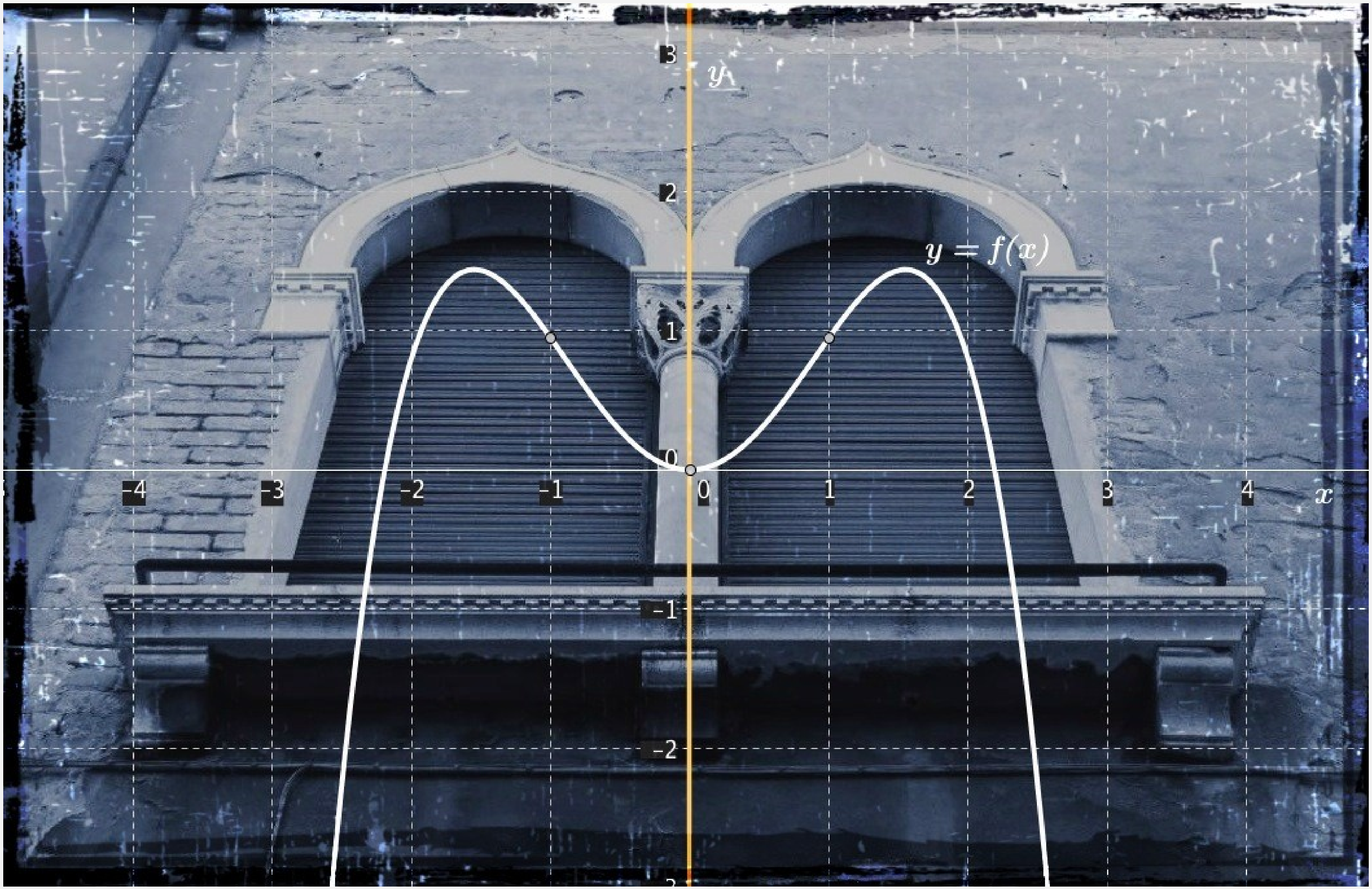

Gerade, ungerade oder weder noch? Algebraische und graphische Beweise

Bestimmen Sie algebraisch und graphisch, ob die Funktionen gerade oder ungerade sind, oder ob sie keine Symmetrie besitzen:

$a)\ \ f(x) = x^4 - 2x^2, \qquad b)\ \ f(x) = x^3 - 4x.$

Bemerkung:

Algebraischer Beweis: x durch $-x$ ersetzen und $f(-x)$ mit $f(x)$ vergleichen.

Graphischer Beweis: prüfen, ob der Graph eine Symmetrie besitzt.

Algebraische Lösung *a*):

Um zu prüfen, ob eine Funktion *f (x)* gerade, ungerade oder keines von beiden ist, bilden wir zunächst *f (-x)* und prüfen dann, ob eine der folgenden Gleichungen erfüllt ist:

$$(1): \quad f(-x) = f(x), \qquad (2): \quad f(-x) = -f(x)$$

Gilt Gleichung (1), dann ist die Funktion gerade, gilt Gleichung (2), ist die Funktion ungerade. Wenn keine der Gleichungen erfüllt ist, ist die Funktion keines von beiden.

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$$

Ist *n* gerade, so ist die *n-te* Potenz von (-*x*) gleich der *n-ten* Potenz von $+x$:

$$(-x)^2 = (-x)\cdot(-x) = x^2$$

$$(-x)^4 = (-x)\cdot(-x)\cdot(-x)\cdot(-x) = x^4$$

Graphische Lösung: Hier wird nach Inspektion des Graphen eine Aussage über die Symmetrieeigenschaften der Funktion gemacht.

