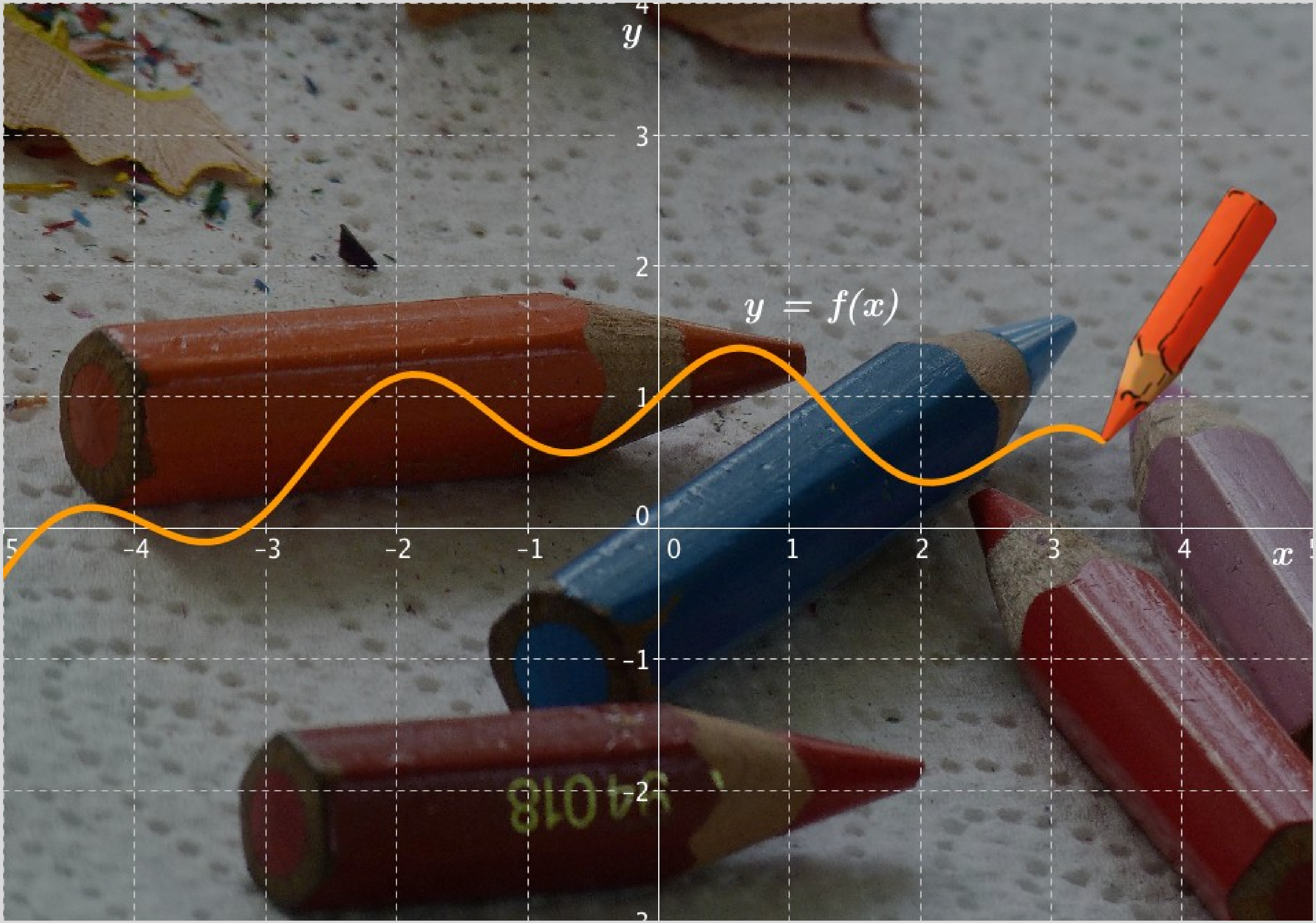

Stetige Funktionen

Der Graph einer stetigen Funktion hat keine Sprungstellen und kann ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden.

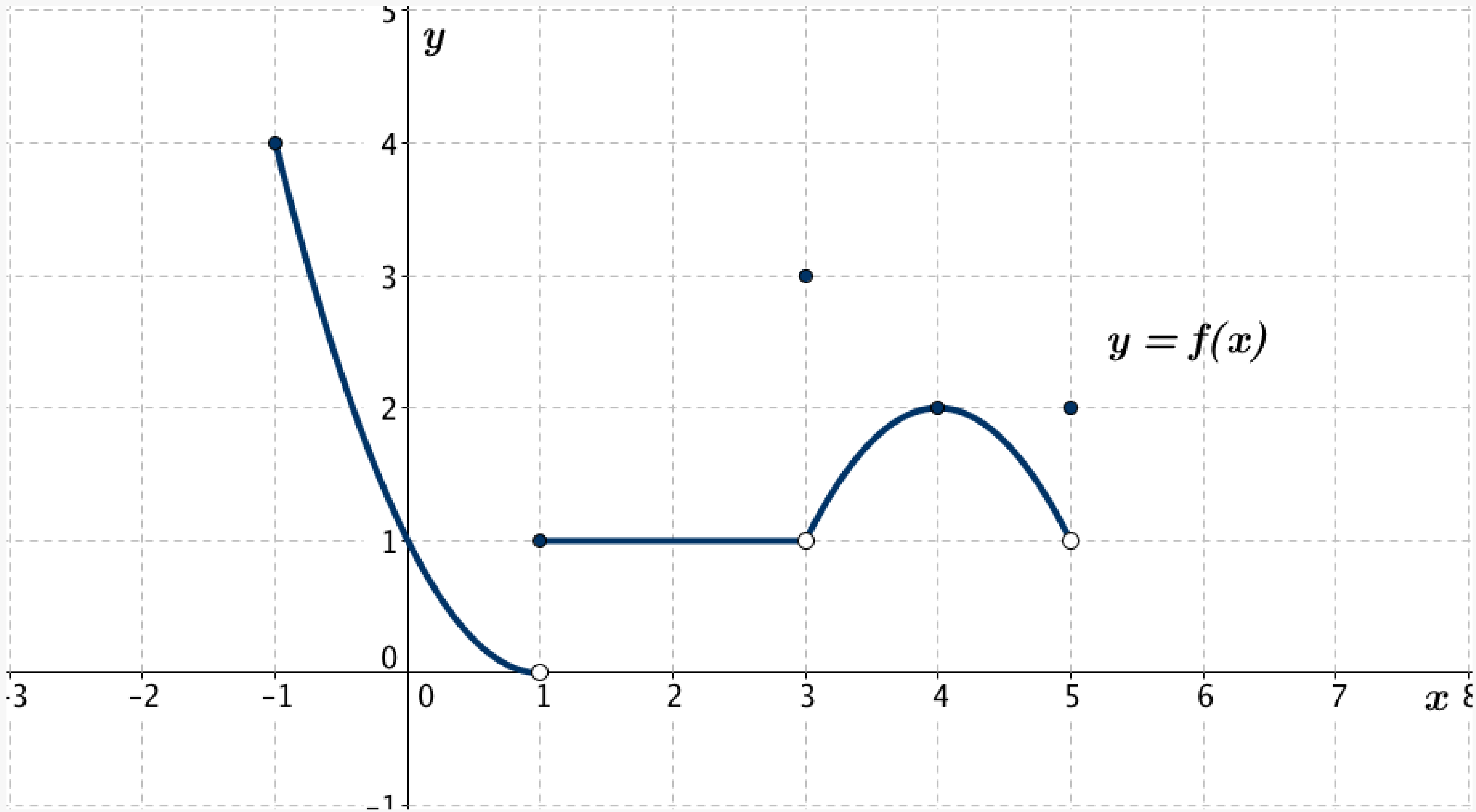

Abb. A1: Graphische Darstellung der Aufgabe

Prüfen Sie, ob die stückweise definierte Funktion von Abbildung A1 an den Stellen x = -1, 1, 3, 4 und 5 einen Grenzwert besitzt.

$x = -1: \quad \lim\limits_{x \to -1+\delta} f(x) = 4$

Die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to -1-\delta} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

existieren nicht. Die Funktion ist links von $x =$ -1 nicht definiert.

$x = 1: \quad \lim\limits_{x \to 1-\delta} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 1+\delta} f(x) = 1, \quad f(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existiert nicht. Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert stimmen nicht überein.

$x = 3: \quad \lim\limits_{x \to 3-\delta} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to 3+\delta} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$

Der Grenzwert im Punkt $x = 3$ existiert, obwohl der Funktionswert $f(3) = 3$ und der Grenzwert nicht gleich sind.

$x = 4: \quad \lim\limits_{x \to 4-\delta} f(x) = \lim\limits_{x \to 4+\delta} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4) = 2$

$x = 5: \quad \lim\limits_{x \to 5-\delta} f(x) = 1, \quad f(5) = 2$

Die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 5+\delta} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

existieren nicht. Die Funktion ist rechts von $x =$ 5 nicht definiert.

Als stetig bezeichnet man einen Vorgang, der ohne Unterbrechung und ohne sprunghafte Veränderungen abläuft. "Stetig" hat auch in der Mathematik eine ähnliche Bedeutung. Man definiert die Stetigkeit mit Hilfe von Grenzwerten.

