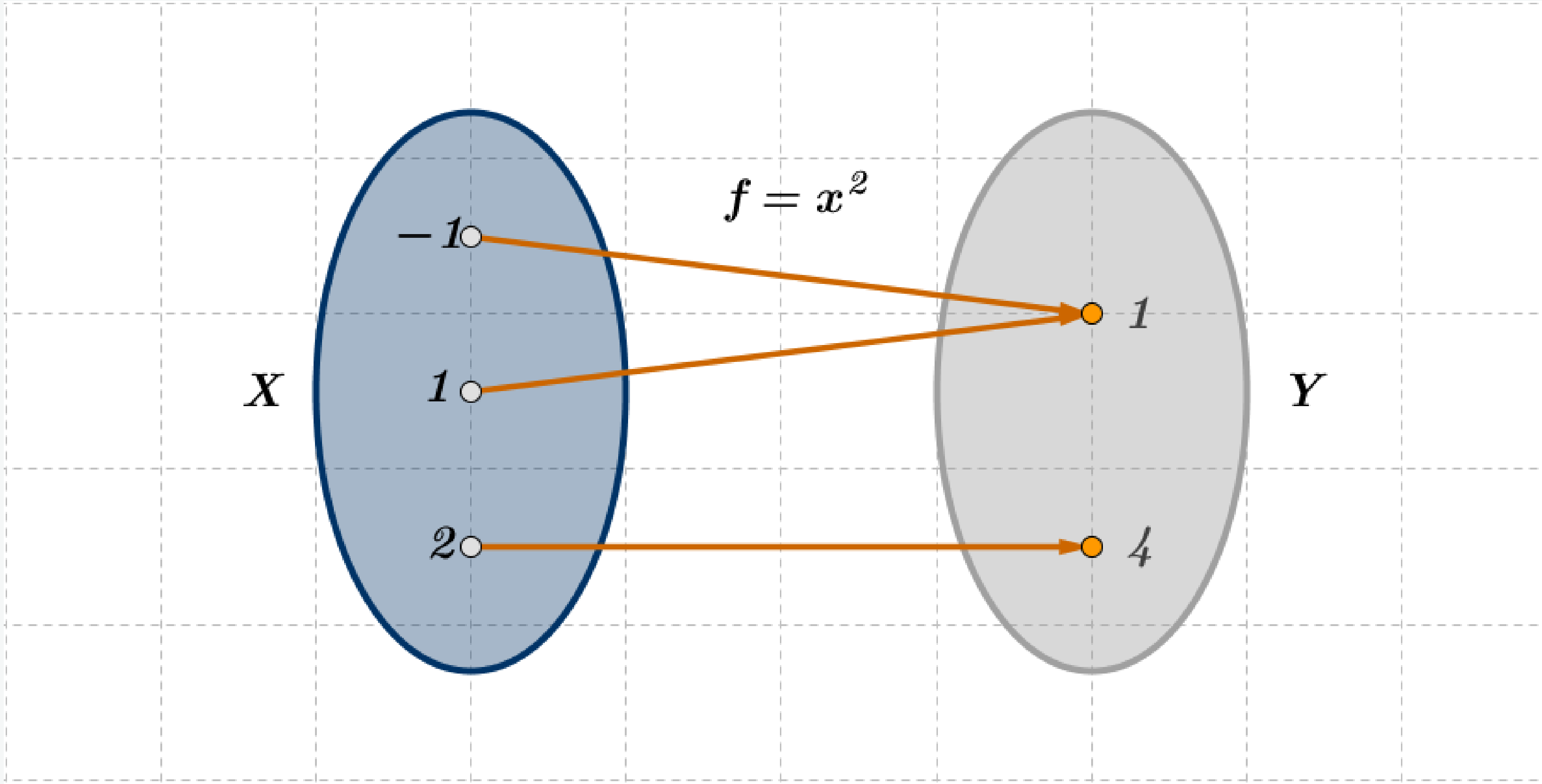

Abb. 1-1: Darstellung einer Abbildung

Eine Funktion $f(x)$ beschreibt eine Abbildung von X nach Y

$$X \overbrace{\rightarrow}^{f} Y\,, \qquad x \rightarrow f(x)$$

Der erste Ausdruck charakterisiert f als eine Abbildung von X nach Y, der zweite spezifiziert die Zuordnungsvorschrift, derzufolge x auf das Element $f(x)$ abgebildet wird $(X = D(f),\ Y = W(f))$.

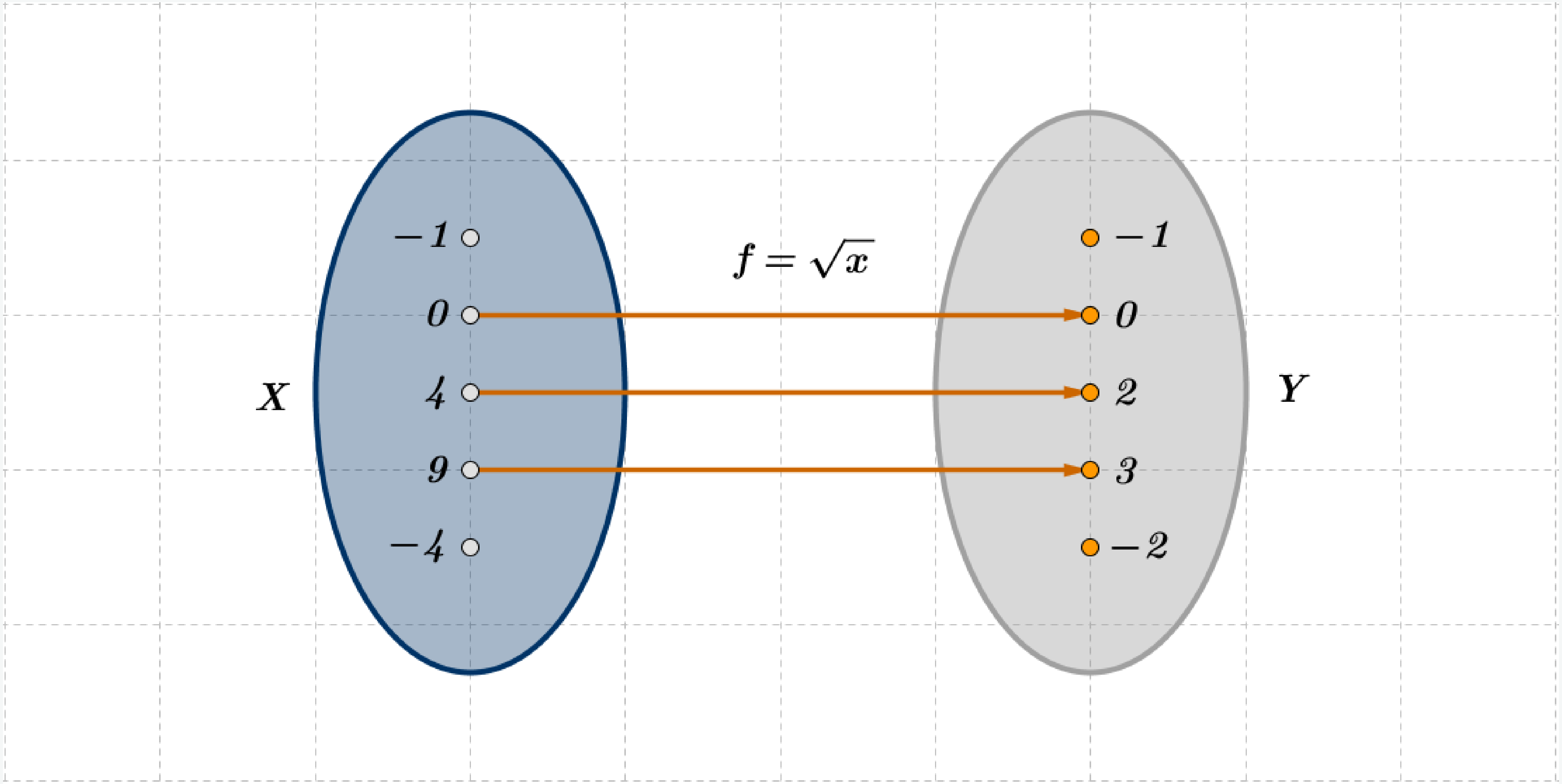

Abb. 1-2: Darstellung einer Abbildung

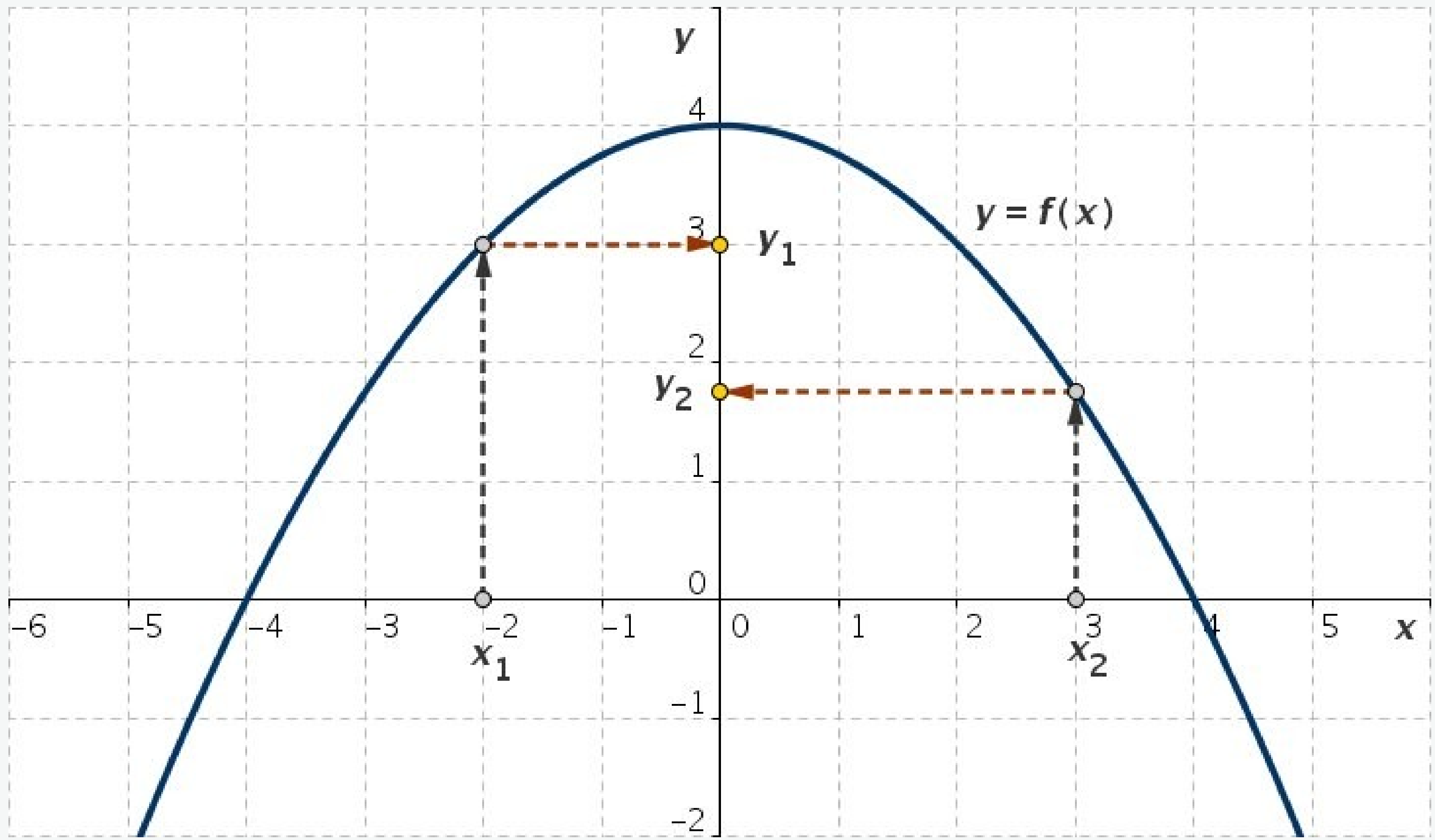

Abb. 1-3: Darstellung einer quadratischen Funktion y = - 0.25 x² + 4. Die Funktion ordnet jedem x eindeutig ein y zu