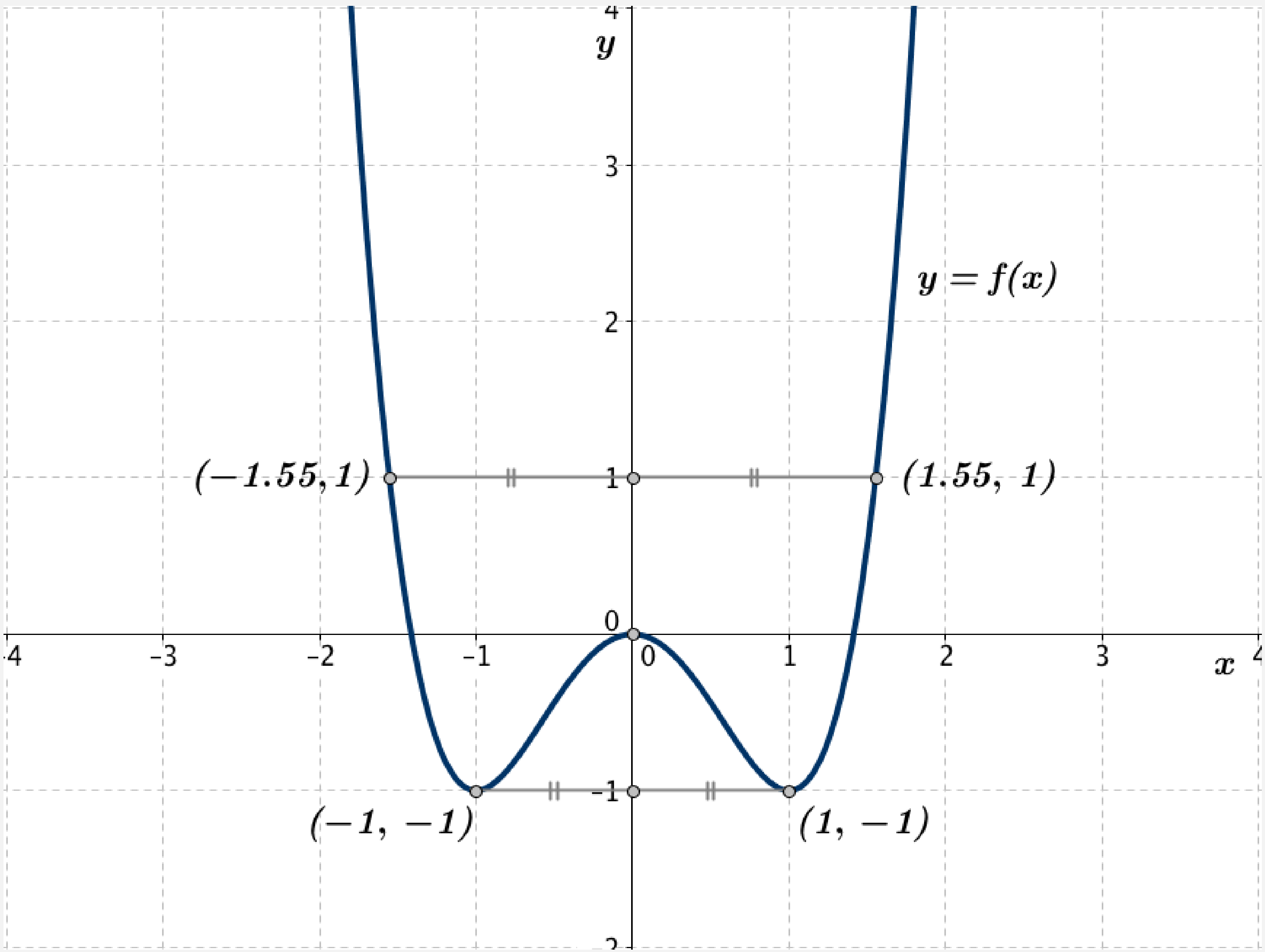

Abb. 3-1: Der Graph von $y = f(x)$ (a) ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Funktion ist gerade

Algebraischer Beweis:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x)$$

Ist *n* ungerade, so ist die *n-te* Potenz von (-*x*) gleich dem Negativen der *n-ten* Potenz von $+x$:

$$(-x)^3 = (-x)\cdot(-x)\cdot(-x) = -x^3$$

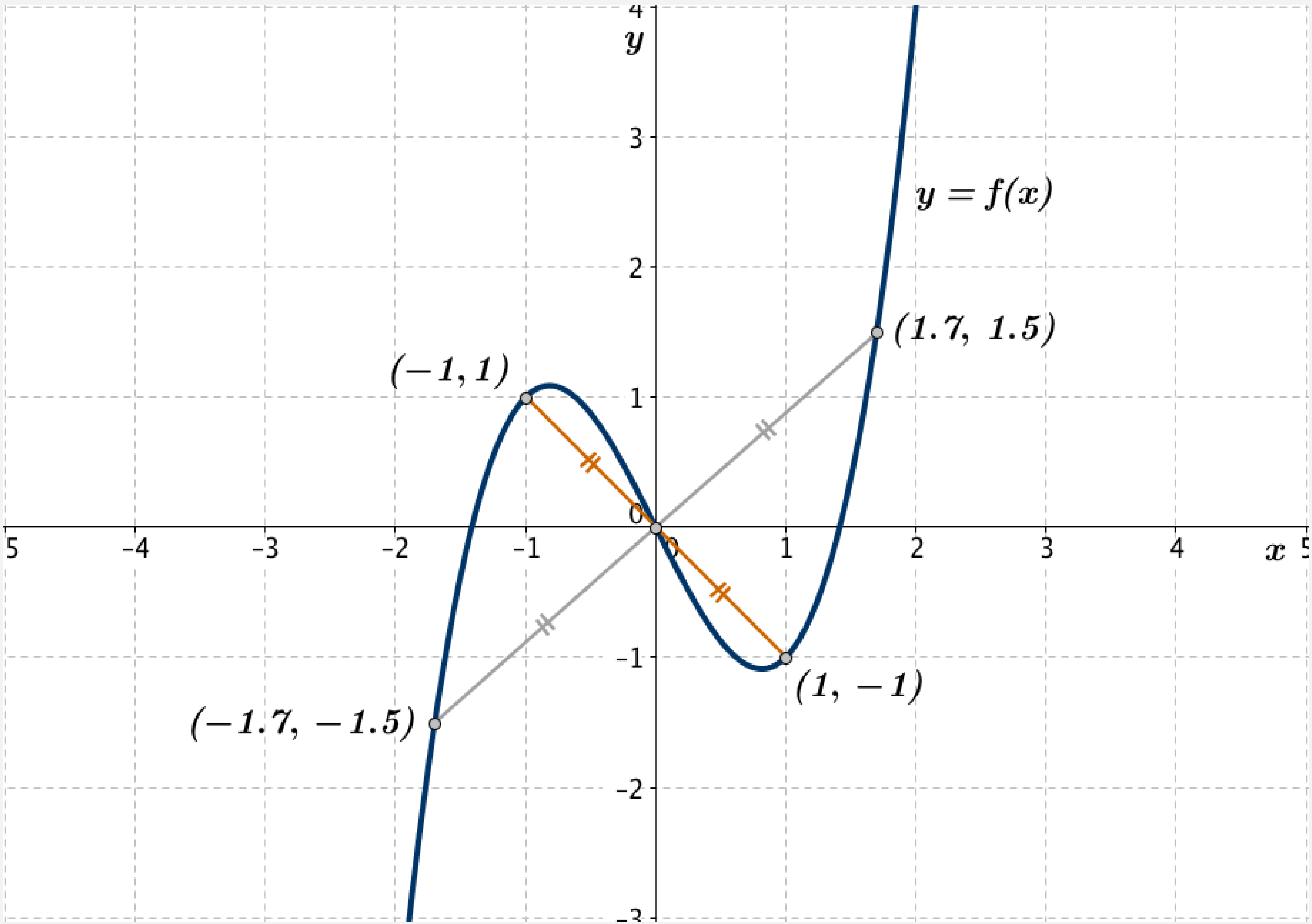

Abb. 3-2: Der Graph von $y = f(x)$ (b) ist symmetrisch in Bezug auf den Koordinatenursprung. Die Funktion ist ungerade

Bestimmen Sie, ob die Funktion $y = f(x)$ gerade oder ungerade ist, oder ob sie keine Symmetrie im gegebenen Bereich besitzt:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2, \qquad a)\ D_f = \mathbb{R}, \qquad b)\ D_f = [-2, 3]$$

Erklären Sie, wie die Änderung des Bereiches D die Symmetrieeigenschaft beeinflussen kann.

Algebraischer Beweis:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2} - 2 = \frac{x^2}{2} - 2 = f(x)$$

Die algebraische Prüfung der Funktion spricht dafür, daß die Funktion gerade ist. Das reicht aber noch nicht. Die folgenden Abbildungen 4-1 und 4-2 zeigen, dass die Symmetrie der Funktion auch vom Definitionsbereich abhängt.

$a)\ D_f = \mathbb{R}$

Hier haben wir einen symmetrischen Definitionsbereich, der Funktionsgraph (Abb. 4-1) ist symmetrisch in Bezug auf die y-Achse.

$b)\ D_f = [-2, 3]$

Hier ist der Funktionsgraph (Abb. 4-2) nicht symmetrisch in Bezug auf die y-Achse, weil der Definitionsbereich nicht symmetrisch ist. Z.B. enthält der Graph zum Punkt (3, 2.5) keinen symmetrischen Punkt (-3, 2.5).