Definition:

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig im Punkt $x = a$, wenn:

- $f(x)$ definiert ist
- der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (d.h. Grenzwert = Funktionswert)

Bei kleinen Änderungen des Arguments x einer stetigen Funktion $f(x)$ ändert diese sich nur geringfügig. Der Graph einer stetigen Funktion ergibt eine zusammenhängende Kurve.

Ist eine Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ definiert, so wird die Funktion auch in den Randstellen a und b stetig genannt, wenn dort die links- bzw. rechtsseitigen Limites existieren und wenn sie gleich dem entsprechenden Funktionswert sind:

$$\lim_{x \to a+\delta} f(x) = f(a), \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to b-\delta} f(x) = f(b)$$

Aufgabe 2:

Prüfen Sie ob die Funktion $y = f(x)$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist

$$f(x) = -x^2 + 2, \qquad D_f = [-2, 2]$$

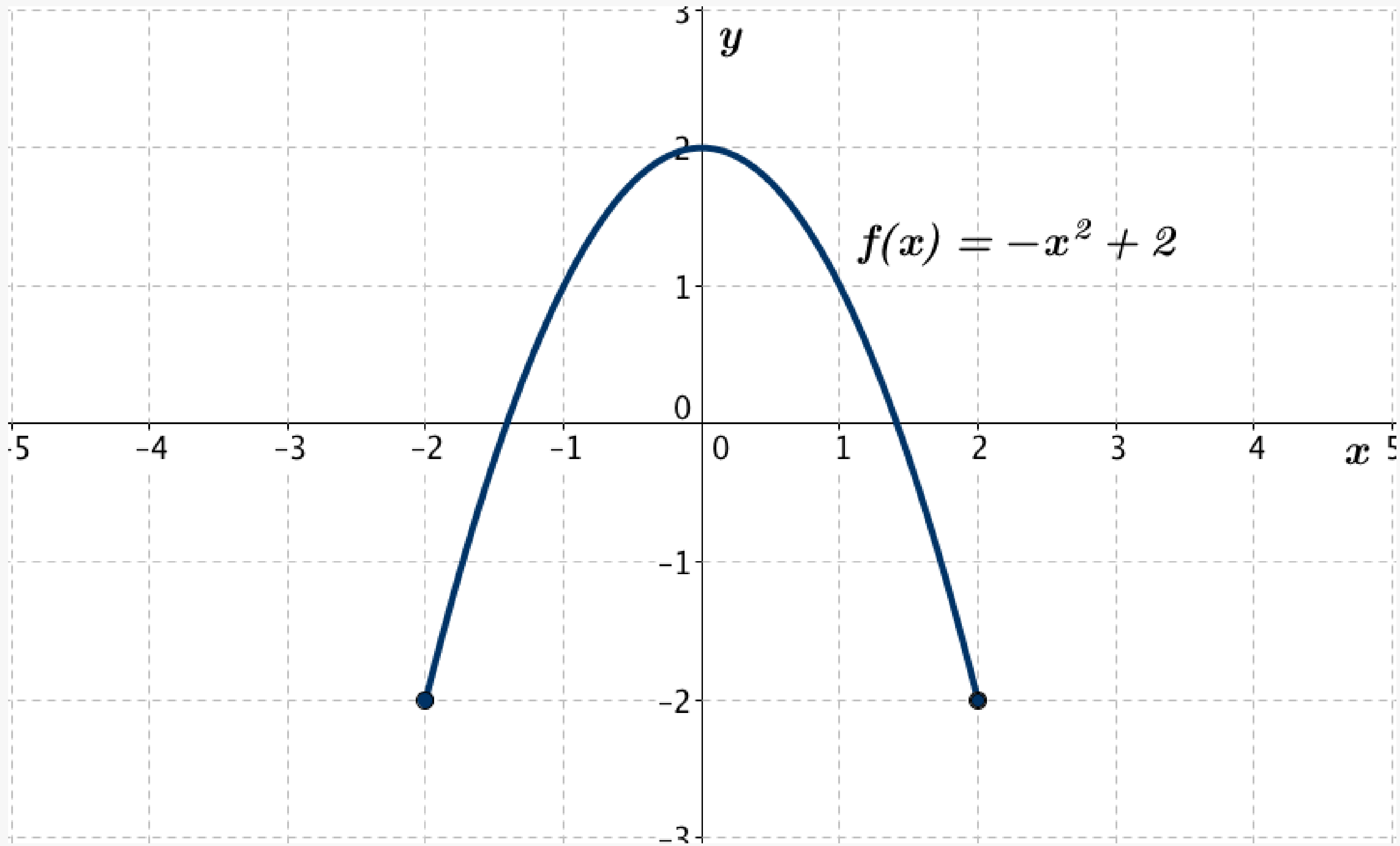

Abb. A2: Die Funktion der Aufgabe 2

Die Funktion $y = f(x)$ ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches [-2, 2] stetig. auch an den Randstellen $x = -2$ und $x = 2$, wo sie rechtsseitig bzw. linksseitig stetig ist.

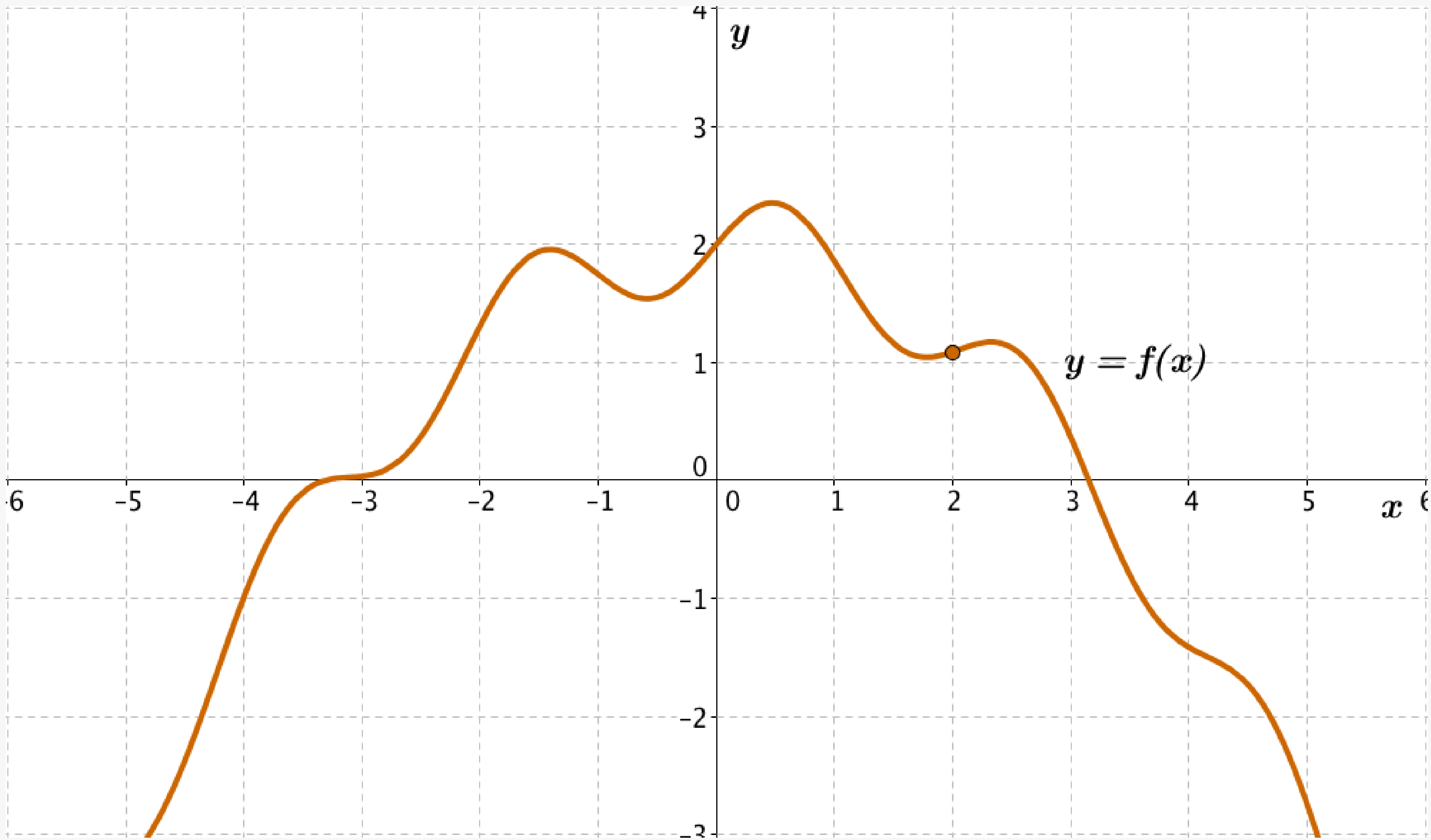

Abb. B1: Stetigkeit einer Funktion an der Stelle $x = 2$

Die Funktion $y = f(x)$ ist an der Stelle $x = 2$ stetig.