Jedem x aus X wird durch die Funktionsvorschrift nur ein Element $y = f(x)$ aus Y zugeordnet. Man nennt

y – das Bild von x bezüglich f, x – das Urbild von y bezüglich f

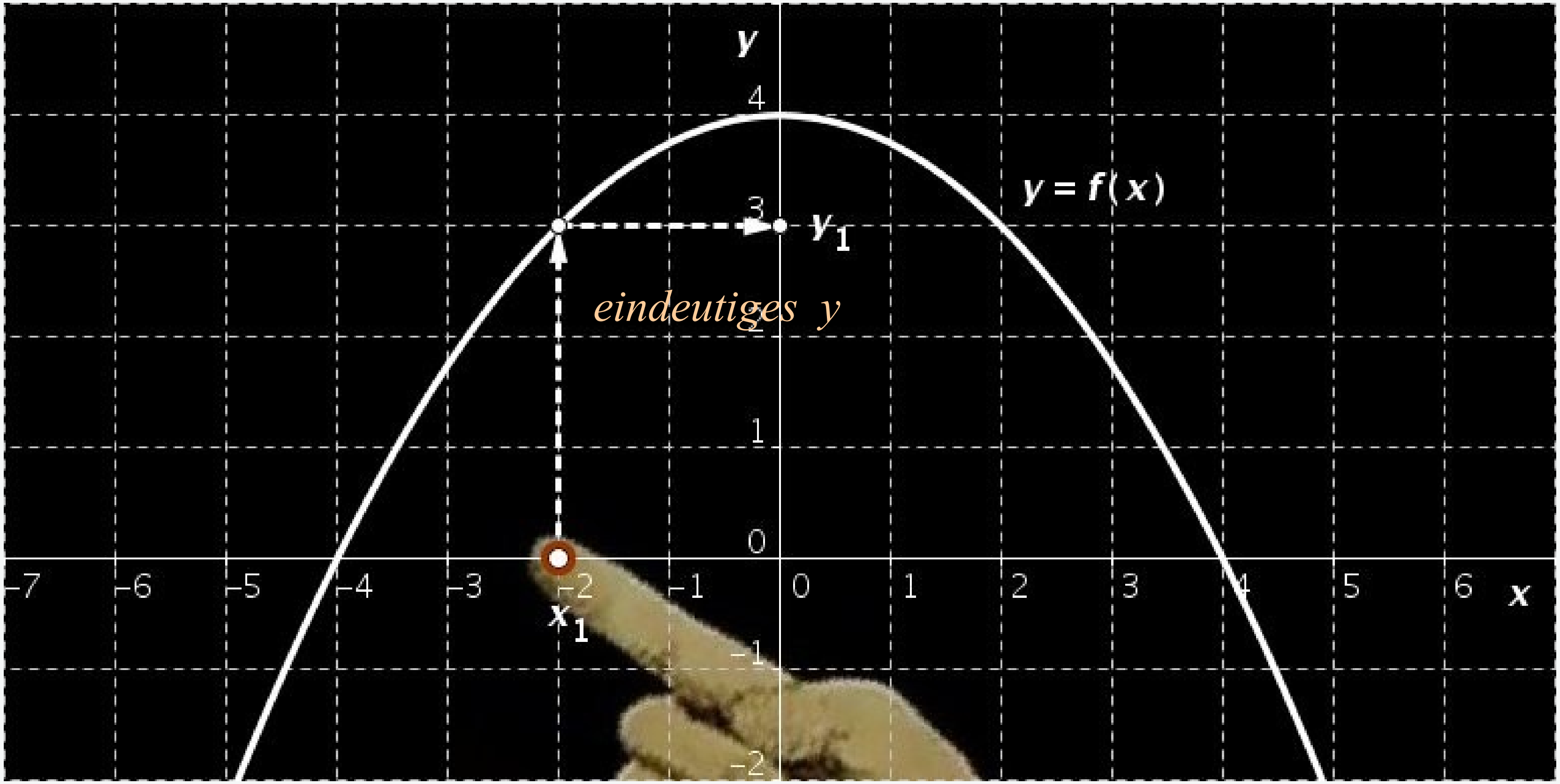

Abb. 1-4: Eine Funktion ordnet jedem x eindeutig ein $y = f(x)$ zu

Jede Funktion beantwortet die Frage: “Welches y gehört zu diesem x?”

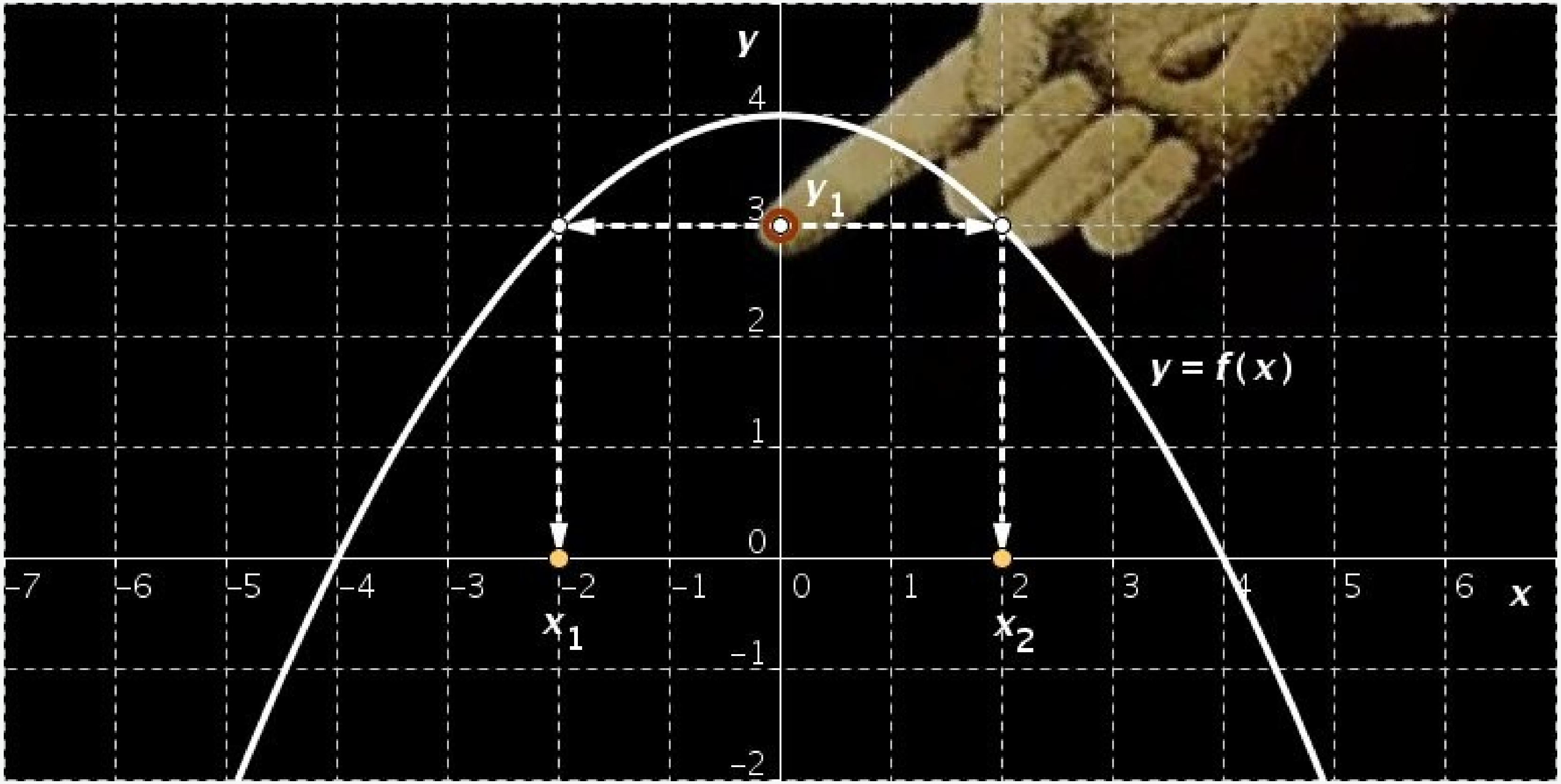

Abb. 1-5: Das gezeigte Bild kann nicht eindeutig sein Urbild bestimmen

Nicht jede Funktion beantwortet eindeutig die Frage: “Welches x gehört zu diesem y?” Eine quadratische Funktion kann diese Frage nicht beantworten. Für jedes Element x des Definitionsbereiches gilt

$$f(-x) = f(x), \qquad f = a\,x^2, \qquad a \in \mathbb{R}$$

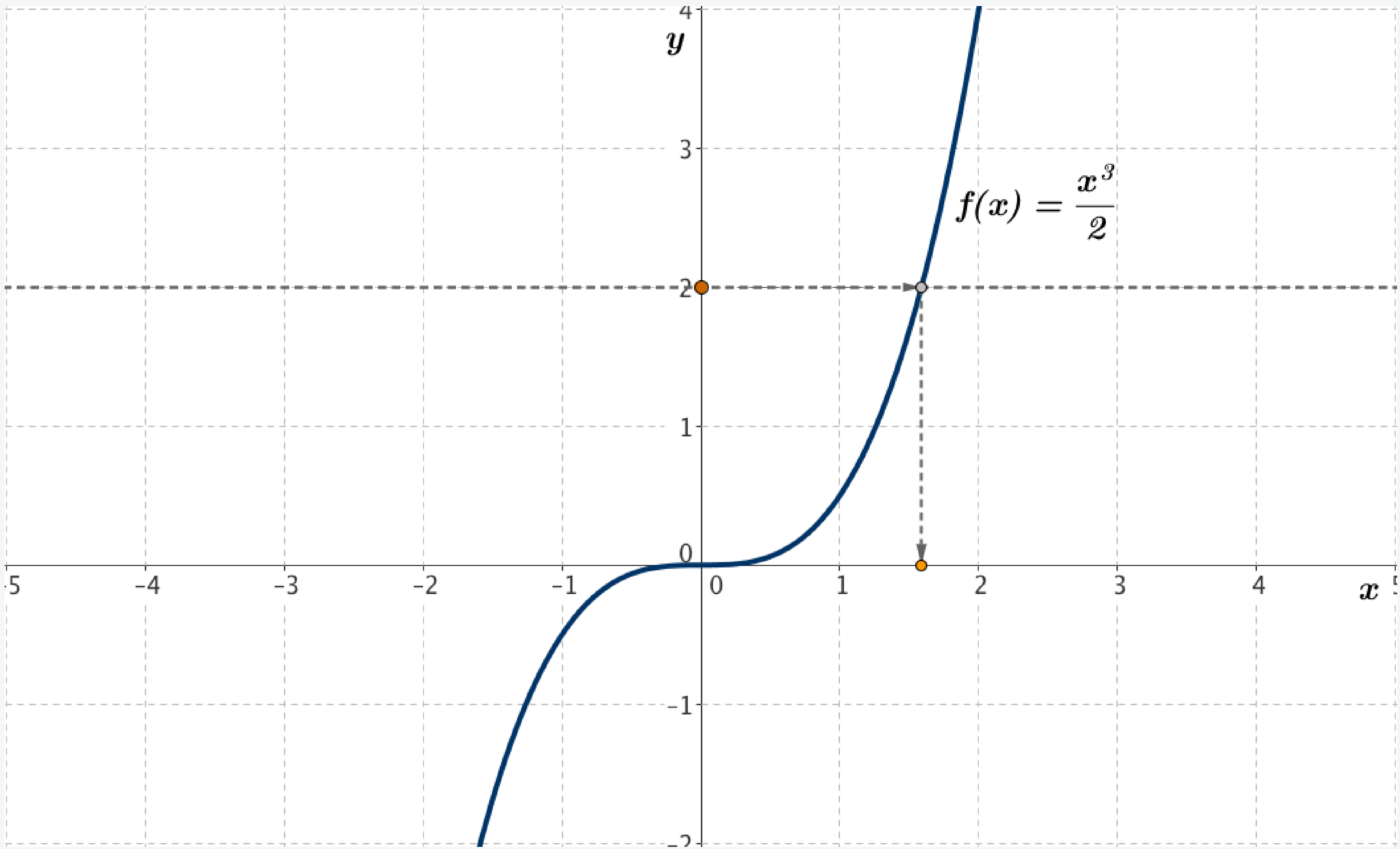

Abb. 1-6: Die Funktion y = f (x) beantwortet eindeutig die Frage: “Welches x gehört zu diesem y?