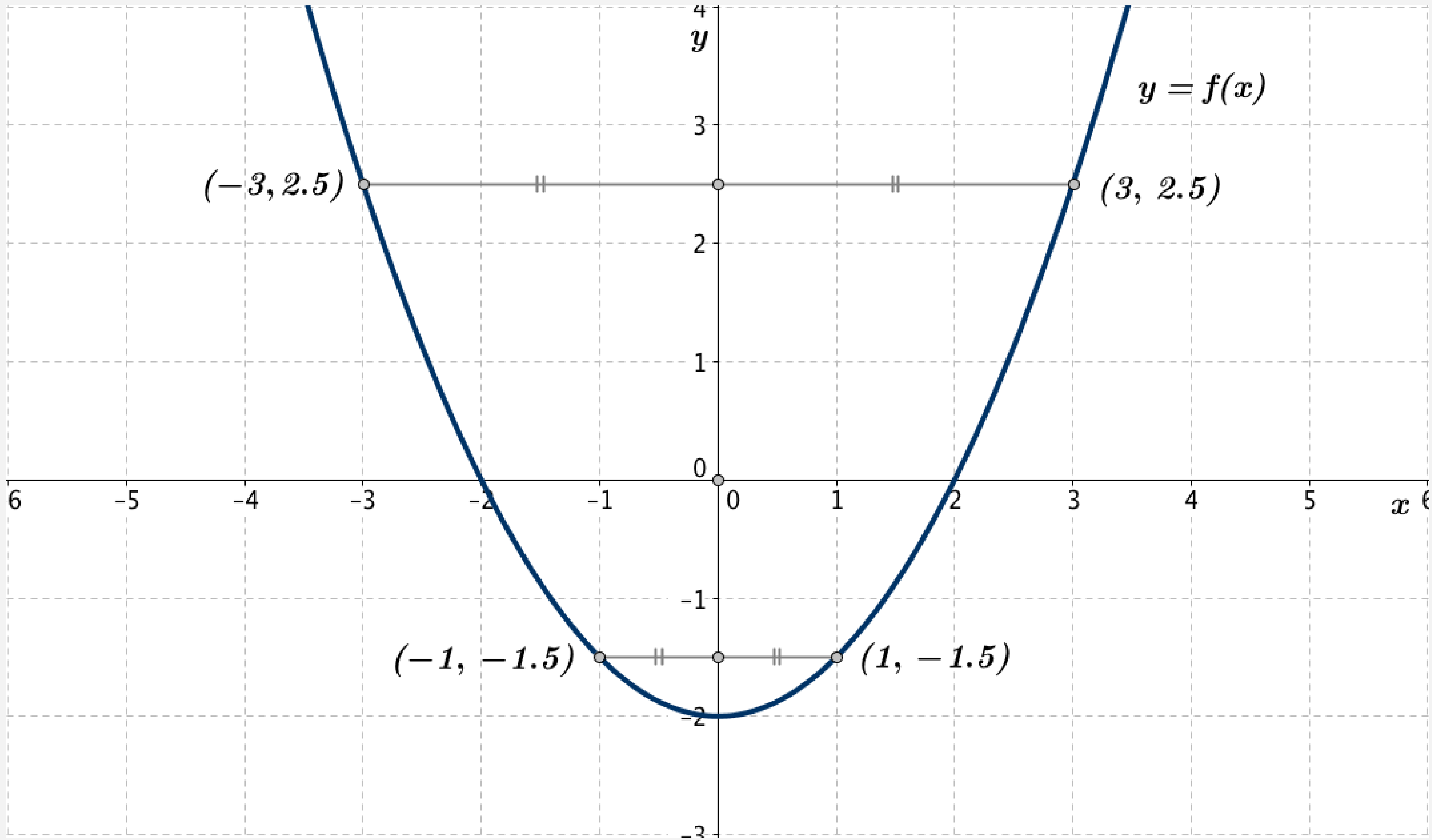

Abb. 4-1: Der Graph der Funktion y = f (x) ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

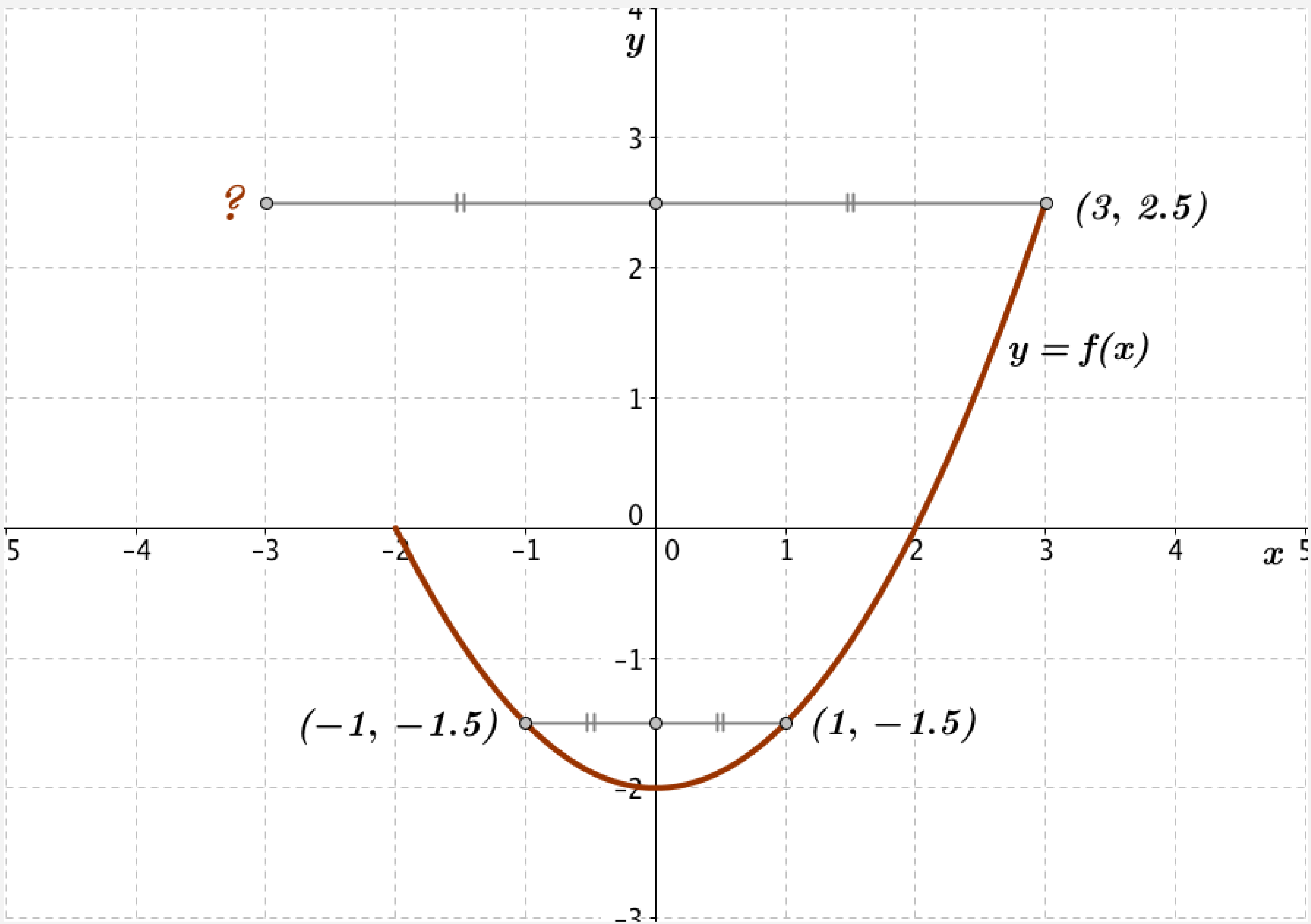

Abb. 4-2: Der Graph der Funktion $y = f(x)$ ist nicht symmetrisch bezüglich der y-Achse

Aufgabe 5: Entscheiden Sie

1) welche der gegebenen Funktionen Polynomfunktionen sind

$a)\quad f(x) = x^2 - 2$

$b)\quad f(x) = x^3 - 1$

$c)\quad f(x) = 5x^2 - 3x + \sqrt{x}$

$d)\quad f(x) = x^2 - 2x - 1$

$e)\quad f(x) = -x^{5/2} + 7x^2 - 11x$

$g)\quad f(x) = x^5 - 4x^3 + x$

2) welche Polynomfunktionen gerade, ungerade oder keines von beiden sind.

Aufgabe 6:

Formulieren Sie die Bedingung dafür, dass eine Polynomfunktion gerade, ungerade oder keines von beiden ist.

1) Eine Polynomfunktion $y = f(x)$ ist eine endliche Summe von Vielfachen von Potenzen einer Variablen mit natürlichzahligen Exponenten. Eine Polynomfunktion kann in folgender allgemeiner Form dargestellt werden:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$a_i \in \mathbb{R}, \qquad a_n \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad D_f = \mathbb{R}$$

Die Polynomfunktionen dieser Aufgabe sind:

$a)\ \ f(x) = x^2 - 2$

$b)\ \ f(x) = x^3 - 1$

$d)\ \ f(x) = x^2 - 2x - 1$

$g)\ \ f(x) = x^5 - 4x^3 + x$

Diese Funktionen haben nur natürlichzahlige Exponenten. Die Funktionen *c*) und *e*) sind keine Polynome. Der letzte Term von *c*) hat den Exponenten 1/2, der erste Term von *e*) hat den Exponenten 5/2.