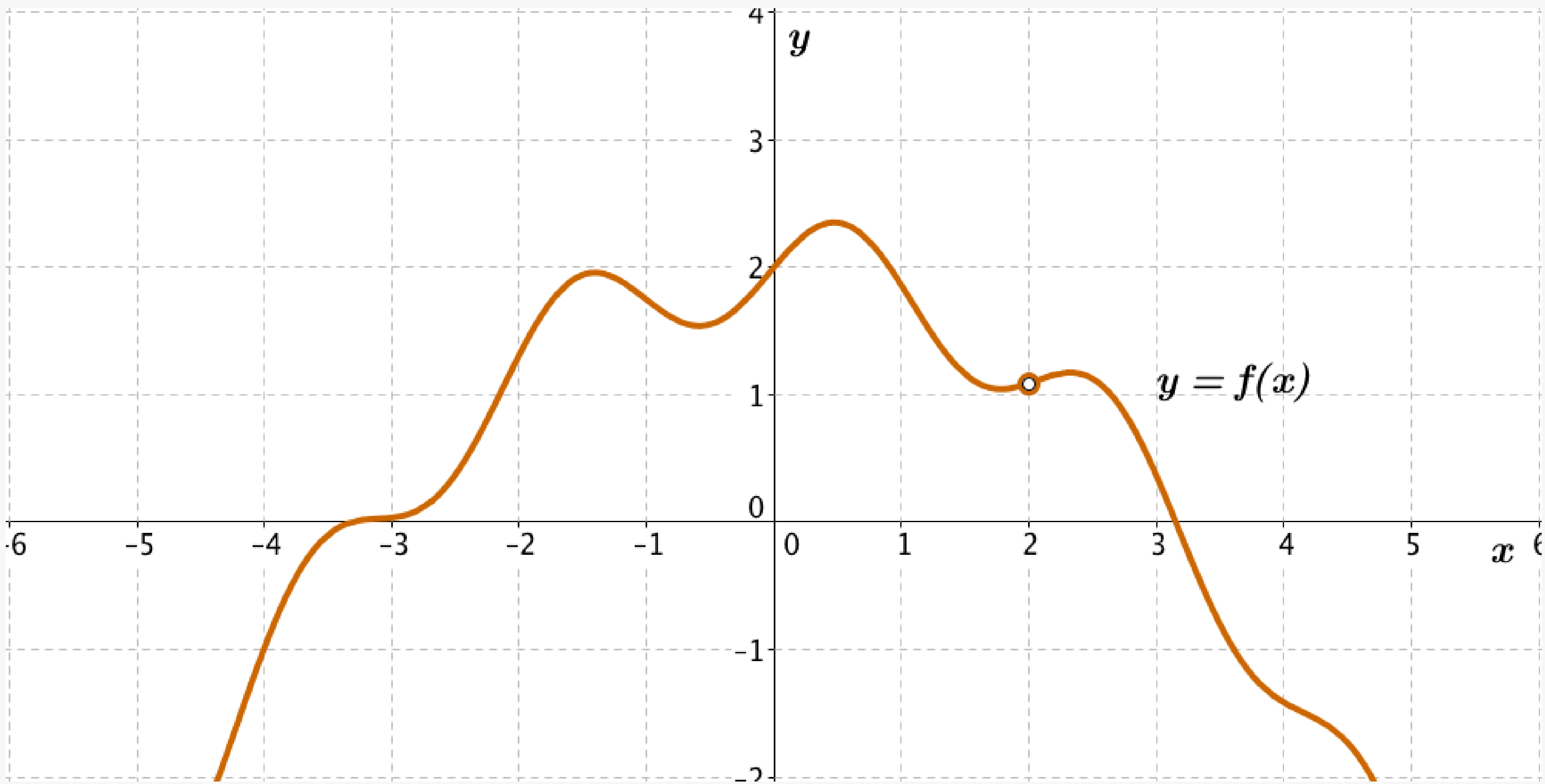

Abb. B2: Stetigkeit einer Funktion an der Stelle $x = 2$

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = 2$ einen Grenzwert, ist aber an dieser Stelle nicht definiert. Die Funktion ist unstetig. Durch eine neue Festlegung $f(2) = 1.1$ kann die Funktion zu einer an der Stelle $x = 2$ stetigen Funktion fortgesetzt werden. Die Unstetigkeitsstelle $x = 2$ ist hebbar.

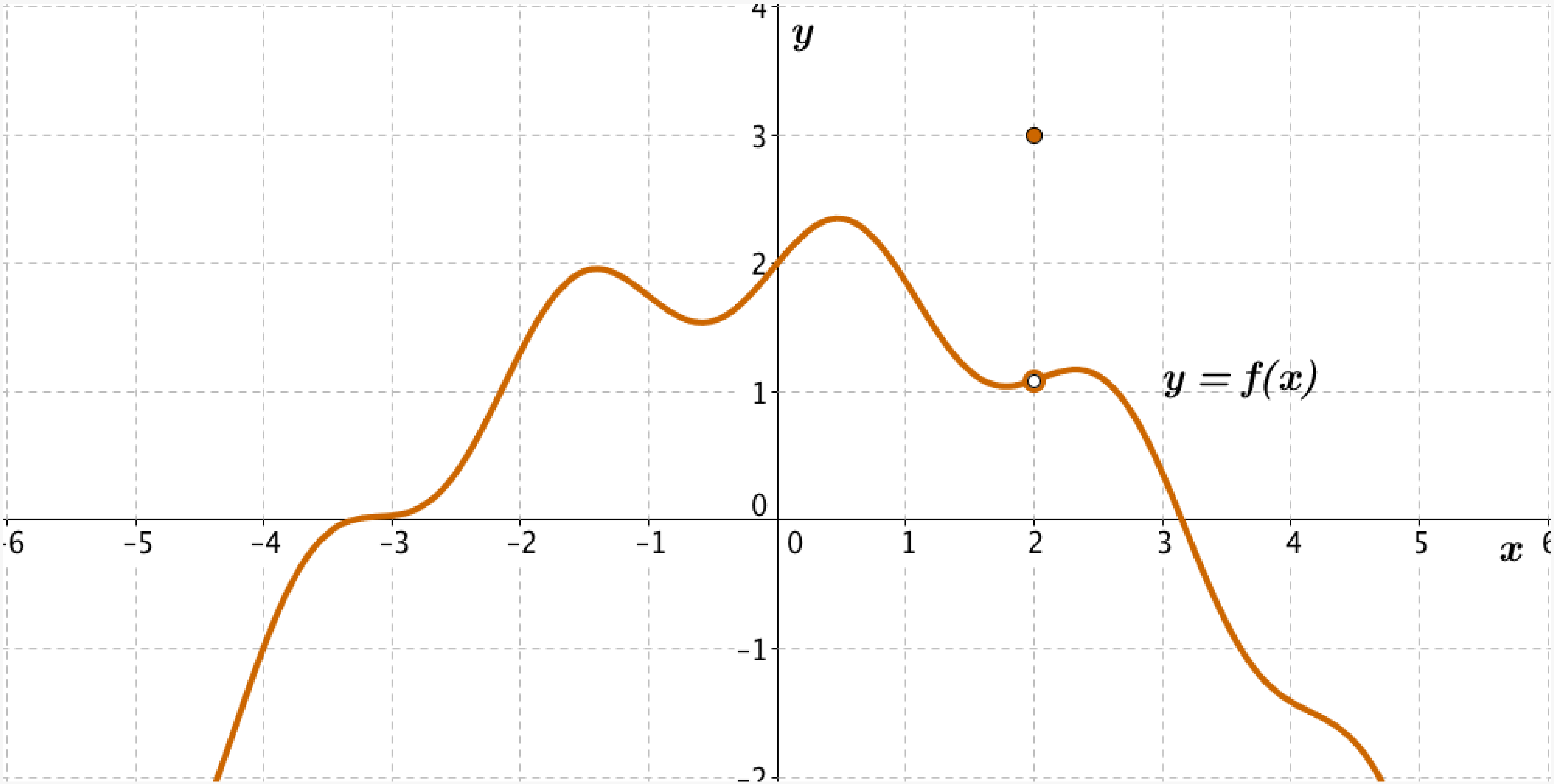

Abb. B3: Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x = 2

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = 2$ einen Grenzwert und ist an dieser Stelle definiert. Der Grenzwert und der Funktionswert sind nicht gleich. Durch eine neue Festlegung $\mathrm{f}(2) = 1.1$ kann die Funktion zu einer an der Stelle $x = 2$ stetigen Funktion fortgesetzt werden. Die Unstetigkeitsstelle $x = 2$ ist hebbar.