D e f i n i t i o n. *injektive Funktion*

Eine Funktion $f(x)$ heißt injektiv, wenn für alle Elemente x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich D_f gilt:

$$x_1, x_2 \in D_f, \qquad x_1 \neq x_2, \qquad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Geometrisch kann man immer sagen, ob ein Funktionsgraph einer injektiven Funktion entspricht oder nicht. Jede horizontale (parallel zur x-Achse) Gerade darf höchsten einen Schnittpunkt mit dem Graph einer injektiven Funktion haben.

D e f i n i t i o n. *Der Test der horizontalen Geraden*

Wenn es keine horizontale Gerade gibt, die eine Funktionskurve in mehr als einem Punkt schneidet, dann ist diese Funktion injektiv.

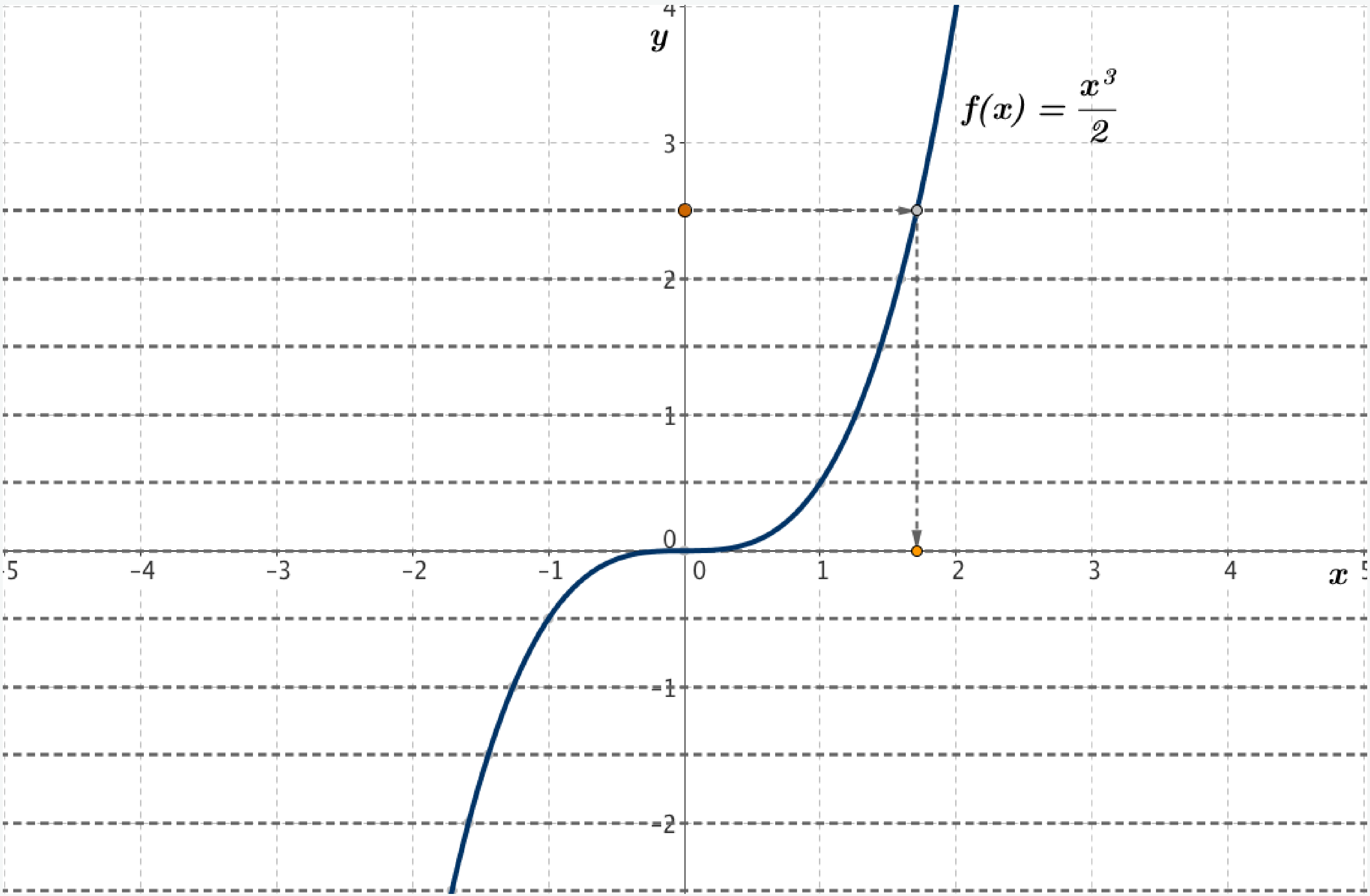

Abb. 1-7: Graph einer injektiven Funktion $y = f(x)$

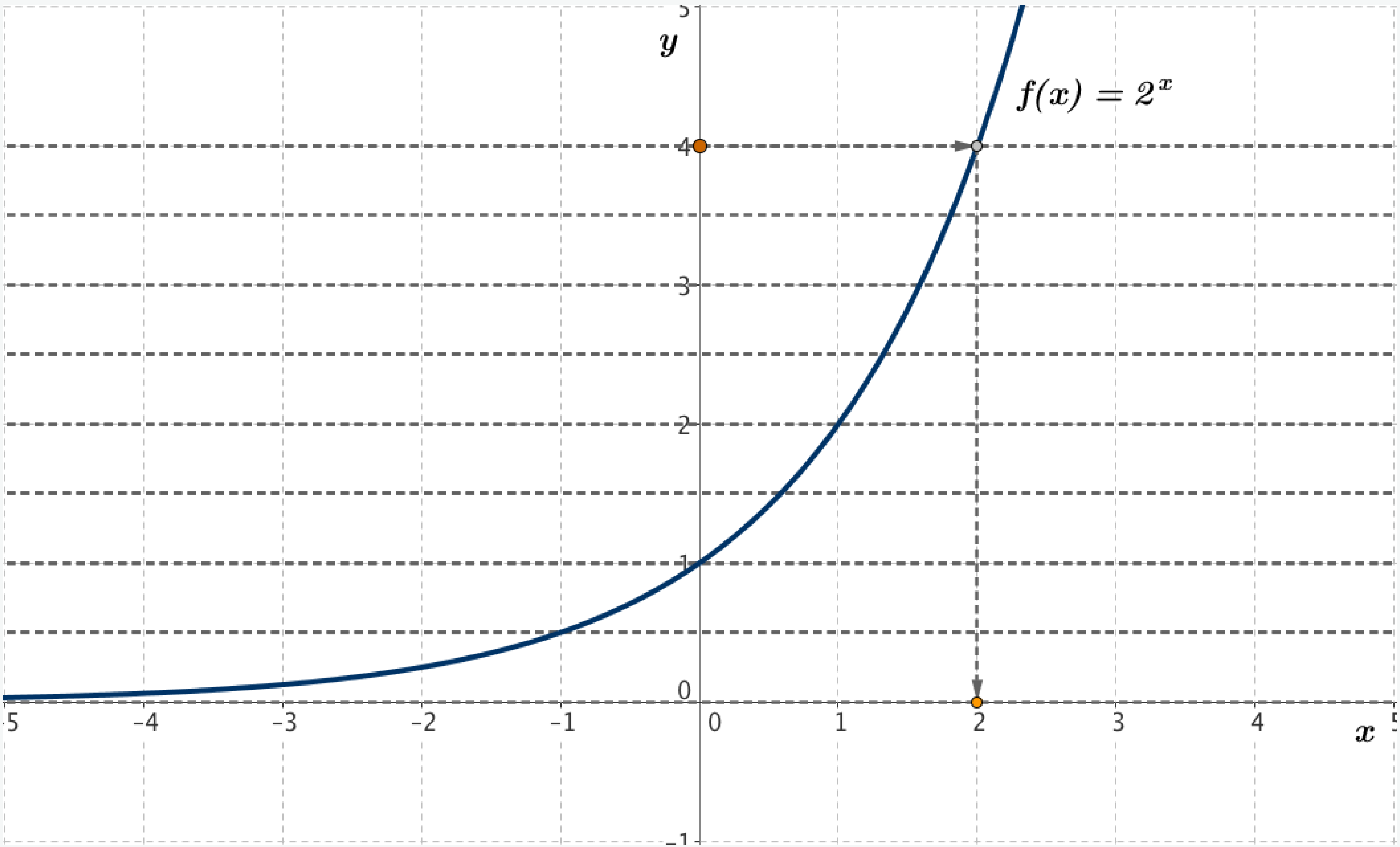

Abb. 1-8: Graph einer injektiven Funktion $y = f(x)$

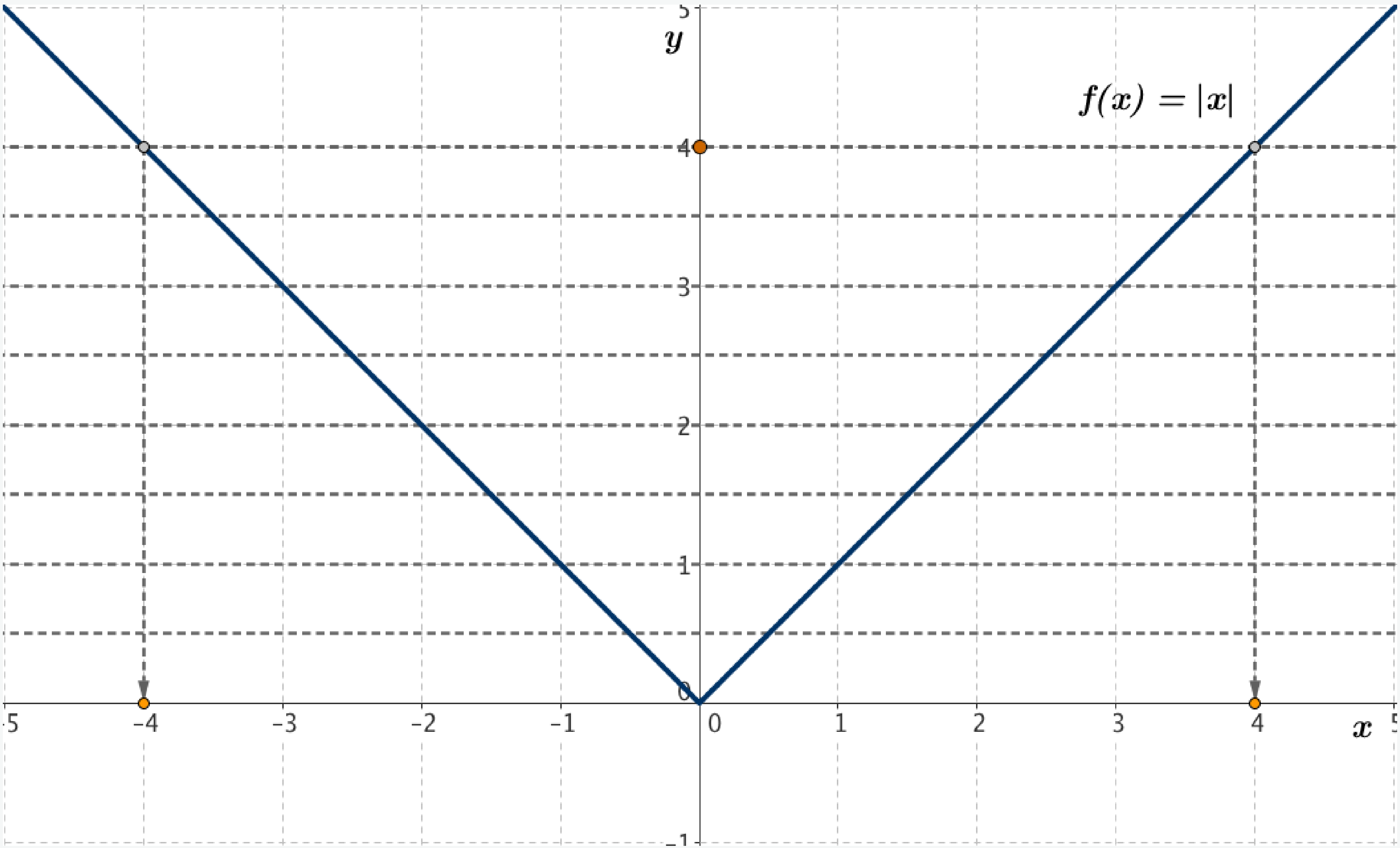

Abb. 1-9: Graph einer nicht injektiven Funktion y = f (x)