$c)\ \ f(x) = 5x^2 - 3x + \sqrt{x}$

$e)\ \ f(x) = -x^{5/2} + 7x^2 - 11x$

2) Um zu bestimmen, welche der Polynome *f (x)* gerade, ungerade oder keines von beiden sind, bilden wir für jede Funktion *f (-x)*.

$a)\quad f(x) = x^2 - 2, \qquad f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$

$b)\quad f(x) = x^3 - 1, \qquad f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1 \neq f(x)$

$d)\quad f(x) = x^2 - 2x - 1,$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 1 = x^2 + 2x - 1 \neq f(x)$$

$g)\quad f(x) = x^5 - 4x^3 + x,$

$$f(-x) = (-x)^5 - 4(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 4x^3 - x =$$

$$= -(x^5 - 4x^3 + x) = -f(x)$$

Die Funktion *a*) ist gerade, die Funktion *g*) ist ungerade, die Funktionen *b*) und *d*) sind weder gerade noch ungerade.

Man kann auch versuchen, auf einfache Art zu prüfen, ob eine Funktion gerade oder ungerade ist. Wie wir algebraisch gezeigt haben, ist die Funktion *a*) gerade:

$a)\quad f(x) = x^2 - 2, \qquad f(-x) = f(x)$

Wir betrachten die beiden x-Werte, $x = 1$ und $x = -1$, die symmetrisch bezüglich des Ursprungs sind und prüfen die zughörigen Funktionswerte:

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1, \qquad f(1) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(-1) = f(1)$$

$b)\quad f(x) = x^3 - 1, \qquad f(-x) \neq f(x)$

$$f(-1) = (-1)^3 - 1 = -1 - 1 = -2, \qquad f(1) = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(-1) \neq \pm f(1)$$

$$d)\quad f(x) = x^2 - 2x - 1, \qquad f(-x) \neq f(x)$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$$

$$f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$$

$$f(-1) = -f(1)$$

Wir haben schon gezeigt, dass diese Funktion weder gerade noch ungerade ist. Allerdings hat die Funktion an diesen speziellen x-Werten die Eigenschaft einer ungeraden Funktion.

Vorsicht !

Wenn wir eine Funktion nur an zwei bezüglich des Ursprungs symmetrischen x-Werten auswerten, dann *müssen wir sicher sein*, dass man dasselbe Resultat auch für alle anderen symmetrischen x-Werte im Definitionsbereich erhält.

Die Abbildung der nächsten Seite zeigt diese Funktion mit den beiden ausgewählten Punkten:

$$P_1 = (1,\ f(1)) = (1, -2), \qquad P_2 = (-1,\ f(-1)) = (-1, 2)$$

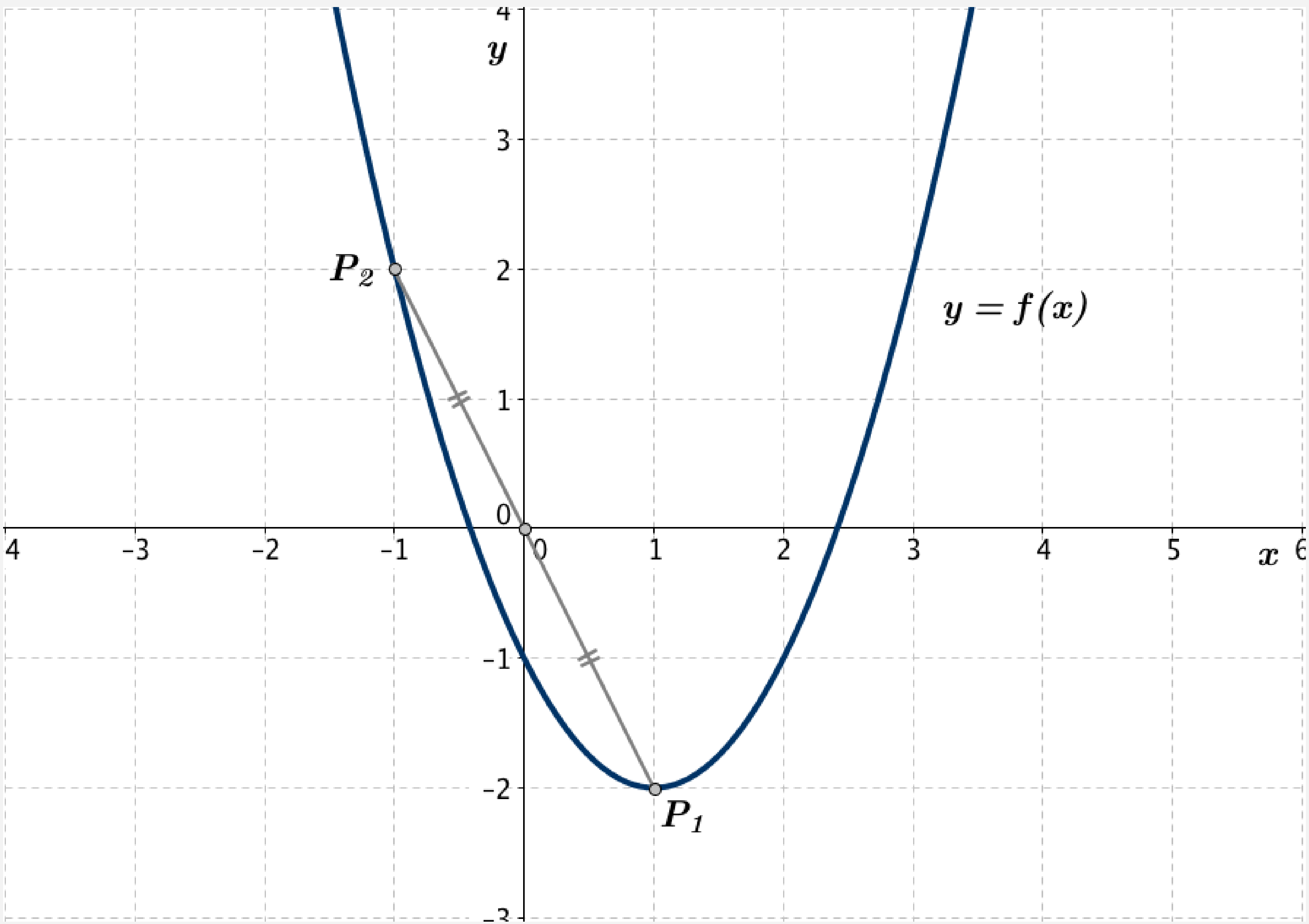

Abb. 4: Die Funktion $y = f(x)$ ist weder gerade noch ungerade

Symmetrie einer Funktion: Lösung 6

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n, & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ -x^n, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Potenzen von x mit <u>geraden</u> Exponenten ändern sich nicht, wenn x durch - x ersetzt wird.

Potenzen von x mit <u>ungeraden</u> Exponenten ändern das Vorzeichen, wenn x durch $-x$ ersetzt wird.

Polynomfunktionen, die nur Terme mit geraden Potenzen der Variablen x und konstante Faktoren und additive Konstanten enthalten, sind gerade Funktionen. Beispielsweise sind die folgenden Funktionen gerade:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$$

$$g(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$$

$$h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

Diese Funktionen werden in Abb.. 5-1 gezeigt.

Ein konstanter Faktor ist z. B. die Zahl 1/2 in der Funktion $f(x)$.
- 3 und 6 sind konstante Faktoren in der Funktion $g(x)$.

Die Konstanten - 2 in $f(x)$ and -1 in $g(x)$ sind additive Konstanten.