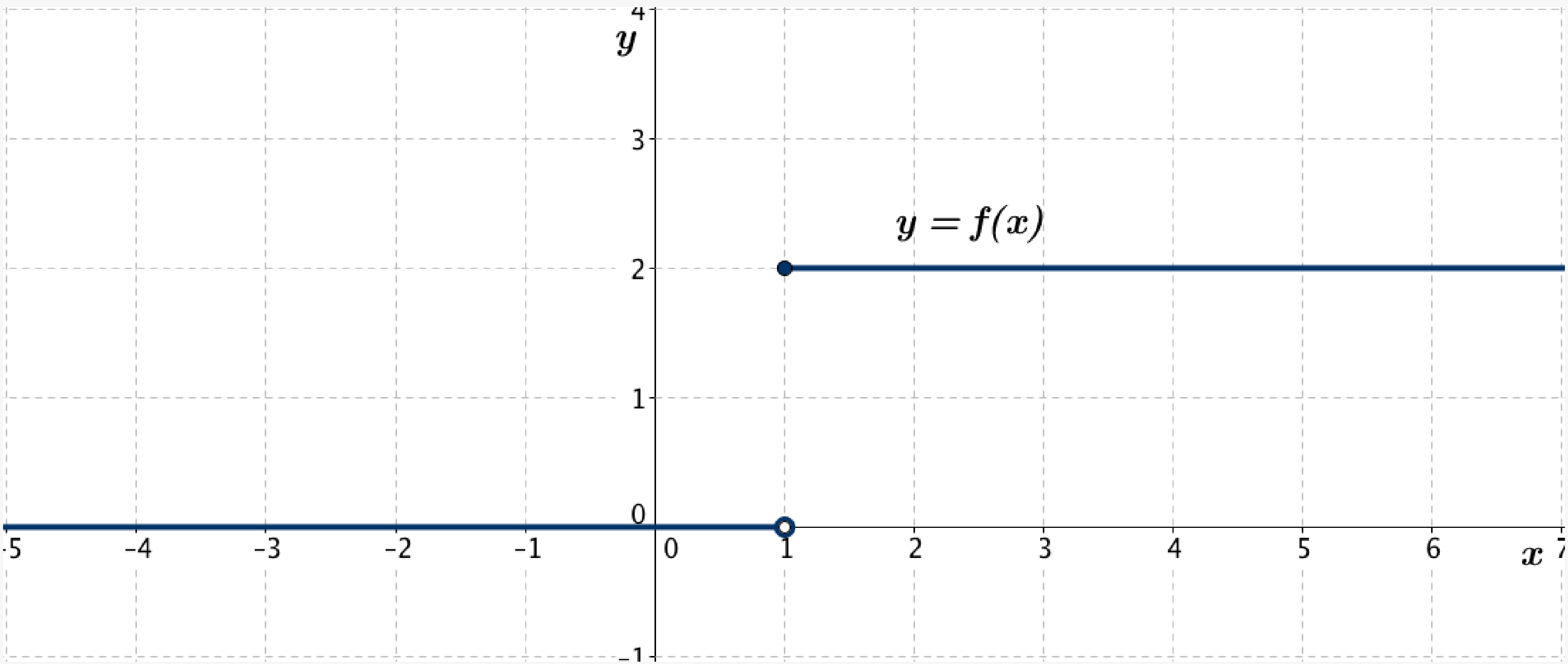

Abb. B4: Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x = 1

Die Funktion $y = f\,(x)$ besitzt an der Stelle $x = 2$ keinen Grenzwert. Die Stelle $x = 2$ ist eine Sprungstelle. Die einseitigen Grenzwerte existieren, haben aber verschiedene Werte. Die Funktion ist unstetig.

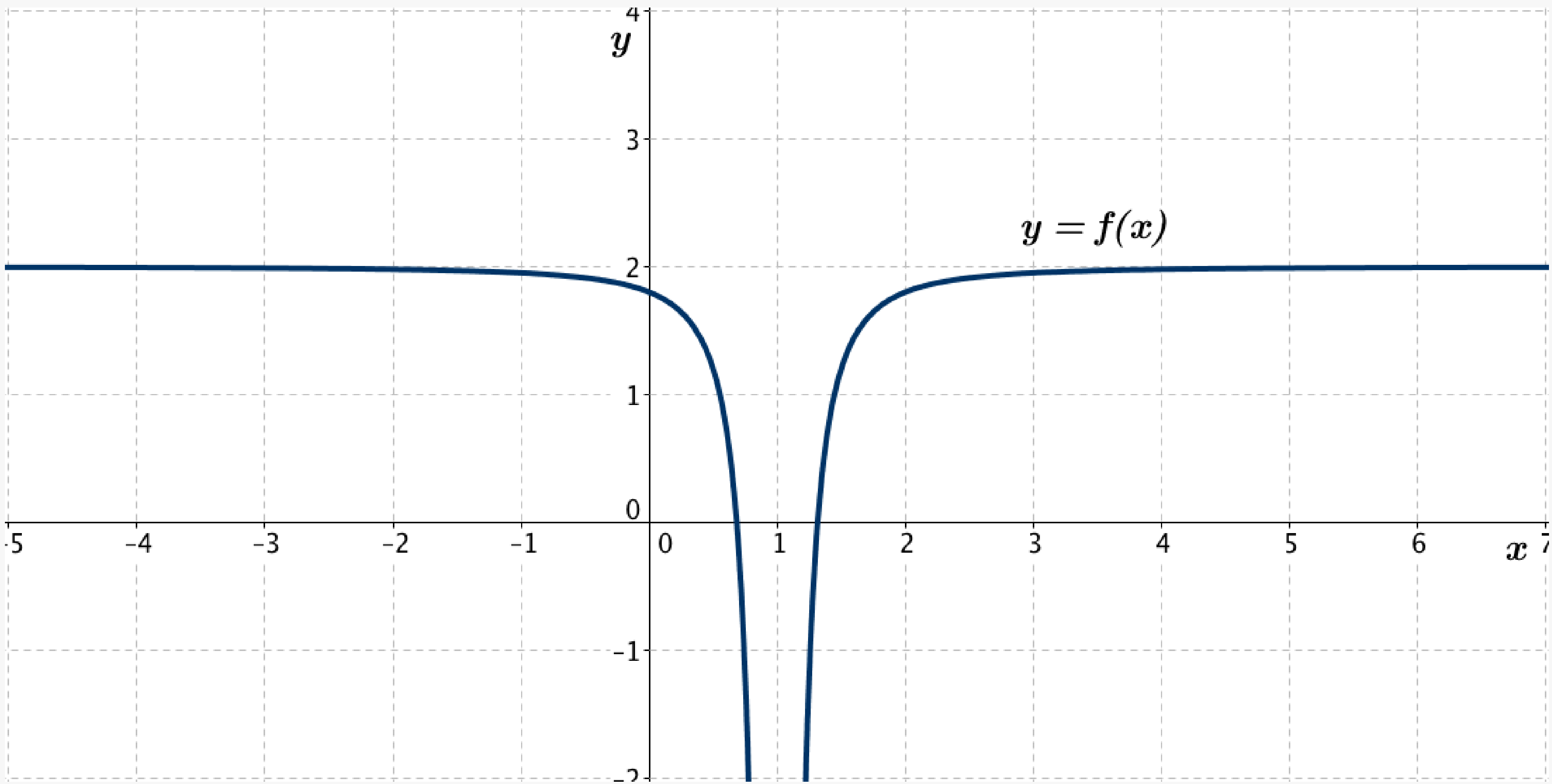

Abb. B5: Stetigkeit einer Funktion an der Stelle $x = 1$

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = 1$ keinen Grenzwert. Die Stelle $x = 1$ ist eine Polstelle. Die Funktion ist an dieser Stelle unstetig.

Bestimmen Sie an welchen Stellen die abgebildeten Funktionen unstetig sind.