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie anhand folgender Abbildungen, ob die dargestellten Funktionen injektiv sind

Injektive Funktion: Aufgabe 1a

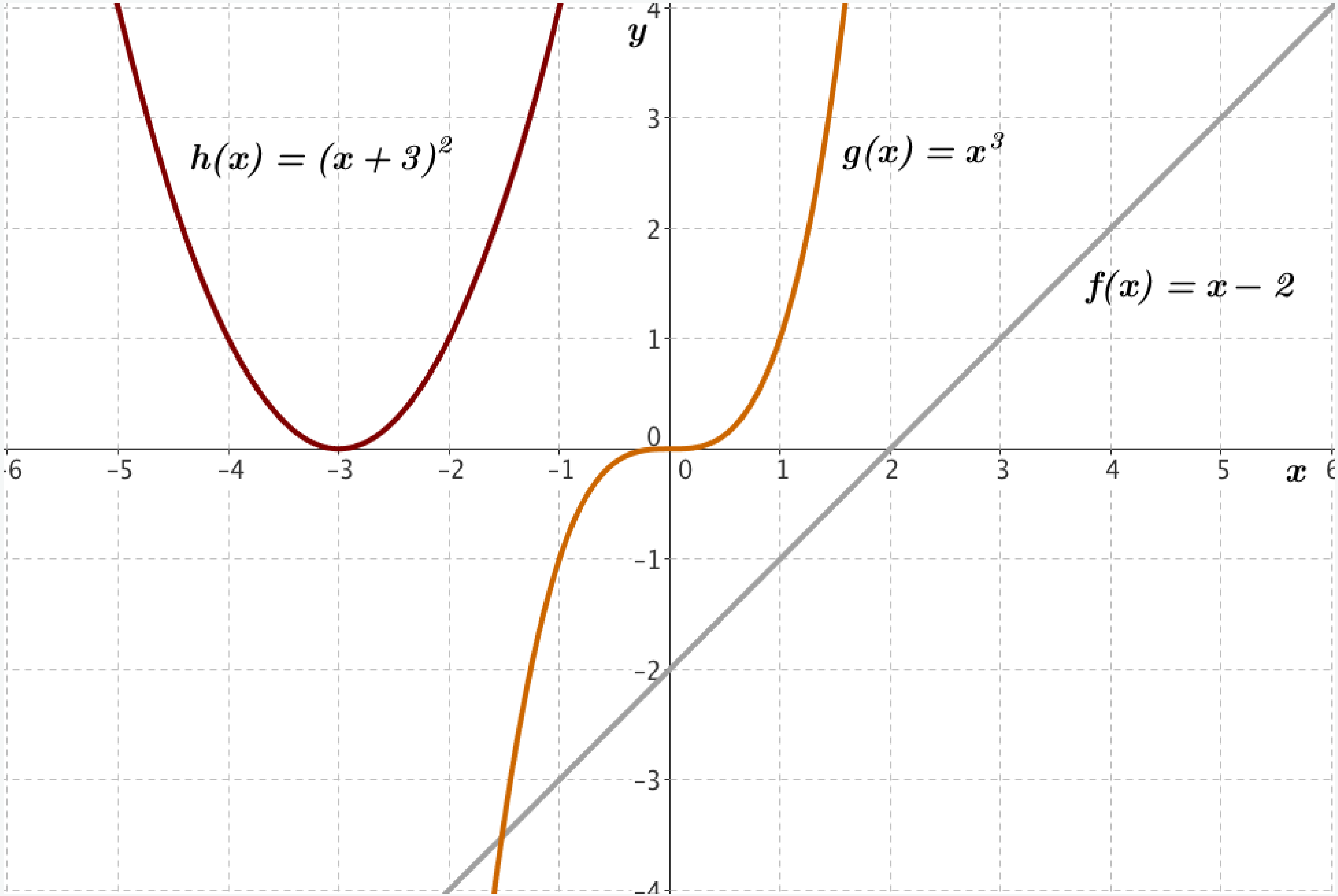

Abb. 2-1

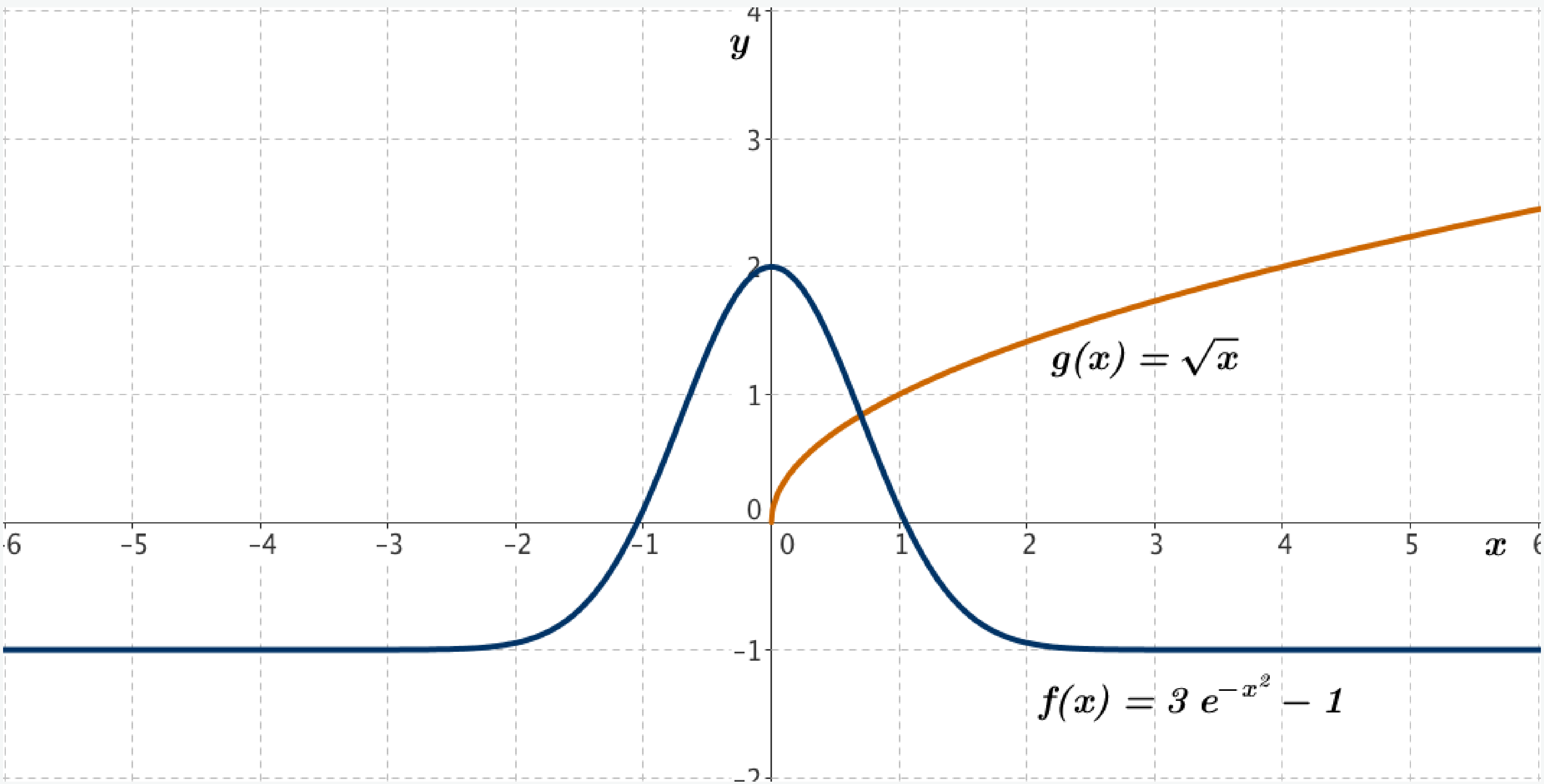

Abb. 2-2

Injektive Funktion: Lösung 1

Abbildung 2-1: $f(x)$ und $g(x)$ sind injektiv

Abbildung 2-2: $g(x)$ ist injektiv

Eine injektive Funktion $y = f(x)$ ist umkehrbar.

Definition:

Die Funktion $f\colon\ x \to y$ ordnet jedem x eindeutig ein y zu. Kann umgekehrt auch jedem y eindeutig ein x zugeordnet werden, so entsteht die Umkehrfunktion oder inverse Funktion von f:

$$f^{-1}:\quad y \to x$$

Die Funktion f entspricht in diesem Fall einer eineindeutgen Abbildung .

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie anhand folgender Abbildungen, ob die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ umkehrbar sind

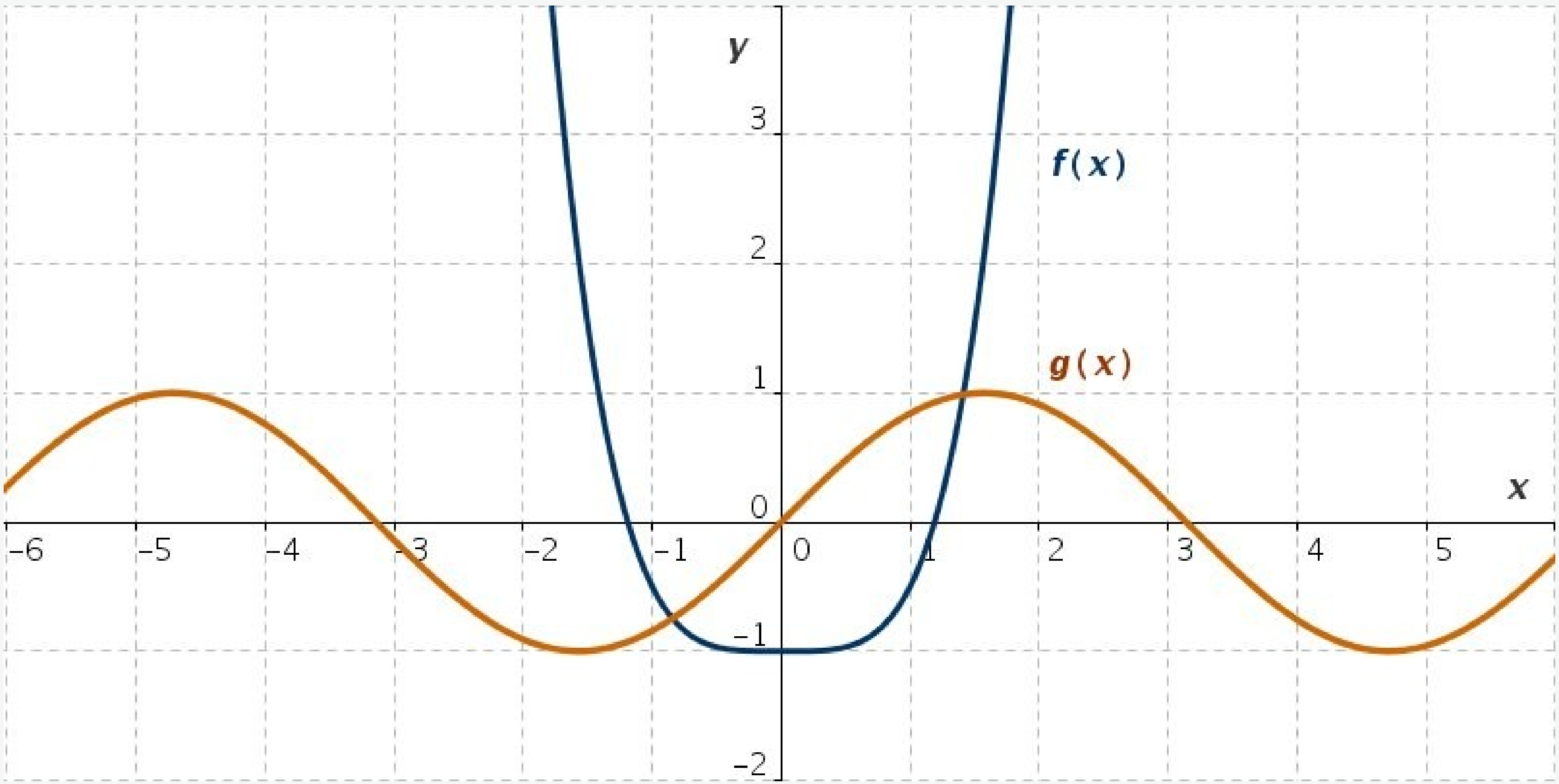

Abb. 3-1: Darstellung von Funktionen y = f (x) und y = g (x)