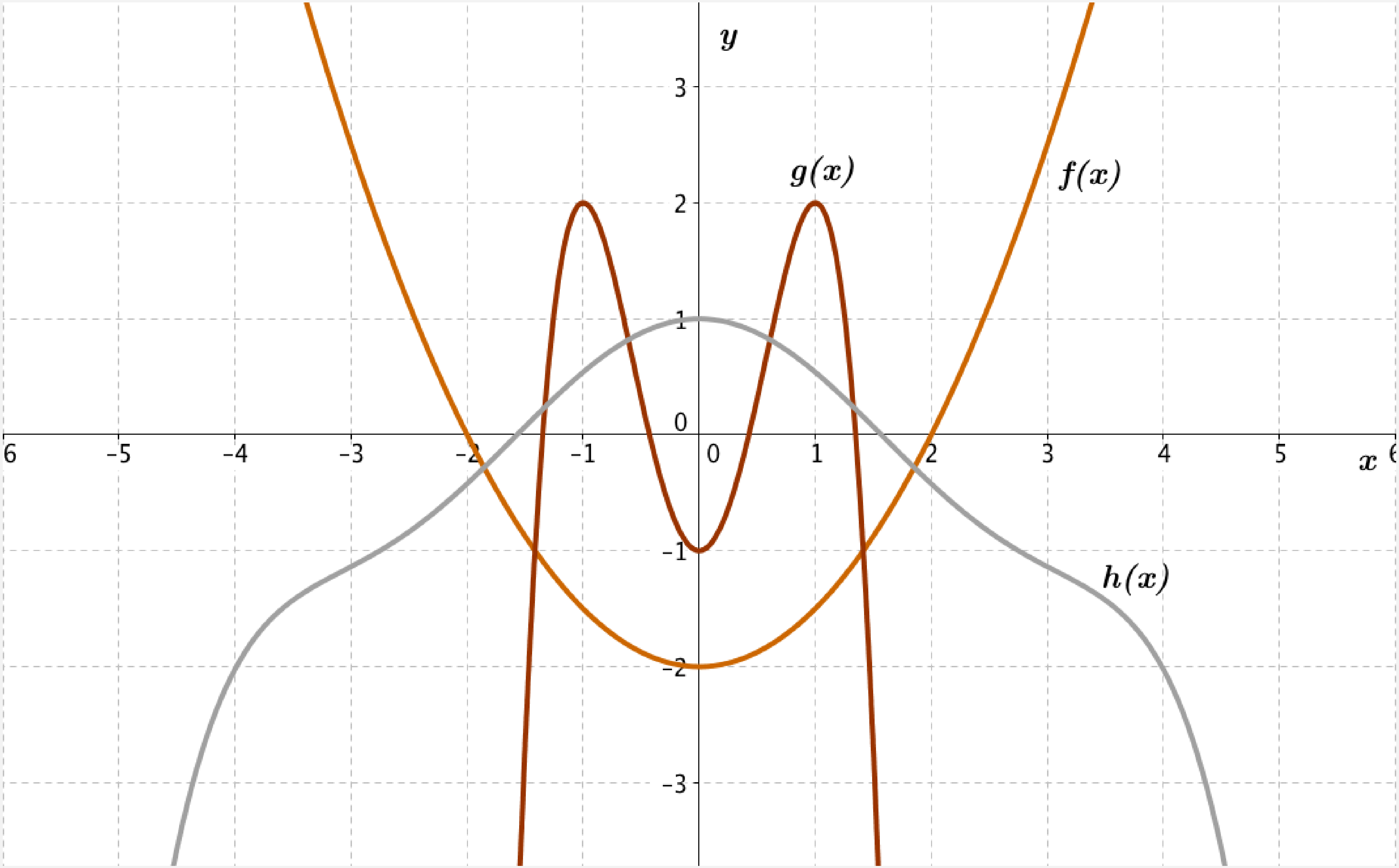

Abb. 5-1: Die Graphen der geraden Funktionen

Polynomfunktionen mit nur ungeraden Potenzen von x sind ungerade Funktionen, zum Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3}{6}$$

$$g(x) = -6x^5 + 9x^3 - x$$

$$h(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

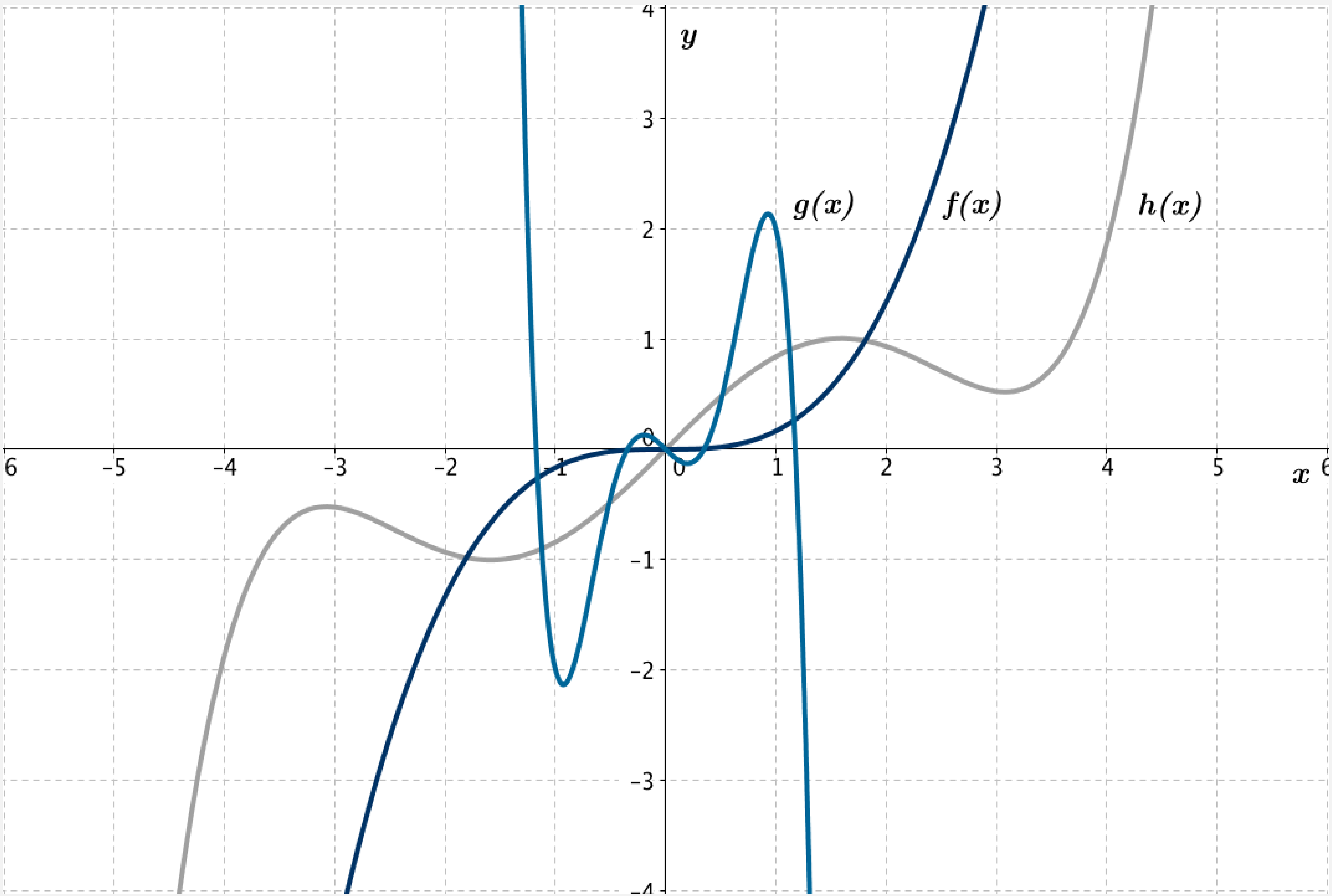

Abb. 5-2: Die Graphen der ungeraden Funktionen

Bestimmen Sie, ob die Funktionen gerade, ungerade oder keines von beiden sind:

$a)\quad f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{x-3}, \qquad h(x) = \frac{2x}{x+7}$

$b)\quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = \frac{x}{x^2+1}, \qquad h(x) = \frac{5x^3}{x^2-16}$

$c)\quad f(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad g(x) = \frac{3}{x^3-4x}, \qquad h(x) = \frac{2x^3-x^2}{x^2+5}$

$d)\quad f(x) = \frac{x^2+7}{x^2-3x^4}, \qquad g(x) = \frac{x^3-11x}{x^4+12}, \qquad h(x) = \frac{5x^3}{x^7-9x^3}$

$e)\quad f(x) = \frac{1}{|x|}, \qquad g(x) = \frac{|x|}{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{|x|+1/2}$

$e)\quad f(x) = \frac{1}{x^2+2|x|+1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2-0.8|x|+1/2}$

Unter welchen Bedingungen sind gebrochenrationale Funktionen gerade oder ungerade?