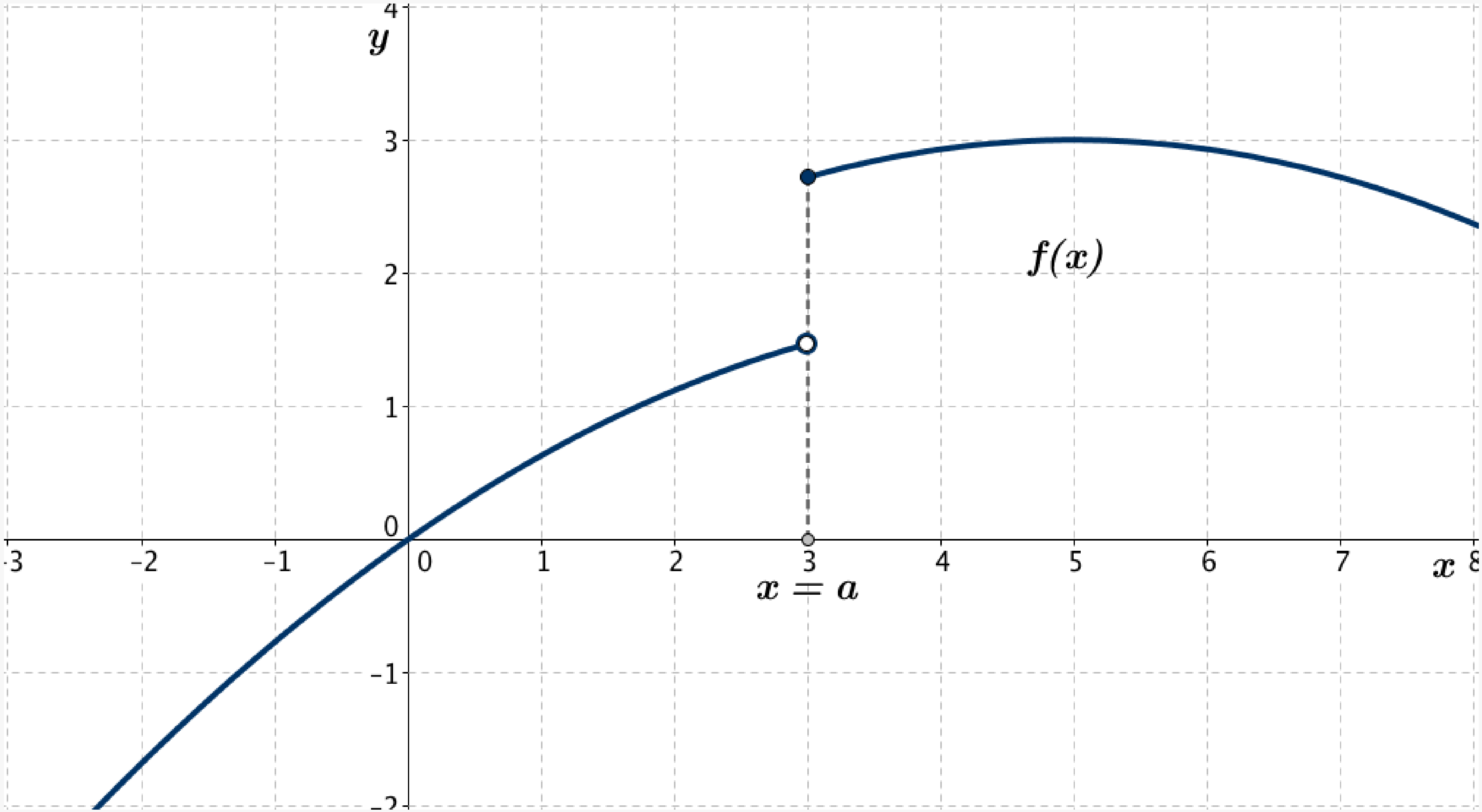

Abb. 3-1a

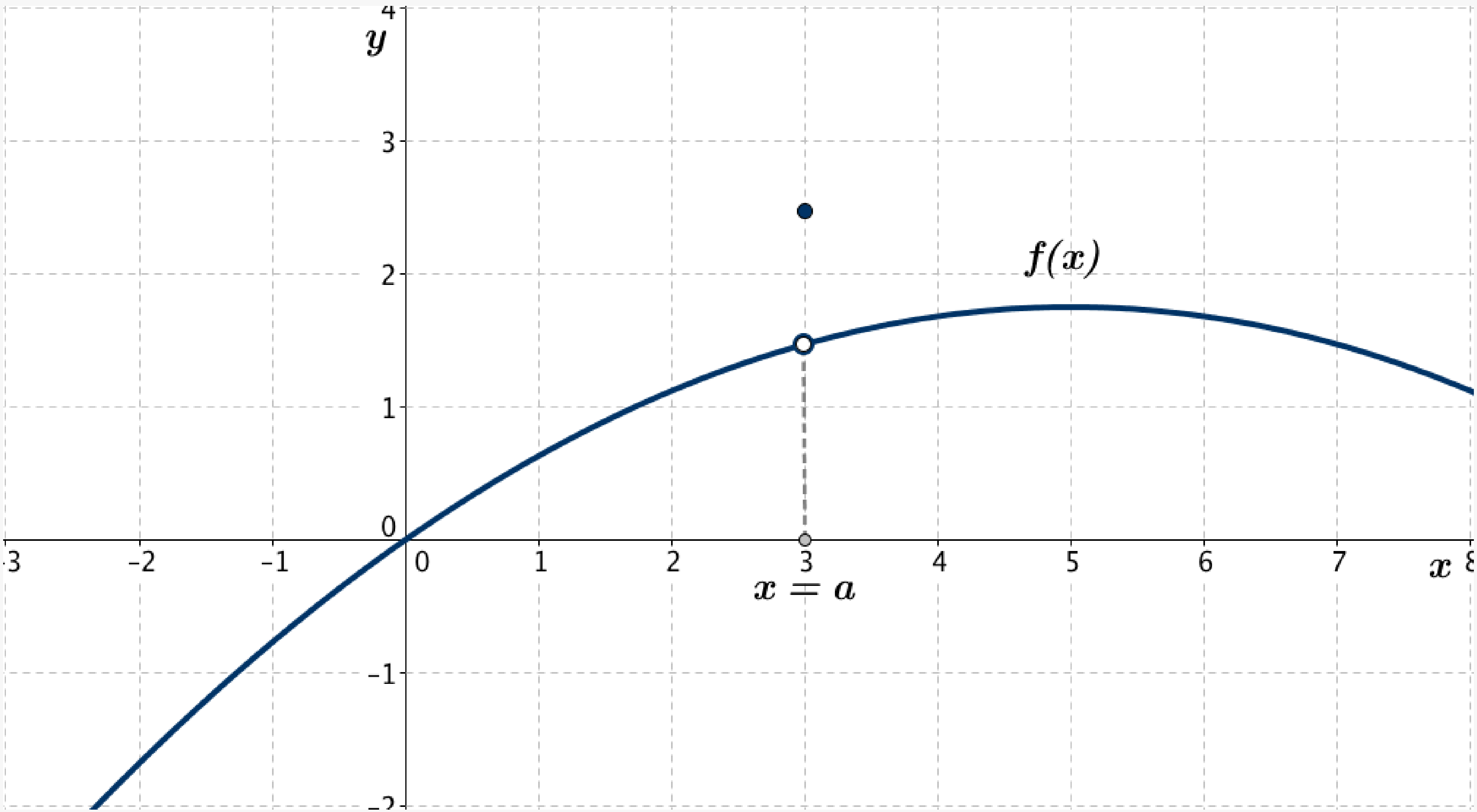

Abb. 3-2a

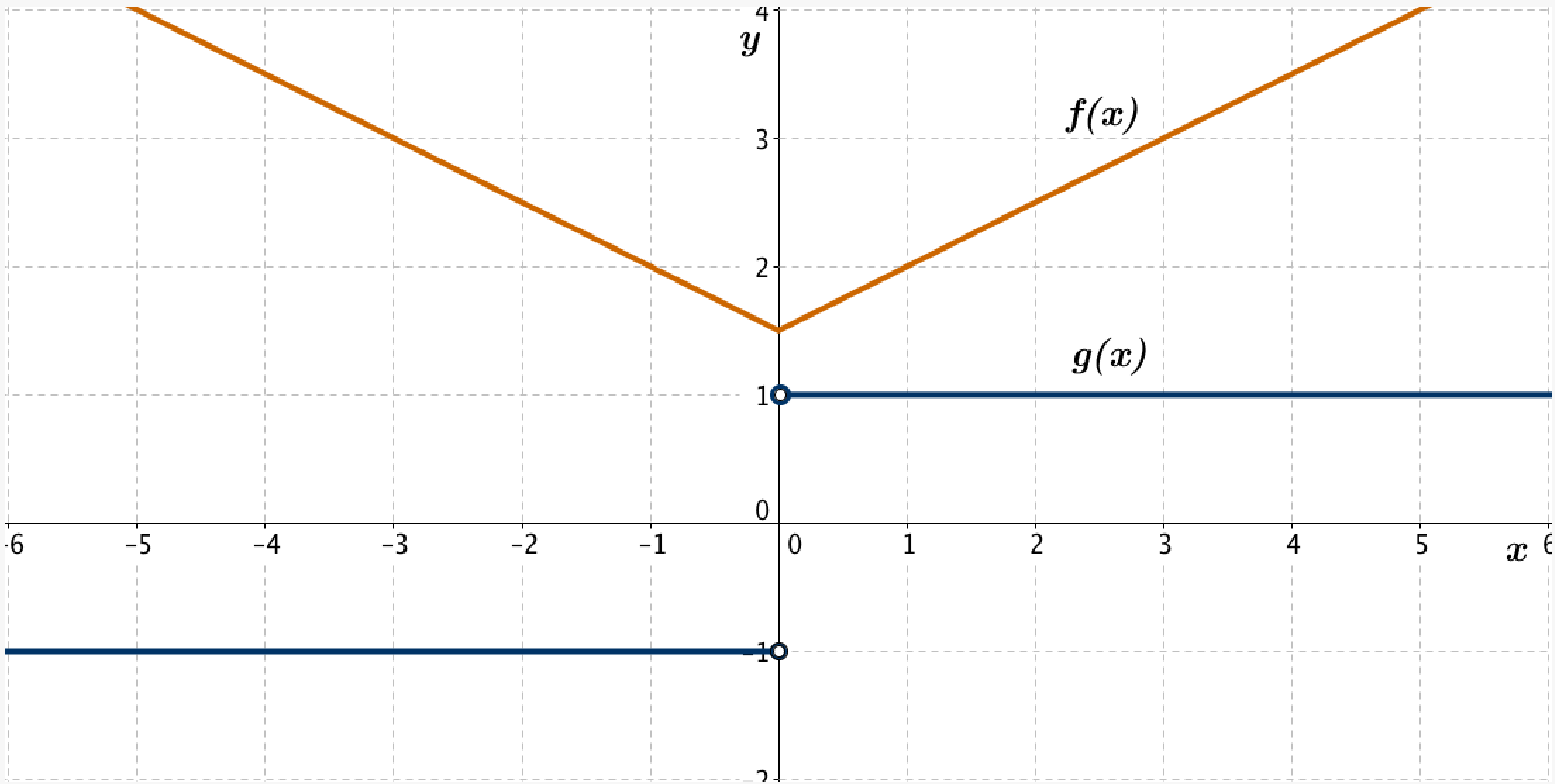

Abb. 3-3a

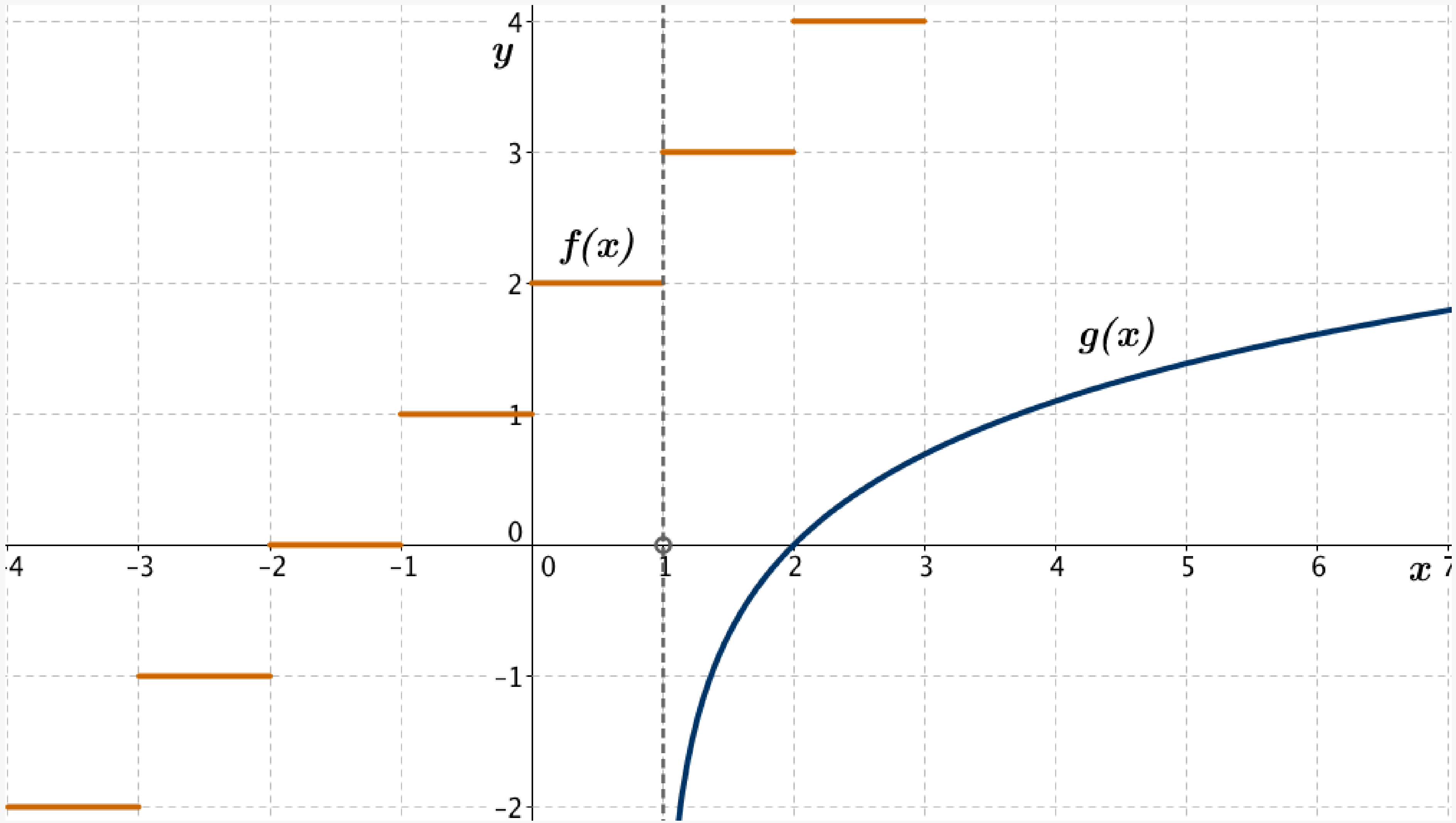

Abb. 3-4a

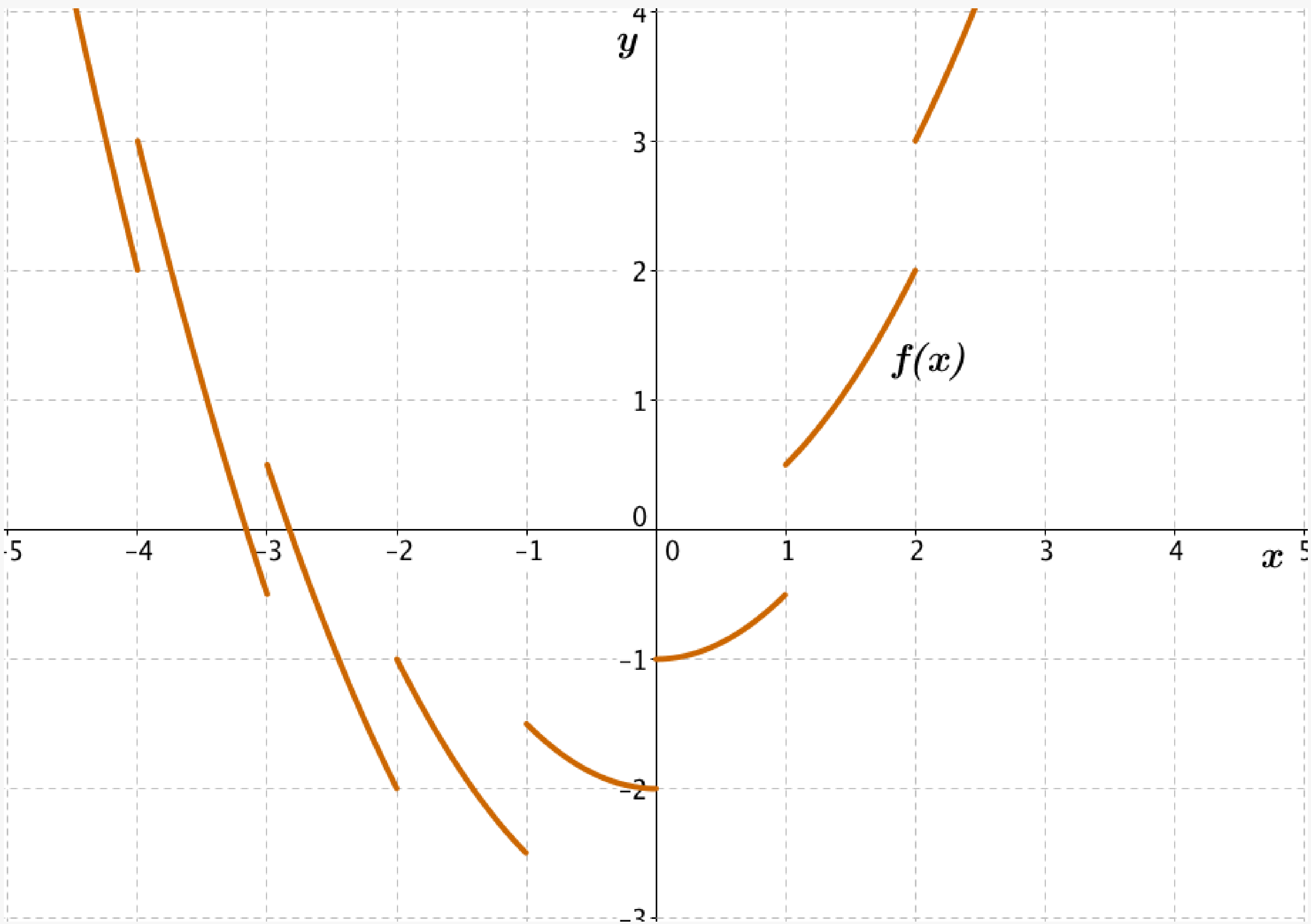

Abb. 3-5a