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 1, \qquad g(x) = \sin x$$

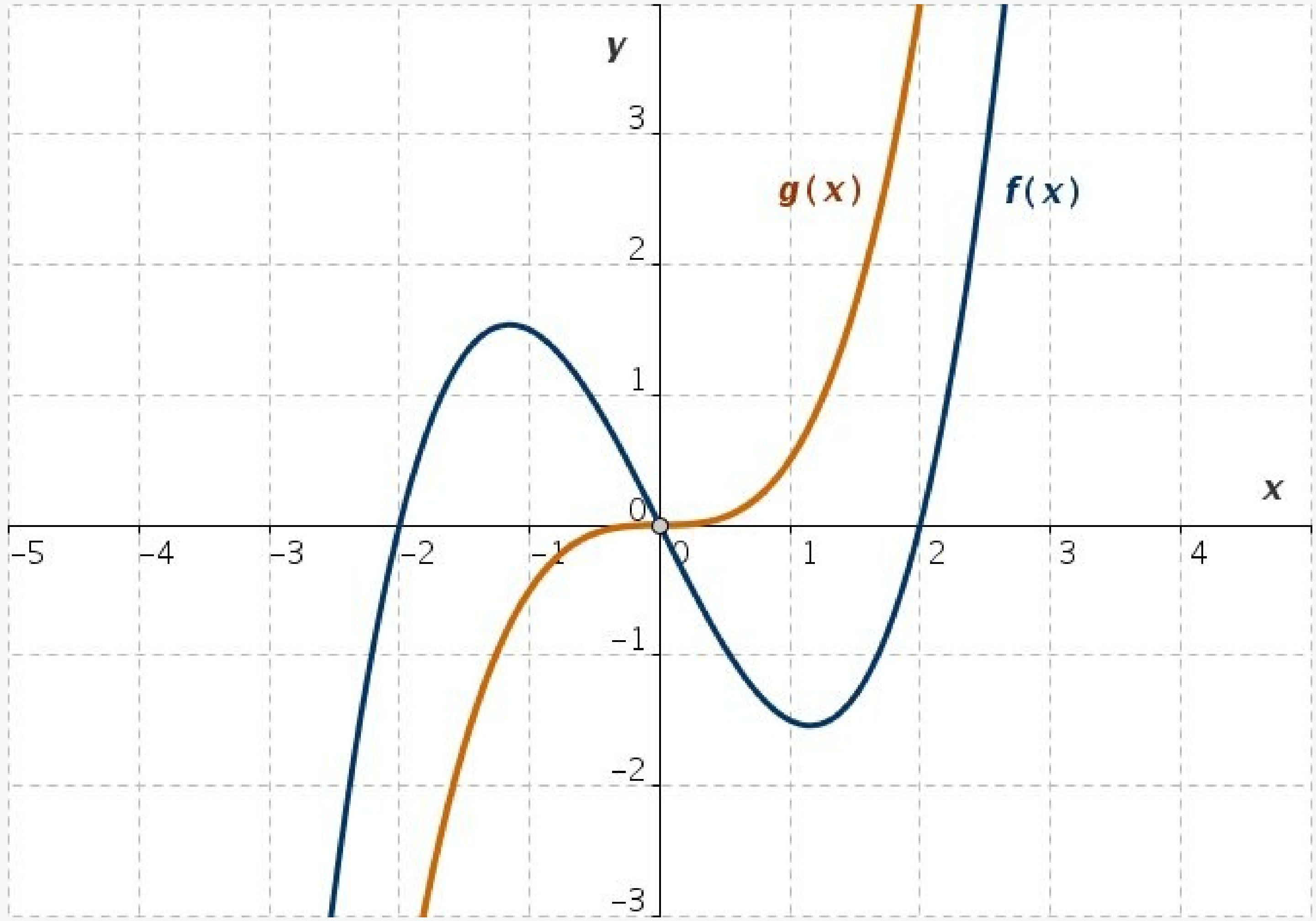

Abb. 3-2: Darstellung von Funktionen y = f (x) und y = g (x)

$$f\,(x) = \frac{x^3}{2} - 2\,x\,, \qquad g\,(x) = \frac{x^3}{2}$$

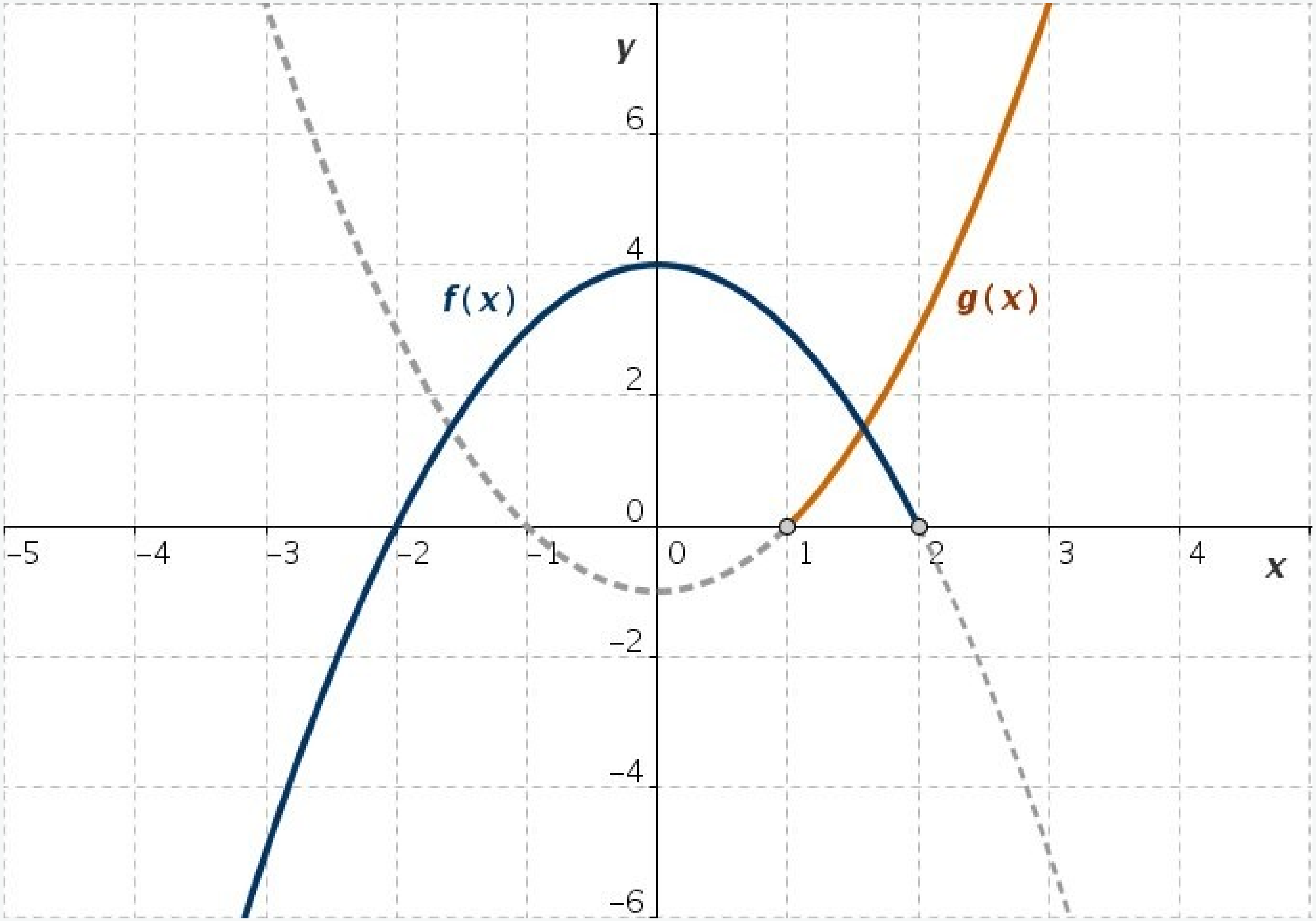

Abb. 3-3: Darstellung von Funktionen y = f (x) und y = g (x)

$$f(x) = -x^2 + 4, \qquad D(f) = (-\infty, \ 2\,]$$

$$g(x) = x^2 - 1, \qquad D(g) = [\,1, \ \infty)$$

Umkehrbare Funktionen sind:

$b)\quad g(x) = \dfrac{x^3}{2}$

$c)\quad g(x) = x^2 - 1, \qquad D(g) = [\,1,\ \infty)$

In der Aufgabe 1*c* haben wir festgestellt, dass eine im ganzen Definitionsbereich nicht umkehrbare Funktion in einem Teilintervall umkehrbar sein kann. Wir untersuchen noch einmal die Umkehrbarkeit der Funktion $y = 0.5x^2$ in verschiedenen Teilintervallen des Definitionsbereiches

$$1)\quad f = \frac{x^2}{2}, \qquad D_1 = (-\infty,\ 2\,], \qquad D_2 = (2,\ \infty)$$

$$2)\quad f = \frac{x^2}{2}, \qquad D_1 = (-\infty,\ -1\,], \qquad D_2 = (-1,\ \infty)$$