Definition:

Eine rationale Funktion ist eine Funktion, die als Quotient zweier Polynome darstellbar ist:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) \neq 0$$

Zum Beispiel (b):

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad P_f(x) = 1, \qquad Q_f(x) = x^2$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \qquad P_g(x) = x, \qquad Q_g(x) = x^2 + 1$$

$$h(x) = \frac{5x^3}{x^2 - 16}, \qquad P_h(x) = 5x^3, \qquad Q_h(x) = x^2 - 16$$

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x-3}, \qquad h(x) = \dfrac{2x}{x+7}$

$$f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x), \qquad g(-x) = \frac{1}{-x-3} = -\frac{1}{x+3}$$

$$h(-x) = -\frac{2x}{-x+7} = \frac{2x}{x-7}$$

Die Funktion *f (x)* ist ungerade.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \qquad g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \qquad h(x) = \dfrac{5x^3}{x^2-16}$

$$f(-x) = \frac{1}{x^2} = f(x), \qquad g(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -g(x)$$

$$h(-x) = \frac{5(-x)^3}{(-x)^2-16} = -\frac{5x^3}{x^2-16} = -h(x)$$

Die Funktion *f (x)* ist gerade, die Funktionen *g (x)* und *h (x)* sind ungerade.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}, \qquad g(x) = \dfrac{3}{x^3 - 4x}, \qquad h(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{x^2 + 5}$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$$

$$g(x) = \frac{3}{x^3 - 4x} = \frac{3}{(-x)^3 - 4(-x)} = \frac{3}{-x^3 + 4x} = -\frac{3}{x^3 - 4x} = -g(x)$$

$$h(-x) = \frac{2(-x)^3 - (-x)^2}{(-x)^2 + 5} = \frac{-2x^3 - x^2}{x^2 + 5} = -\frac{(2x^3 + x^2)}{x^2 + 5}$$

Die Funktionen *f (x)* und *g (x)* sind ungerade.

$$d)\quad f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 3x^4}, \qquad g(x) = \frac{x^3 - 11x}{x^4 + 12}, \qquad h(x) = \frac{5x^3}{x^7 - 9x^3}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 7}{(-x)^2 - 3(-x)^4} = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 3x^4} = f(x)$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^3 - 11\cdot(-x)}{(-x)^4 + 12} = \frac{-x^3 + 11x}{x^4 + 12} = -\frac{x^3 - 11x}{x^4 + 12} = -g(x)$$

$$h(-x) = \frac{5\cdot(-x)^3}{(-x)^7 - 9(-x)^3} = \frac{5x^3}{x^7 - 9x^3} = h(x)$$

Die Funktionen $f(x)$ und $h(x)$ sind gerade, die Funktion $g(x)$ ist ungerade.

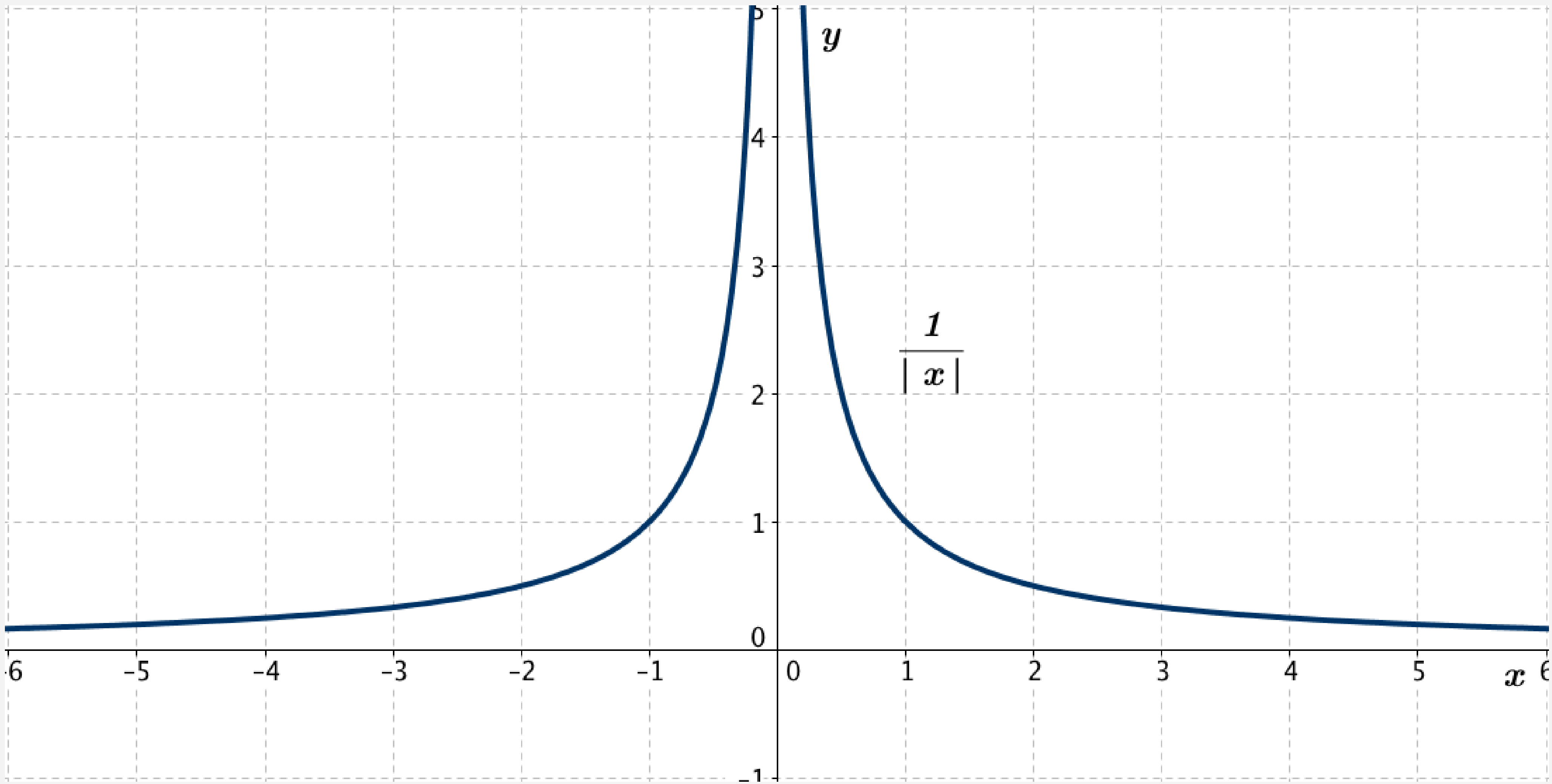

Abb. 7-1: Graph der geraden Funktion y = f (x)

$$f(x) = \frac{1}{|x|}, \qquad f(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f(x)$$