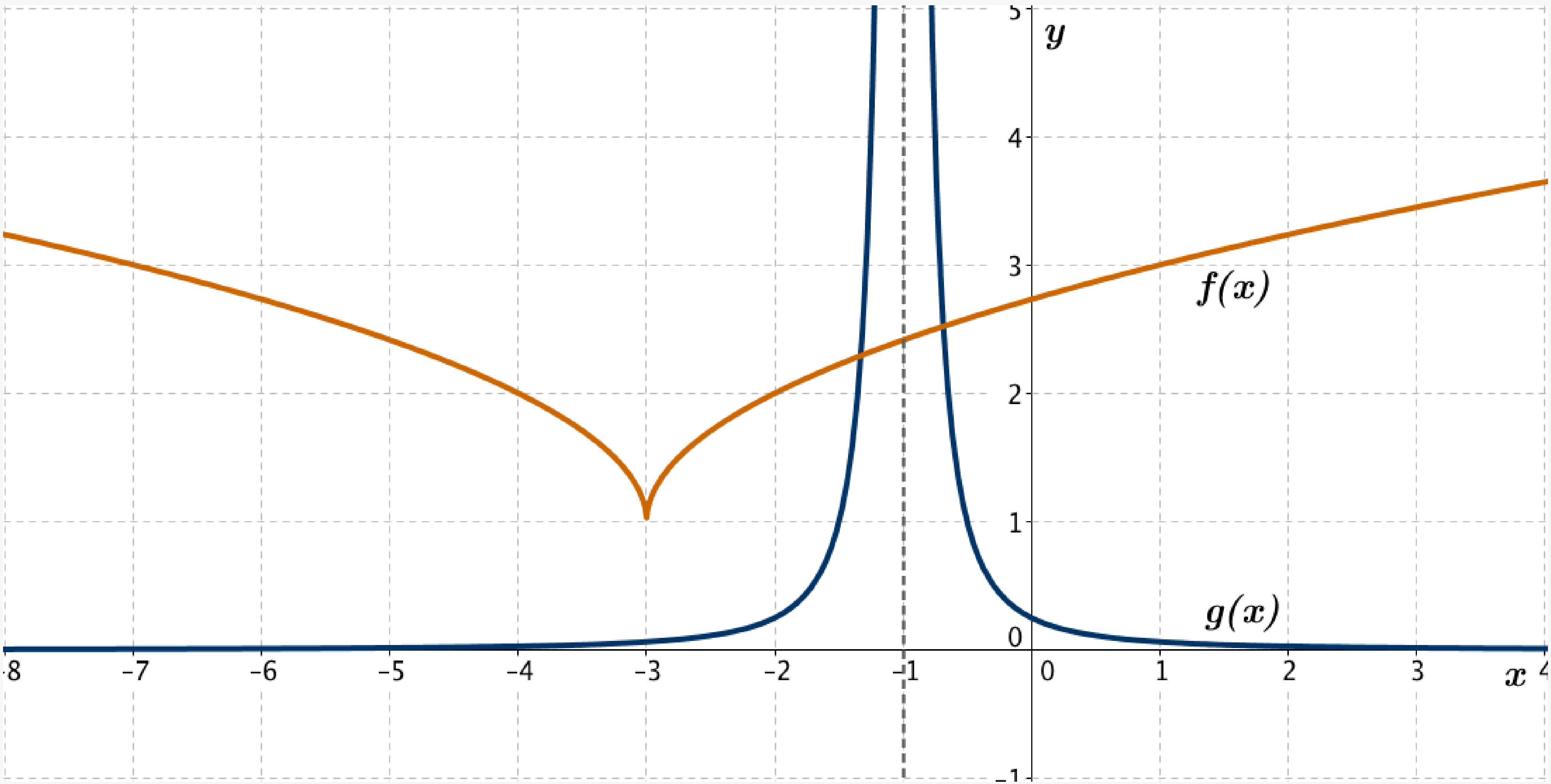

Abb. 3-6a

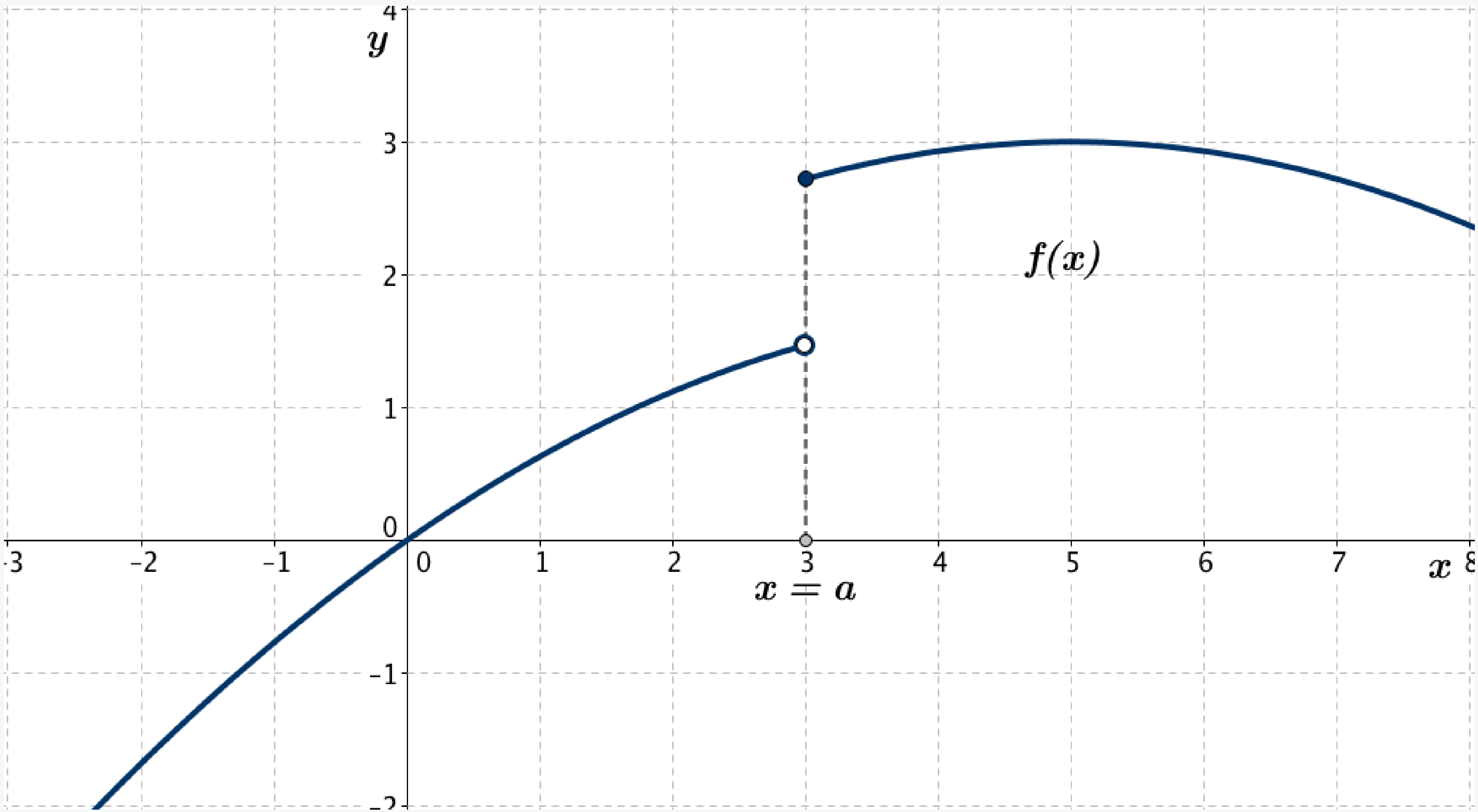

Abb. 3-1b: Graphische Darstellung einer im Punkt x = a unstetigen Funktion

Die Funktion $y = f(x)$ ist im Punkt $x = a$ unstetig, weil sie dort keinen Grenzwert besitzt.