$$D(f) = D_1 + D_2$$

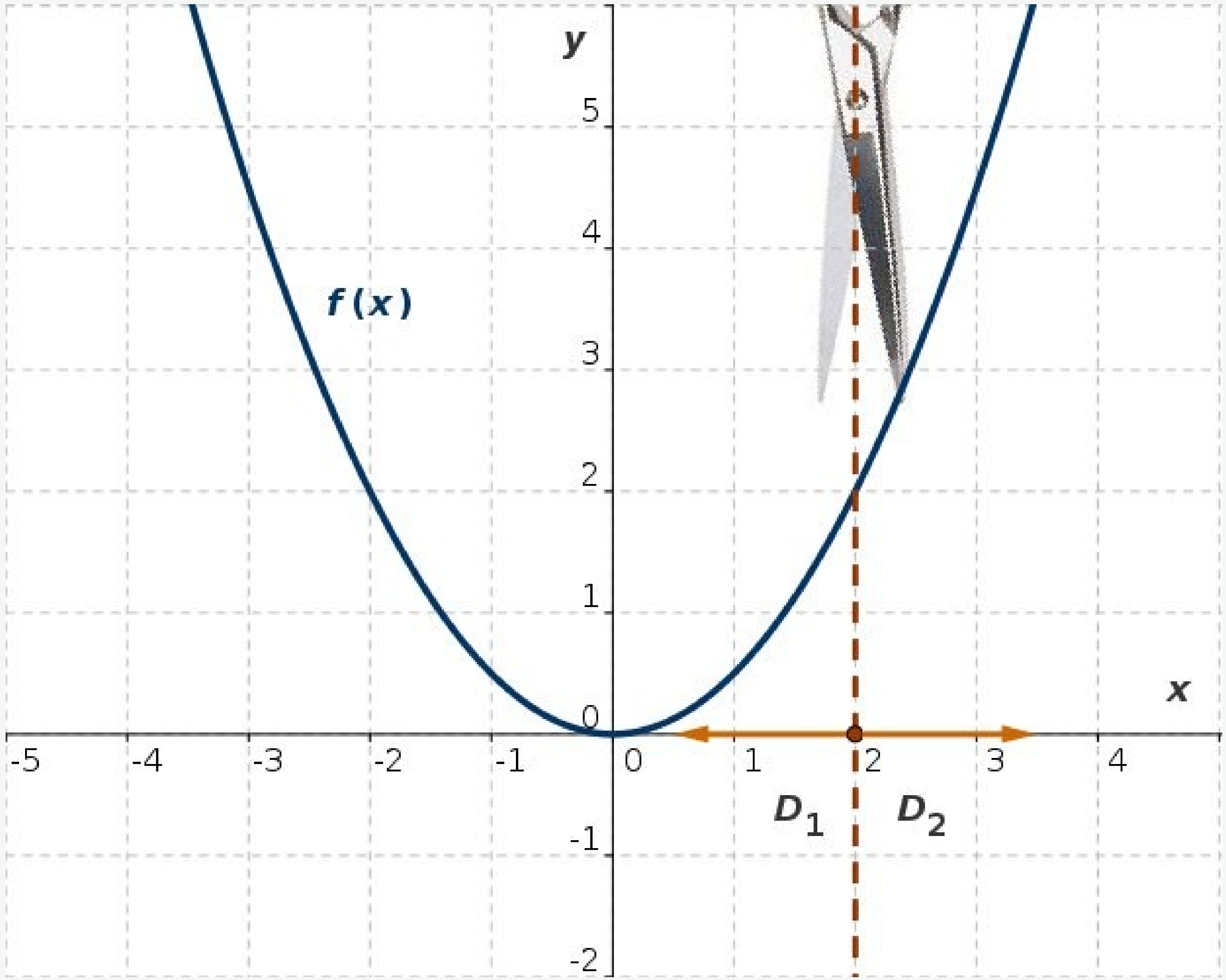

Abb. 4-1: Die Funktion $y = 0.5\,x^2$ wird in den Bereichen $(-\infty, 2]$ und $(2, \infty)$ untersucht

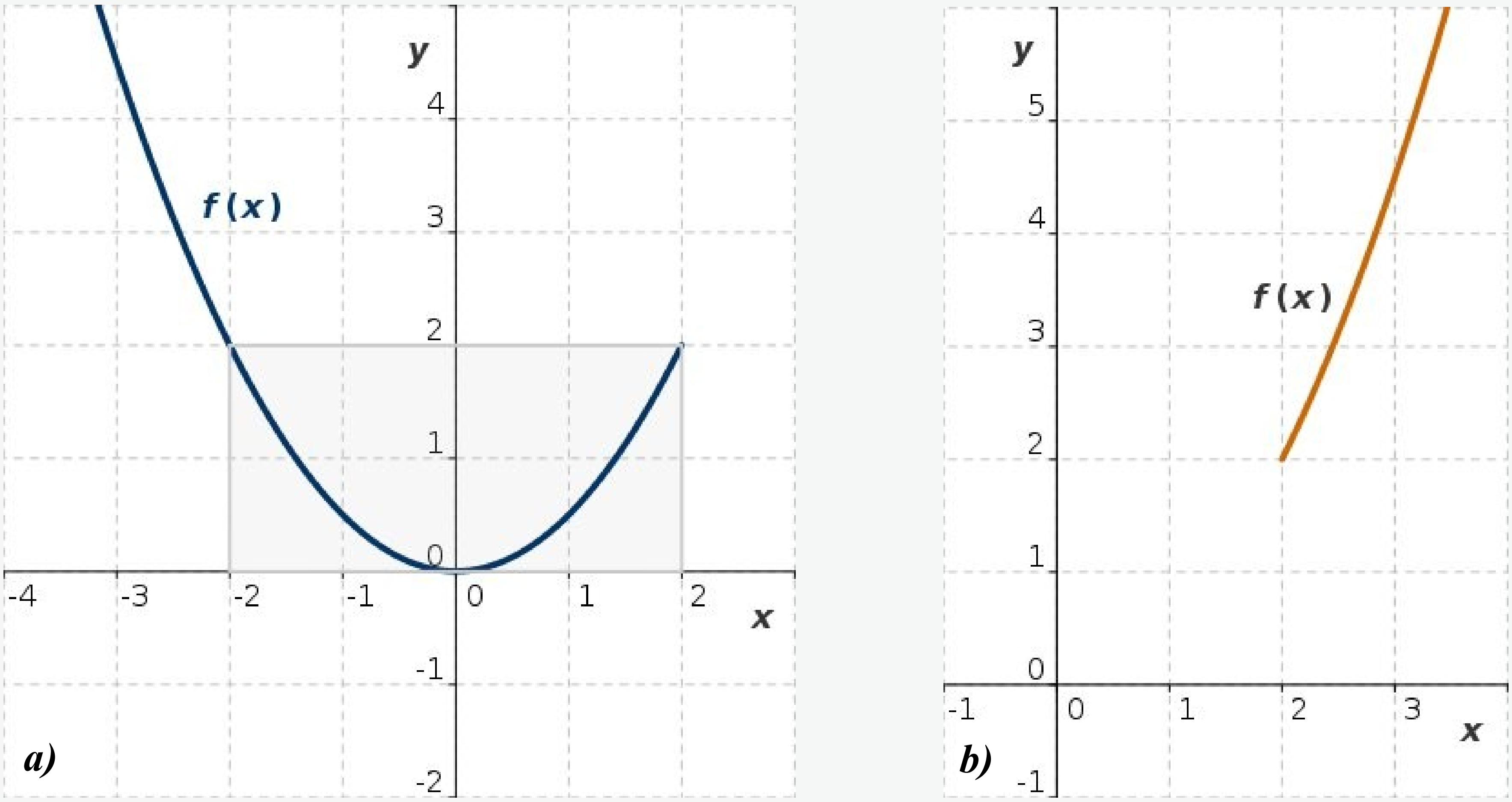

Abb. 4-2: Die Funktion $y = 0.5\, x^2$ in Bereichen a) $(-\infty, 2]$ und b) $(2, \infty)$

Die Funktion $y = 0.5\, x^2$ ist nicht umkehrbar im Bereich $(-\infty, 2]$ (*a*) (das erkennt man an der Symmetrie der Funktionskurve bezüglich *y*-Achse im Intervall $[-2, 2]$) und umkehrbar im Bereich $(2, \infty)$ (*b*).

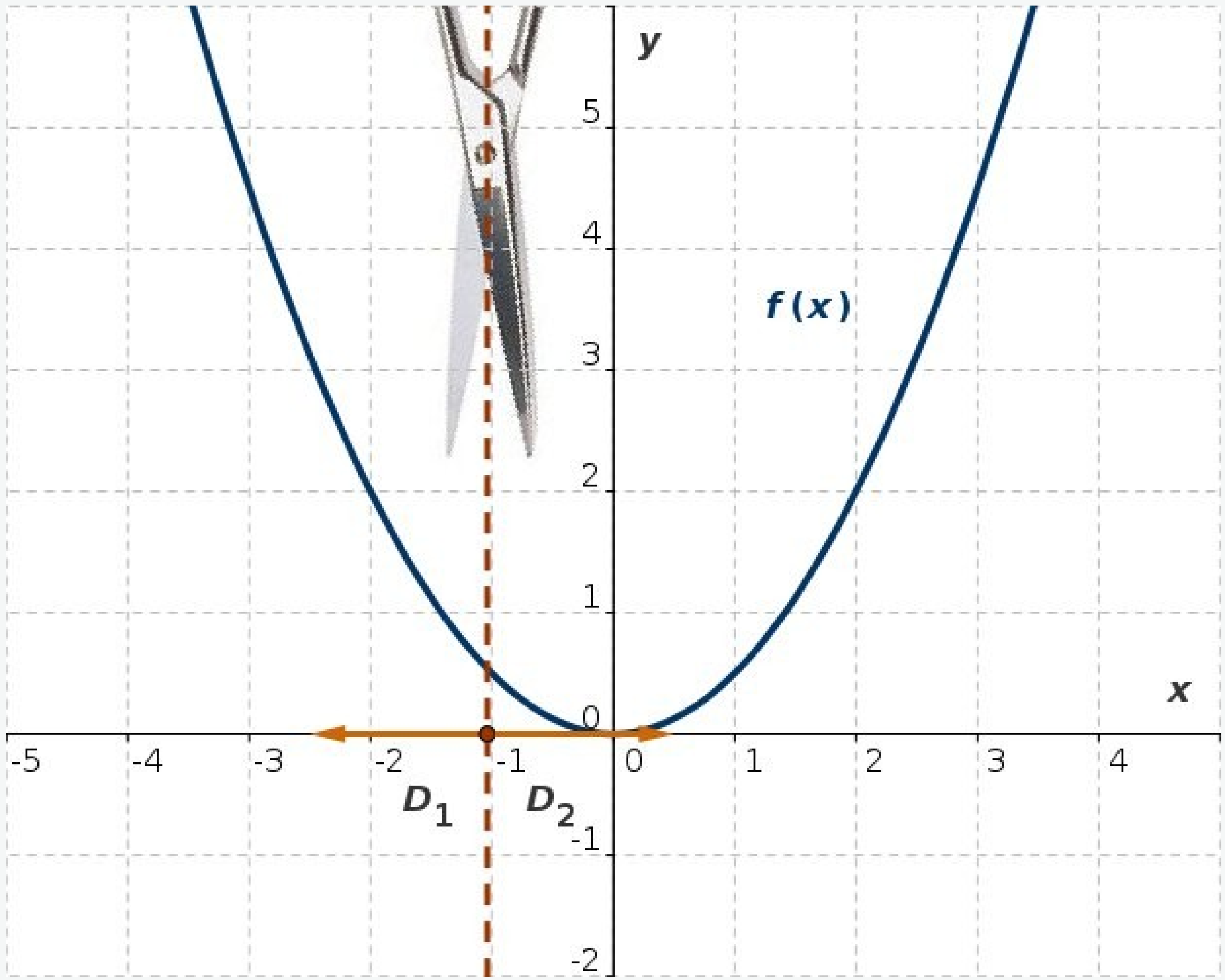

Abb. 4-3: Die Funktion $y = 0.5\,x^2$ wird in den Bereichen $(-\infty, -1]$ und $(-1, \infty)$ untersucht