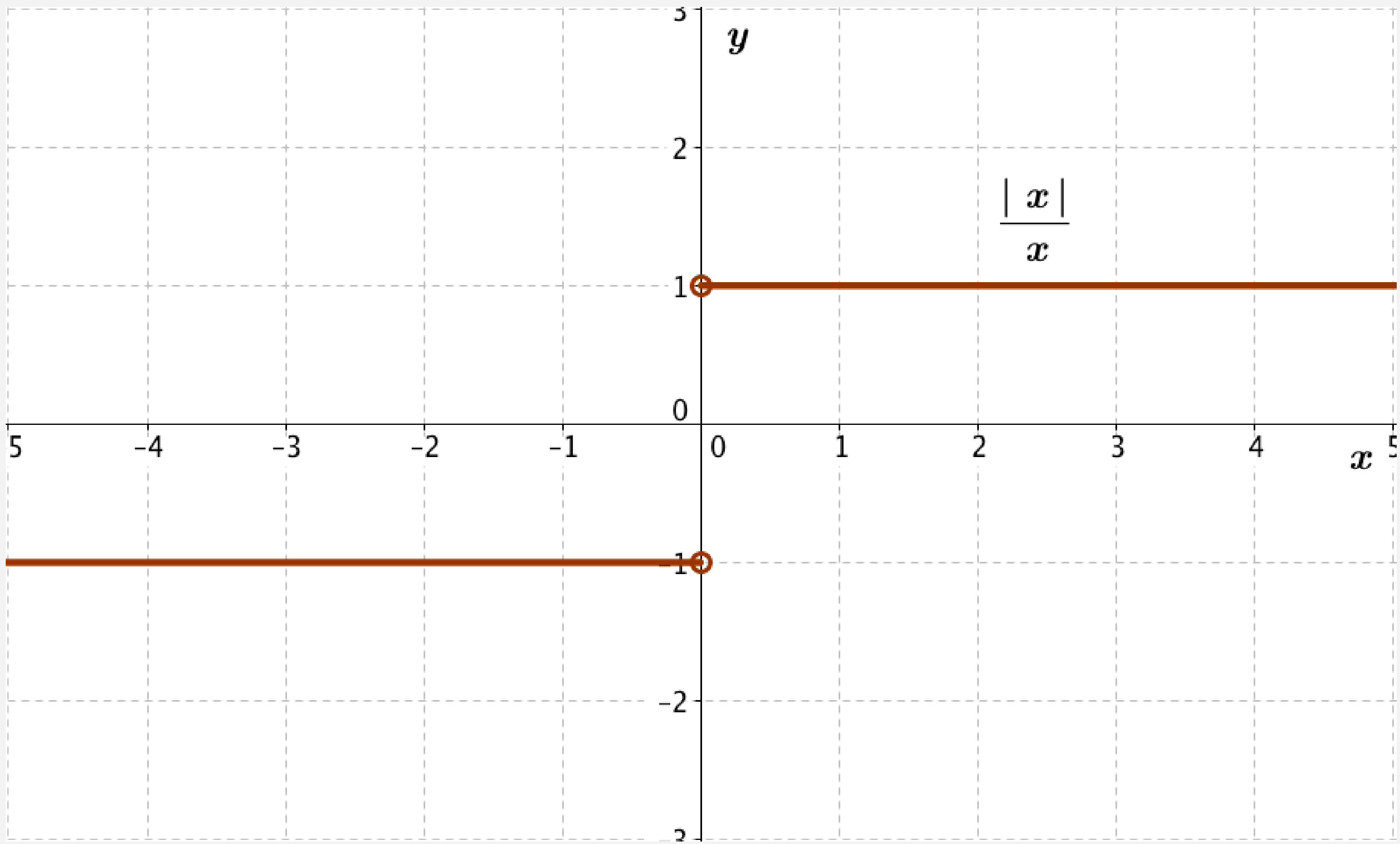

Abb. 7-2: Graph der ungeraden Funktion y = g (x)

$$g(x) = \frac{|x|}{x}, \qquad g(-x) = \frac{|-x|}{-x} = -\frac{|x|}{x} = -g(x)$$

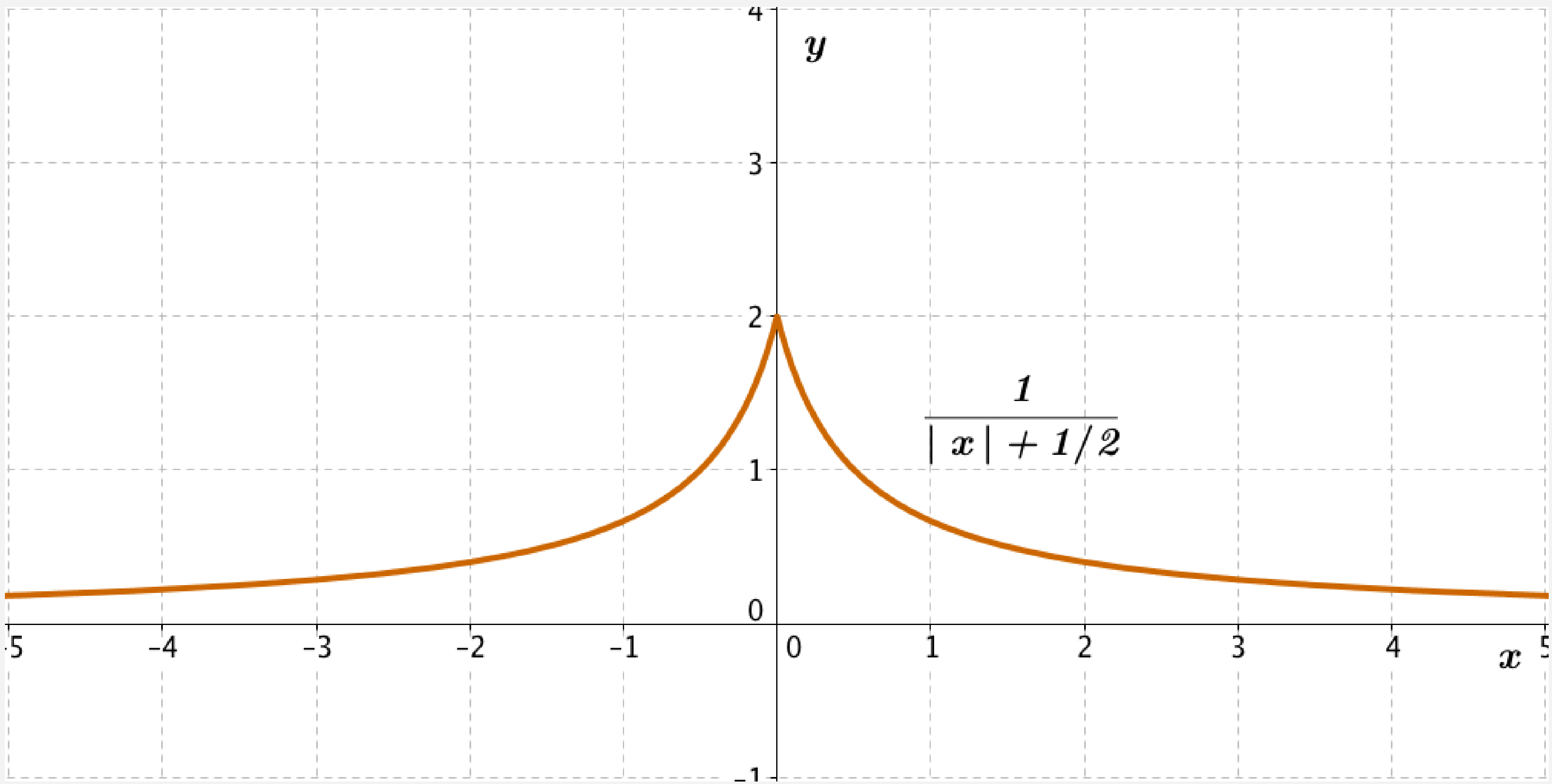

Abb. 7-3: Graph der geraden Funktion y = h (x)

$$h(x) = \frac{1}{|x| + 1/2}, \qquad h(-x) = \frac{1}{|-x| + 1/2} = \frac{1}{|x| + 1/2} = h(x)$$