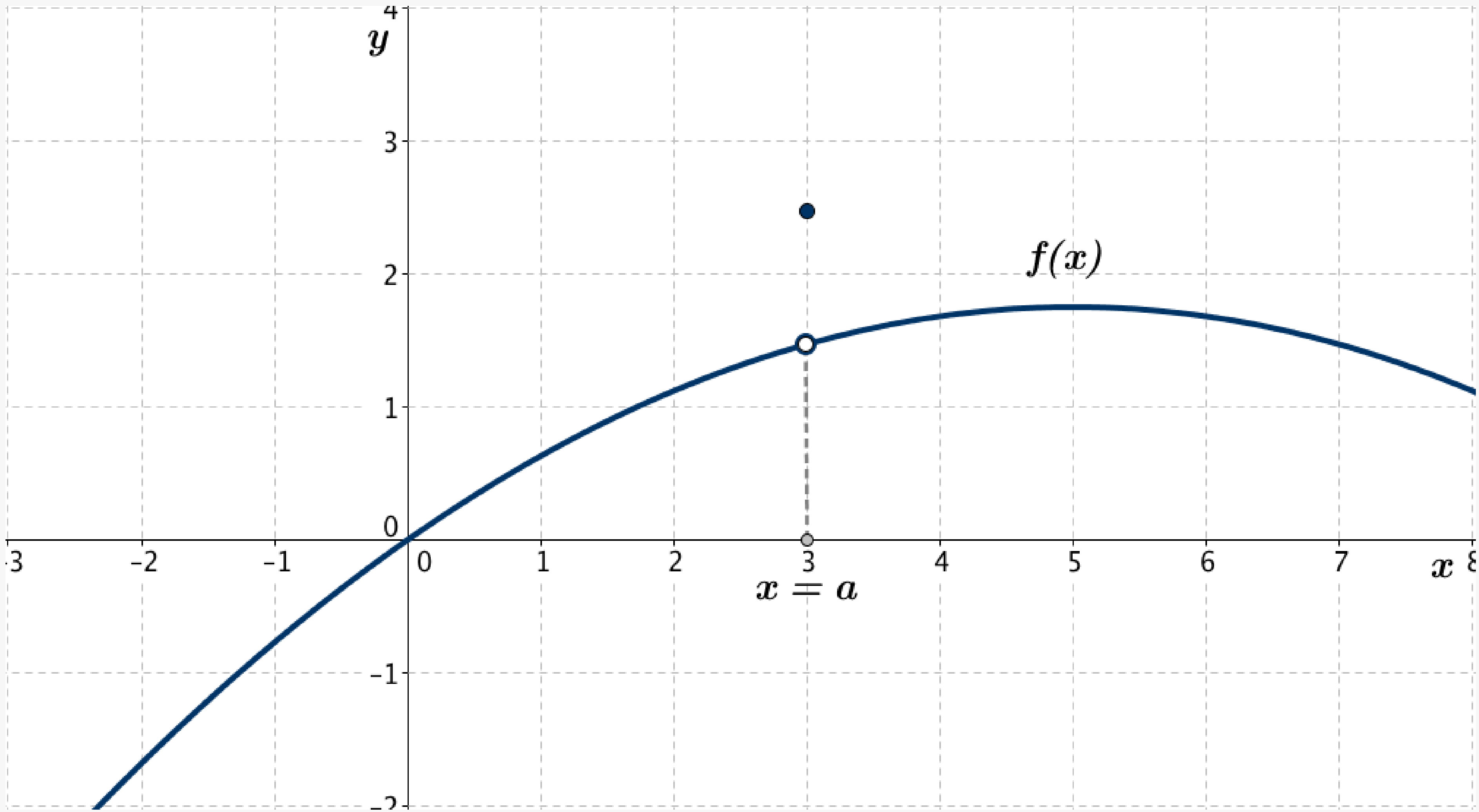

Abb. 3-2b: Graphische Darstellung einer im Punkt $x = a$ unstetigen Funktion

Die Funktion $y = f(x)$ hat im Punkt $x = a$ einen Grenzwert, aber sie ist in diesem Punkt unstetig, weil ihr Grenzwert und ihr Funktionswert nicht übereinstimmen.