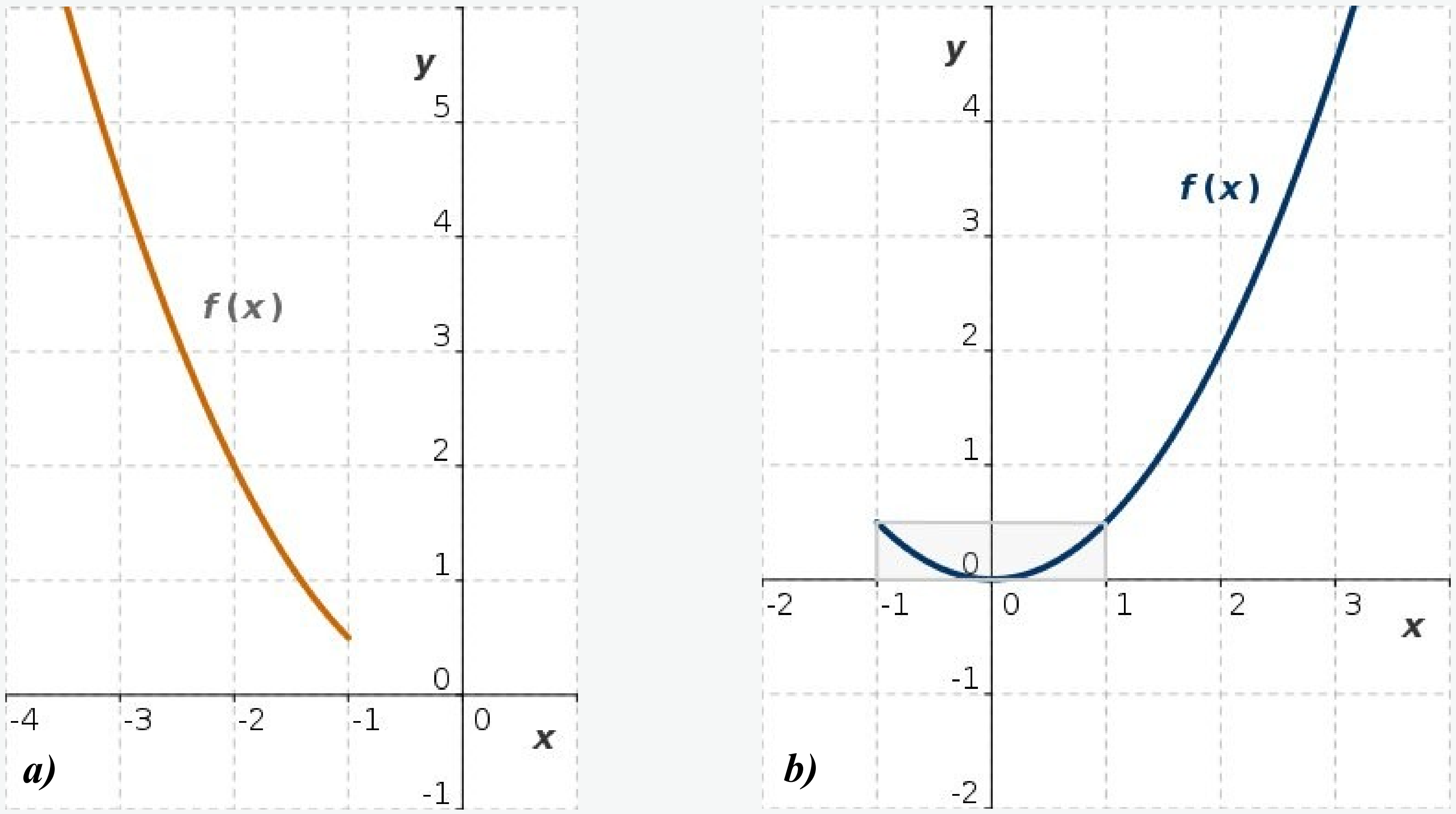

Abb. 4-4: Die Funktion $y = 0.5\, x^2$ in Bereichen a) $(-\infty, -1]$ und b) $(-1, \infty)$

Die Funktion $y = 0.5\, x^2$ ist umkehrbar im Bereich $(-\infty, -1]$ (a) und nicht umkehrbar im Bereich $(-1, \infty)$ (b) (das erkennt man an der Symmetrie der Funktionskurve bezüglich y-Achse im Intervall $[-1, 1]$)

- Eine im ganzen Definitionsbereich nicht umkehrbare Funktion kann durch Beschränkung des Bereiches umkehrbar werden

- Am Beispiel der Funktion $y = x^2/2$ haben wir gezeigt, dass sie in dem Bereich umkehrbar ist, wo die Funktionskurve keine Symmetrie zur y-Achse besitzt.

- Damit die Funktion in jedem Teilbereich umkehrbar wird, kann man den Definitionsbereich folgendermaßen zerlegen:

$$D_1 = (-\infty\,,\ 0\,]\,, \qquad D_2 = (0,\ \infty)$$

wie es in der Abb. 4-5 gezeigt wird.

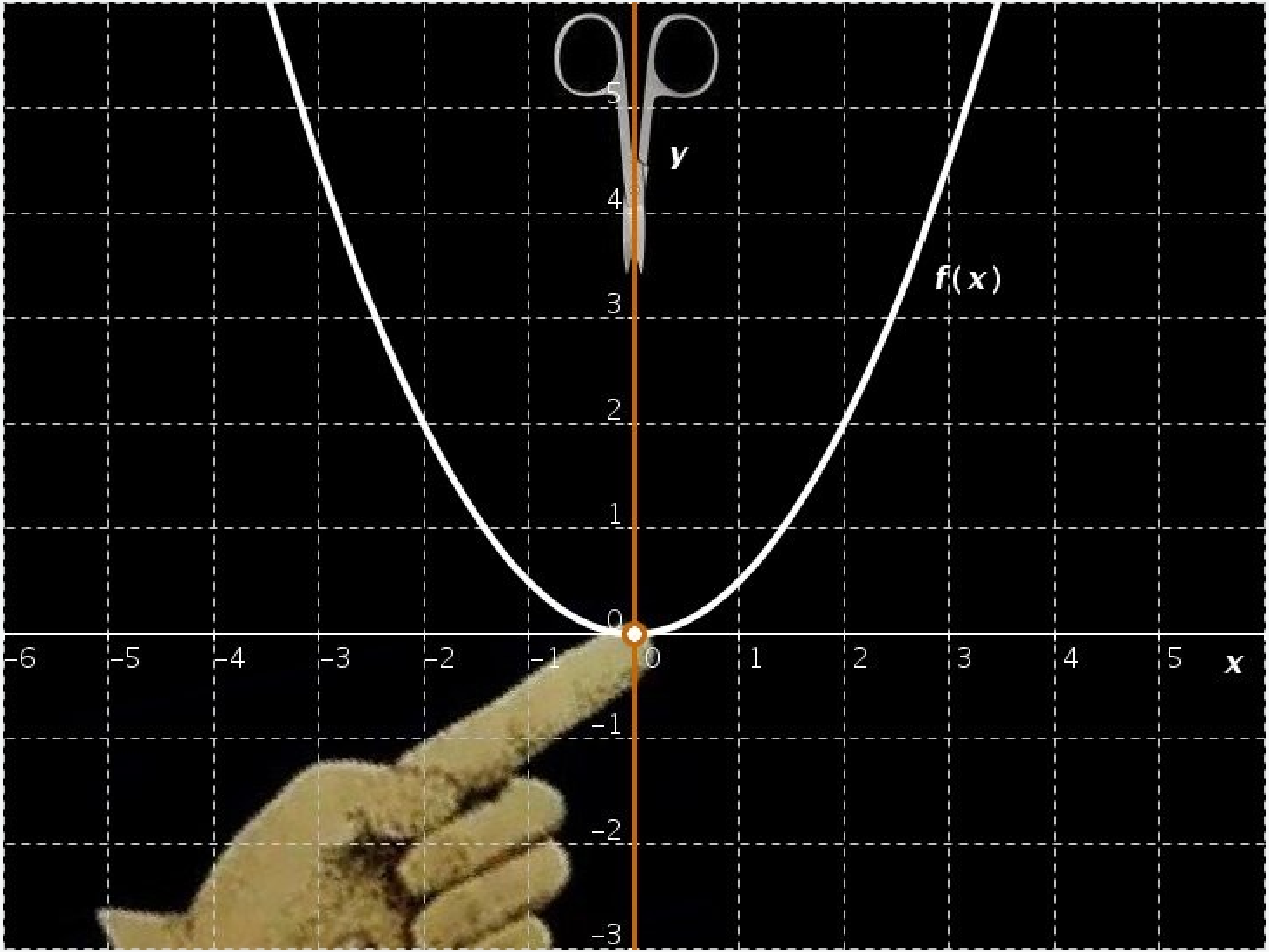

Abb. 4-5: Die Funktion $y = x^2/2$ ist in den beiden Bereichen $(-\infty, 0)$ und $[0, \infty)$ umkehrbar

Es stellt sich die Frage, ob die Symmetrieeigenschaften bezüglich der y-Achse ein entscheidendes Kriterium für die Umkehrbarkeit sind? Wie auch einige Funktionen der Aufgaben 1 und 2 zeigen, ist das nicht der Fall. Eine Funktion kann nicht symmetrisch zur y-Achse oder einer anderen Achse sein und doch nicht umkehrbar sein.

Wenn wir das Verhalten der Funktion $y = x^2/2$ in negativen und positiven Bereichen genauer betrachten, werden wir feststellen, dass sie im Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend und im Intervall $[0, \infty)$ streng monoton wachsend ist.

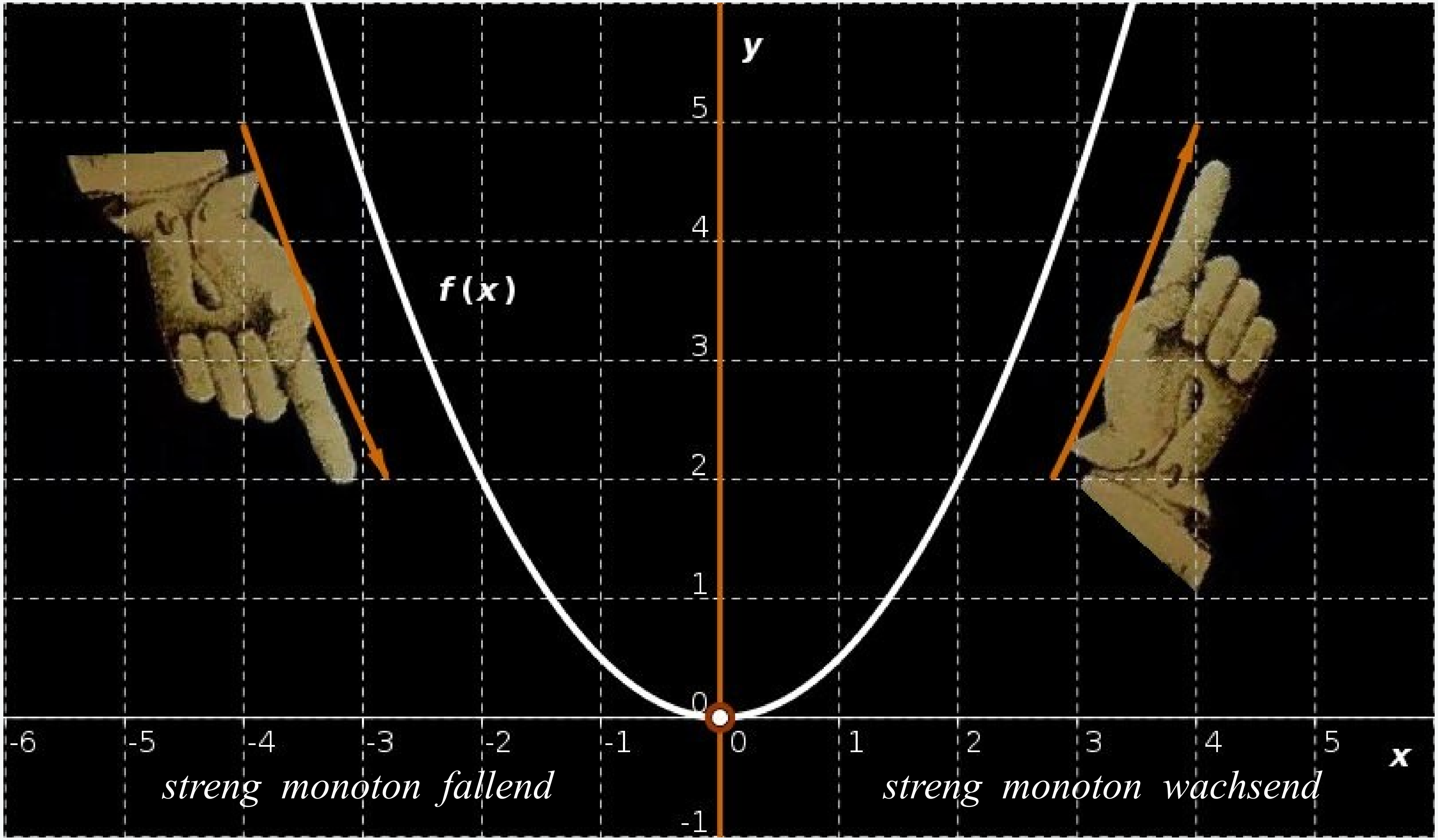

Abb. 4-6: Die Funktion $y = x^2/2$ hat in jedem der Bereiche $(-\infty, 0]$ und $(0, \infty)$ ein bestimmtes Monotonieverhalten