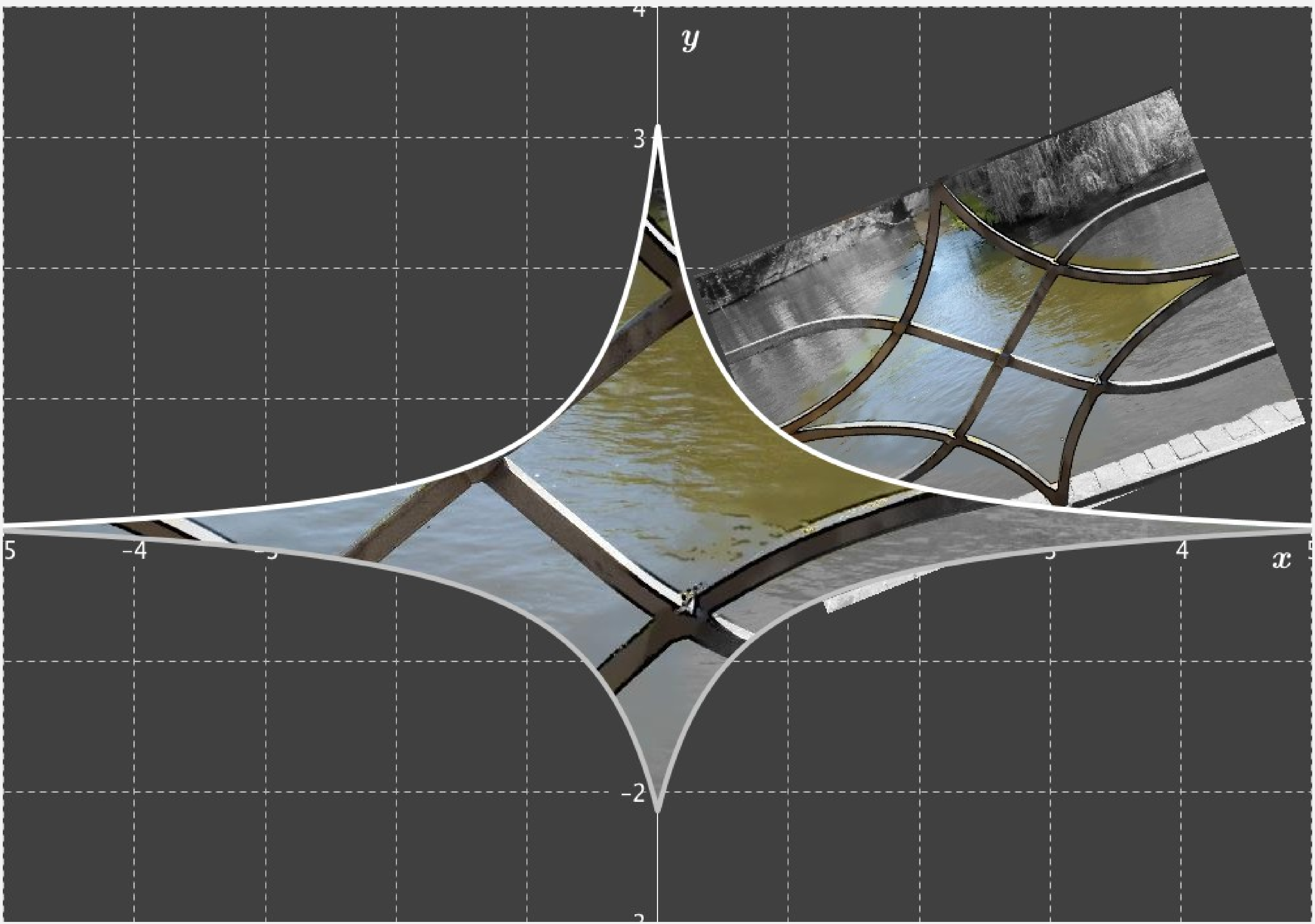

Abb. 7-4: Gerade Funktionen, die man beobachten kann (Lüneburg)

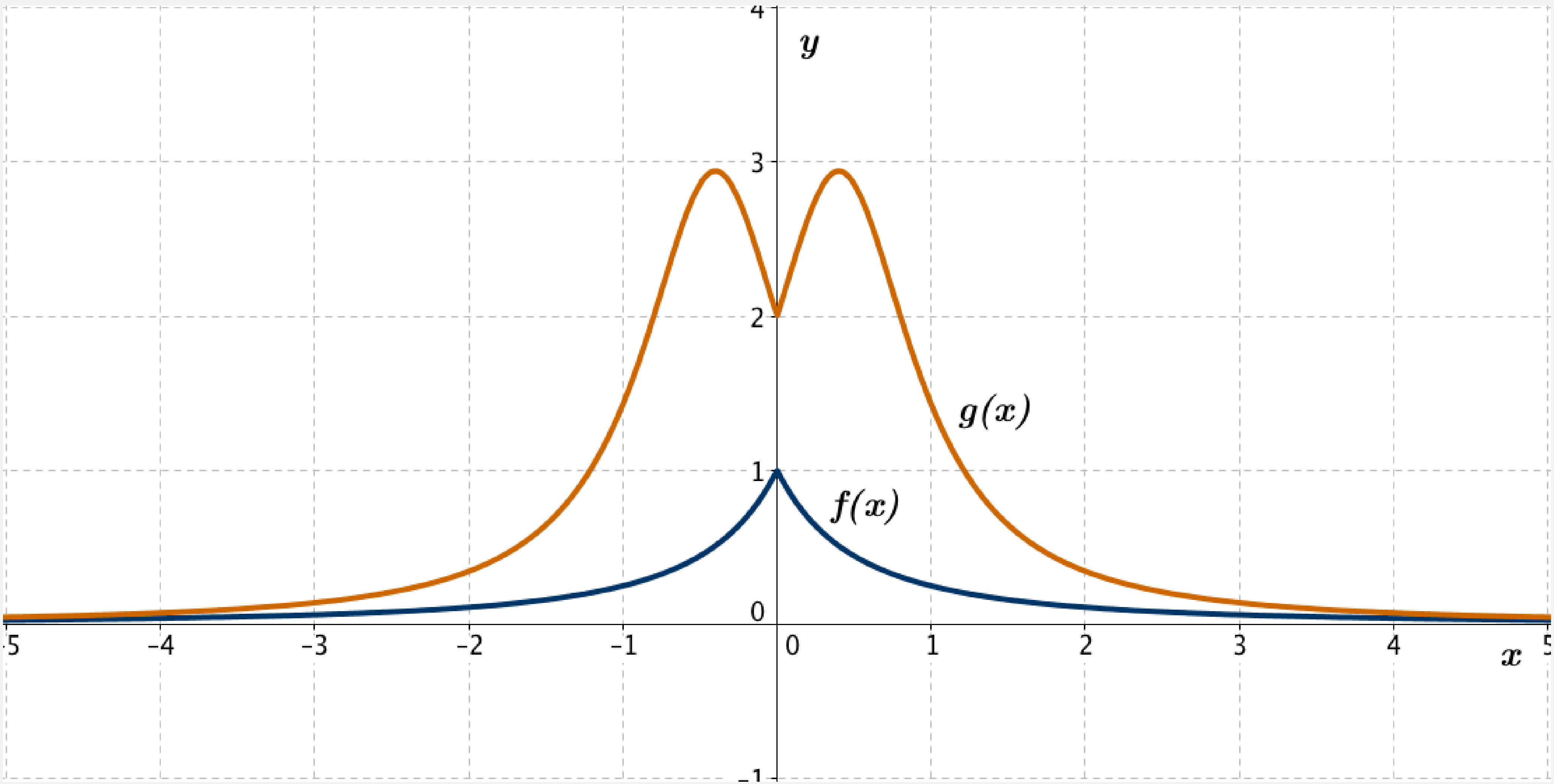

Abb. 7-4: Graphen der geraden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2|x| + 1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 - 0.8|x| + 1/2}$$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) \neq 0$$

Eine gebrochenrationale Funktion $y = f(x)$ is gerade, falls

- der Zähler $P(x)$ und der Nenner $Q(x)$ gerade Funktionen sind, zum Beispiel:

$$a)\ \ f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad d)\ \ f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 3x^4}, \qquad e)\ \ f(x) = \frac{1}{|x|}$$

- der Zähler $P(x)$ und der Nenner $Q(x)$ ungerade Funktionen sind, zum Beispiel:

$$d)\ \ h(x) = \frac{5x^3}{x^7 - 9x^3}$$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) \neq 0$$

Eine gebrochenrationale Funktion $y = f(x)$ is ungerade, falls

- der Zähler $P(x)$ ungerade und der Nenner $Q(x)$ gerade ist, zum Beispiel:

$$b)\quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \qquad h(x) = \frac{5x^3}{x^2 - 16}$$

- der Zähler $P(x)$ gerade und der Nenner $Q(x)$ ungerade ist, zum Beispiel:

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{x}, \qquad c)\quad g(x) = \frac{3}{x^3 - 4x}, \qquad e)\quad g(x) = \frac{|x|}{x}$$