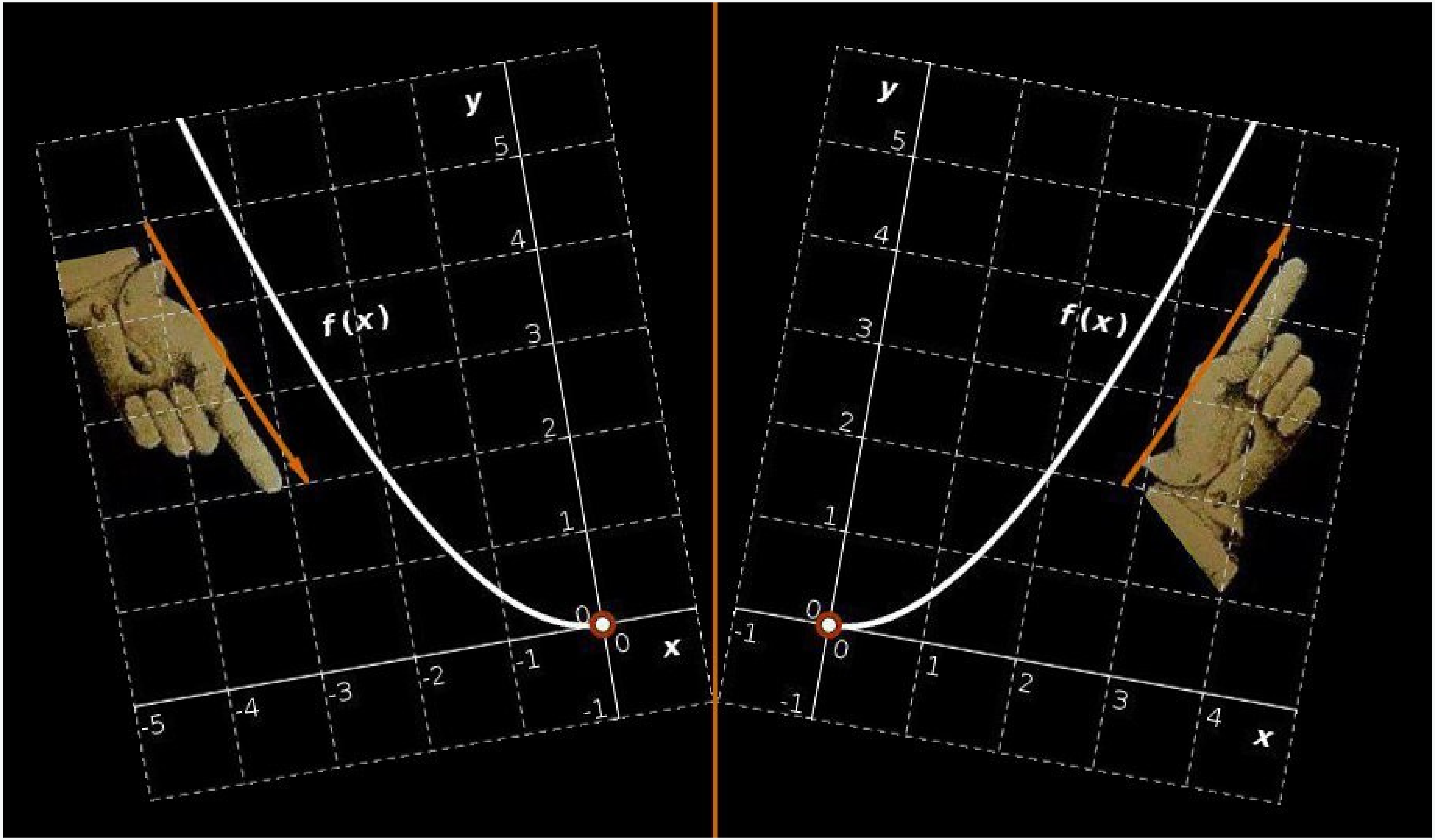

Abb. 4-7: Die Funktion $f(x) = x^2/2$ ist in jedem der Bereiche $(-\infty, 0]$ und $(0, \infty)$ umkehrbar. Um eine Umkehrfunktion der Funktion $y = f(x)$ zu bestimmen, müssen beide Teile, d.h. die negativen und positiven Bereiche unabhängig voneinander behandelt werden.

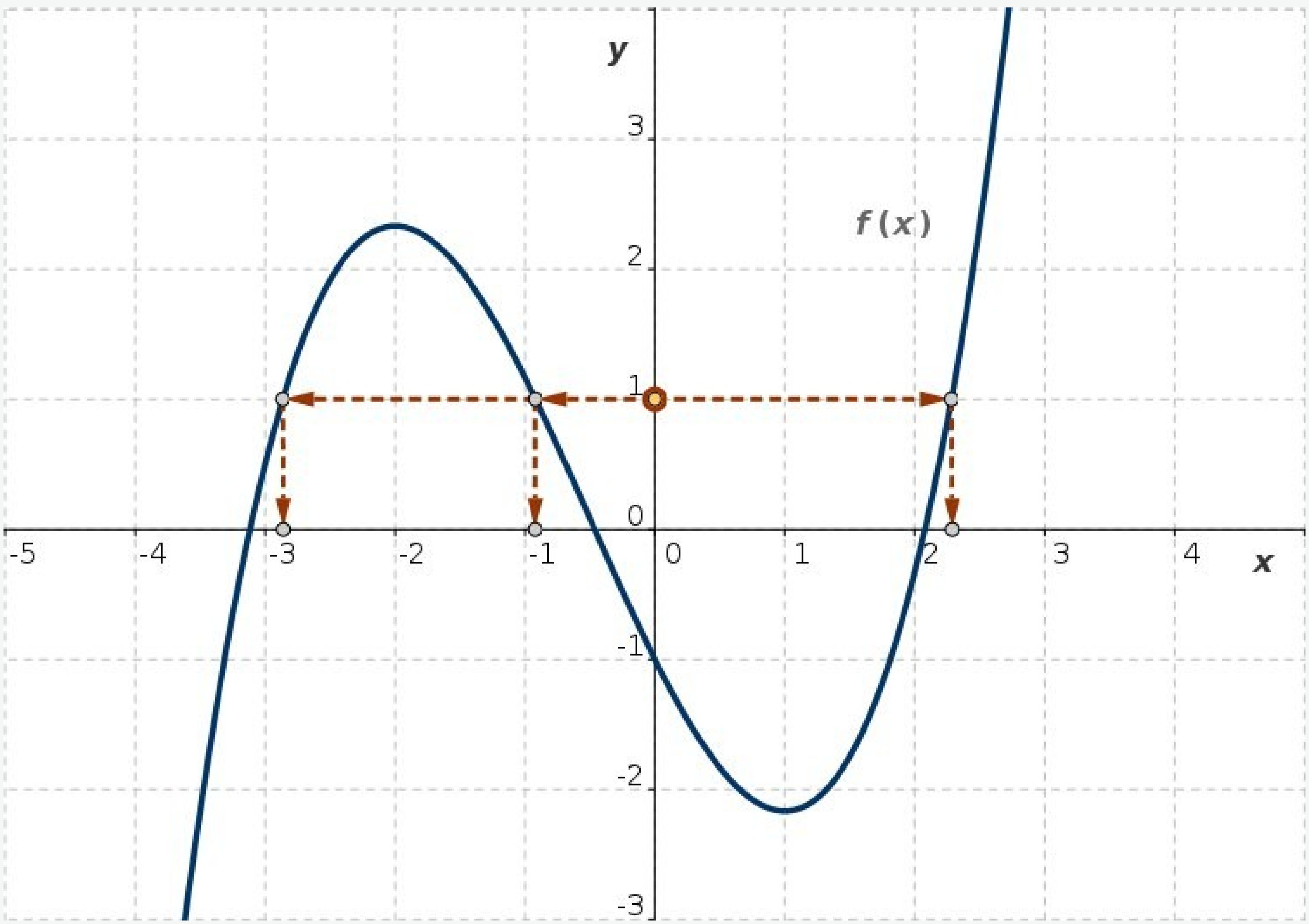

Abb. 4-1: Die Funktion y = f (x) ist nicht umkehrbar

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$$

Die Abbildung 4-1 zeigt:

- Die Funktion $y = f(x)$ ist nicht umkehrbar, verschiedene x werden auf ein y abgebildet.

- Die Funktion $y = f(x)$ ist streng monoton wachsend in den Intervallen

$D_1 = (-\infty\,,\ -2\,]\,, \qquad D_3 = [\,1,\ \infty\,)$

und streng monoton fallend im Intervall $D_2 = (-2,\ 1)$

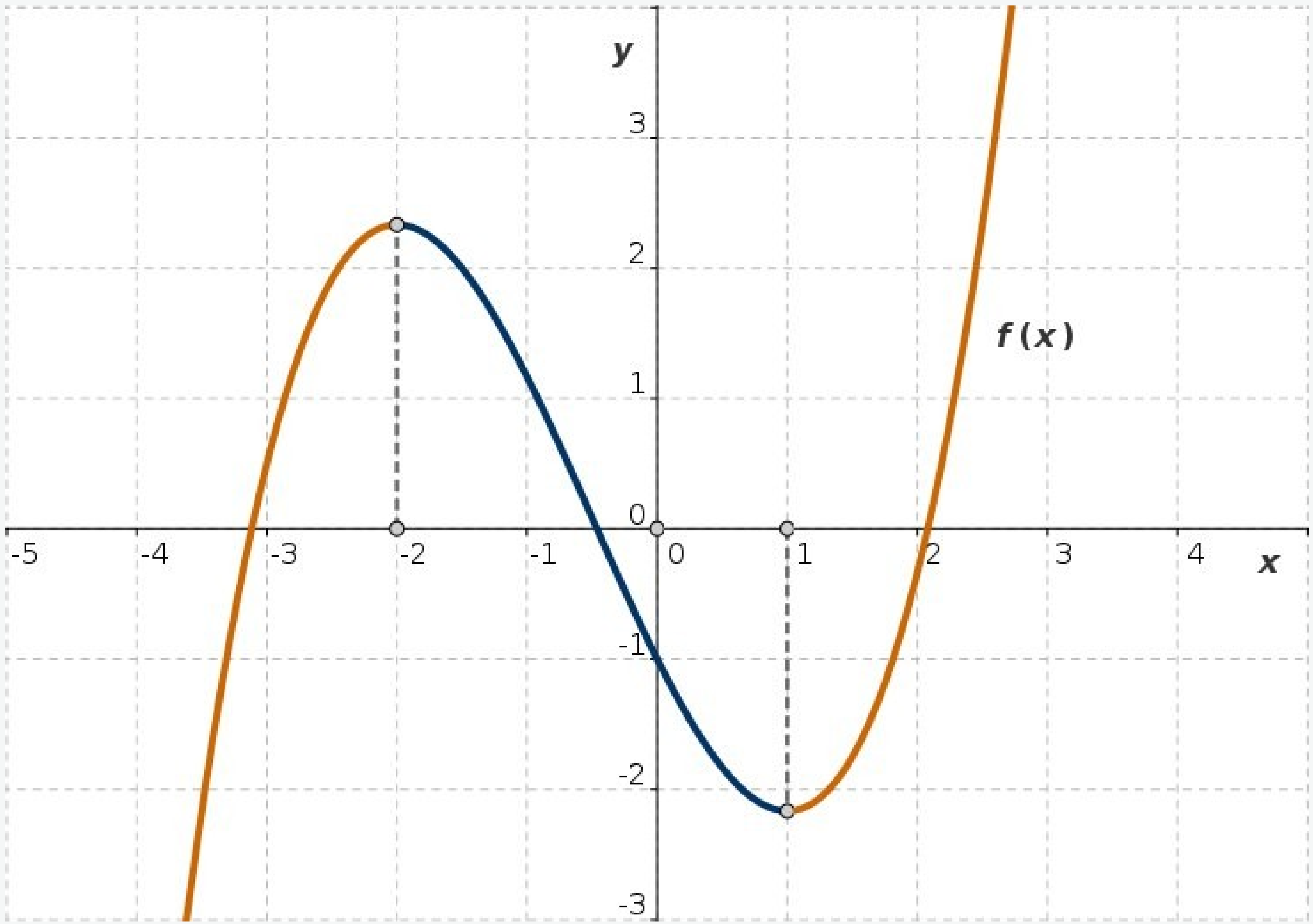

Abb. 4-2: Die Funktion $y = f(x)$ ist streng monoton wachsend (rote Funktionskurve) außerhalb des Intervalls [-2, 1] (blaue Funktionskurve)