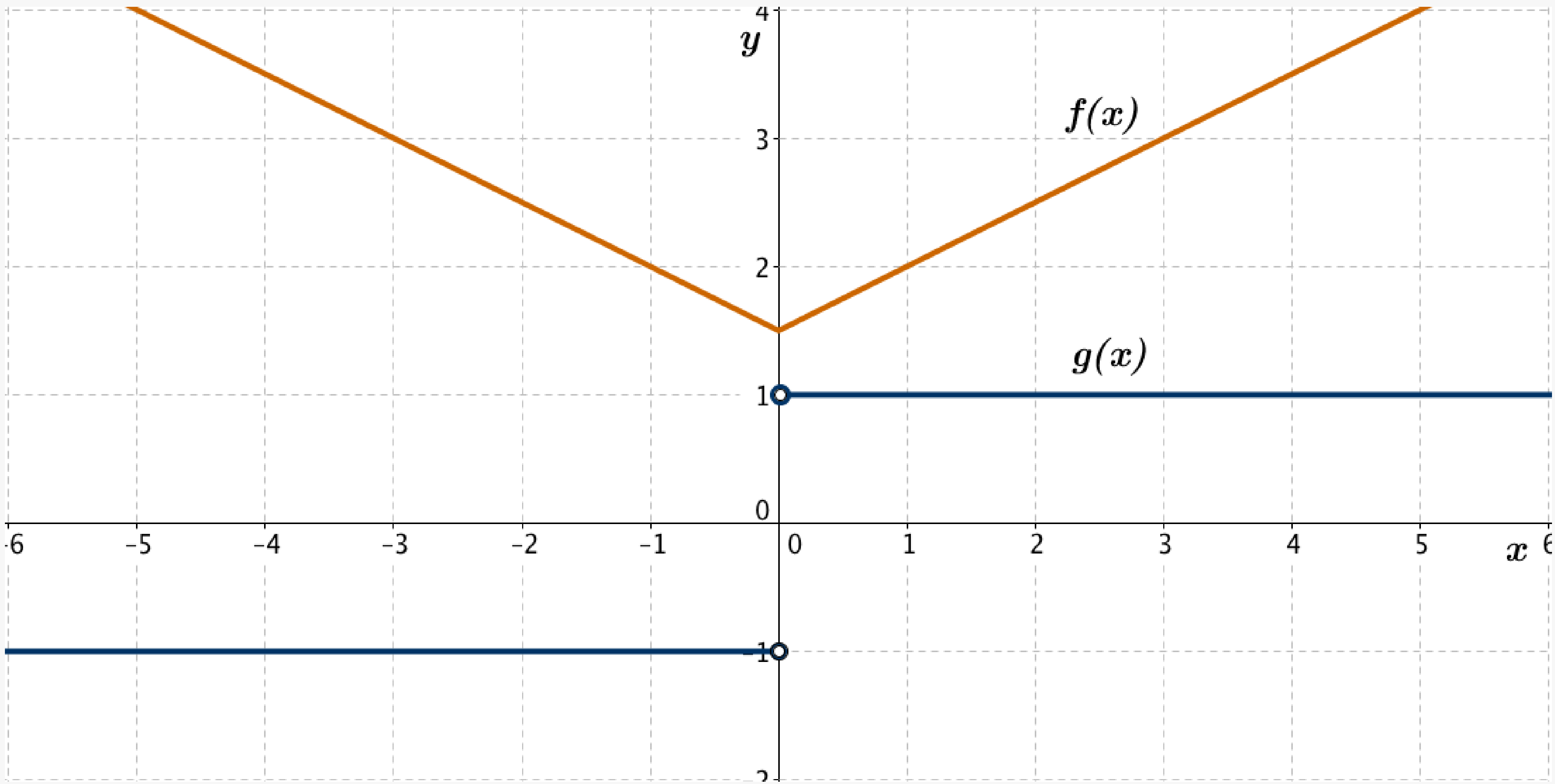

Abb. 3-3b: Graphische Darstellung der Funktionen f (x) und g (x)

Die Funktion $y = f(x)$ hat keine Unstetigkeitsstellen, die Funktion $y = g(x)$ ist im Punkt $x = 0$ unstetig, weil sie in diesem Punkt keinen Grenzwert hat.

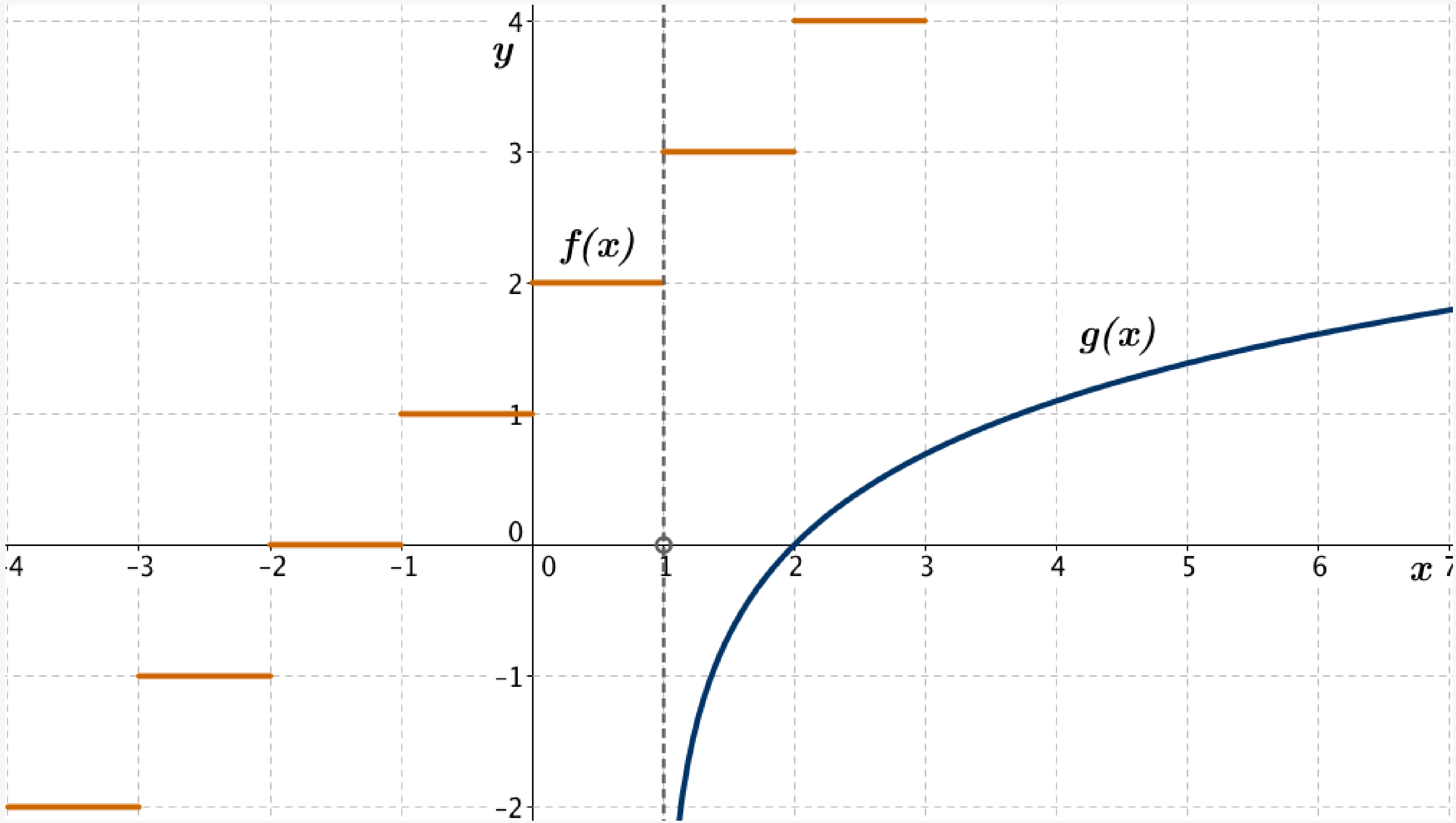

Abb. 3-4b: Graphische Darstellung der Funktionen f (x) und g (x)

Die Funktion $y = f\,(x)$ hat Unstetigkeitsstellen in den Punkten $x = \ ...\ -5, -4, -3, \ ...\ , 4, 5, \ ...\ ,$ weil sie in diesen Punkten keinen Grenzwert hat. Die Funktion $y = g\,(x)$ ist nur im Punkt $x = 1$ unstetig, weil sie in diesem Punkt keinen Grenzwert hat.

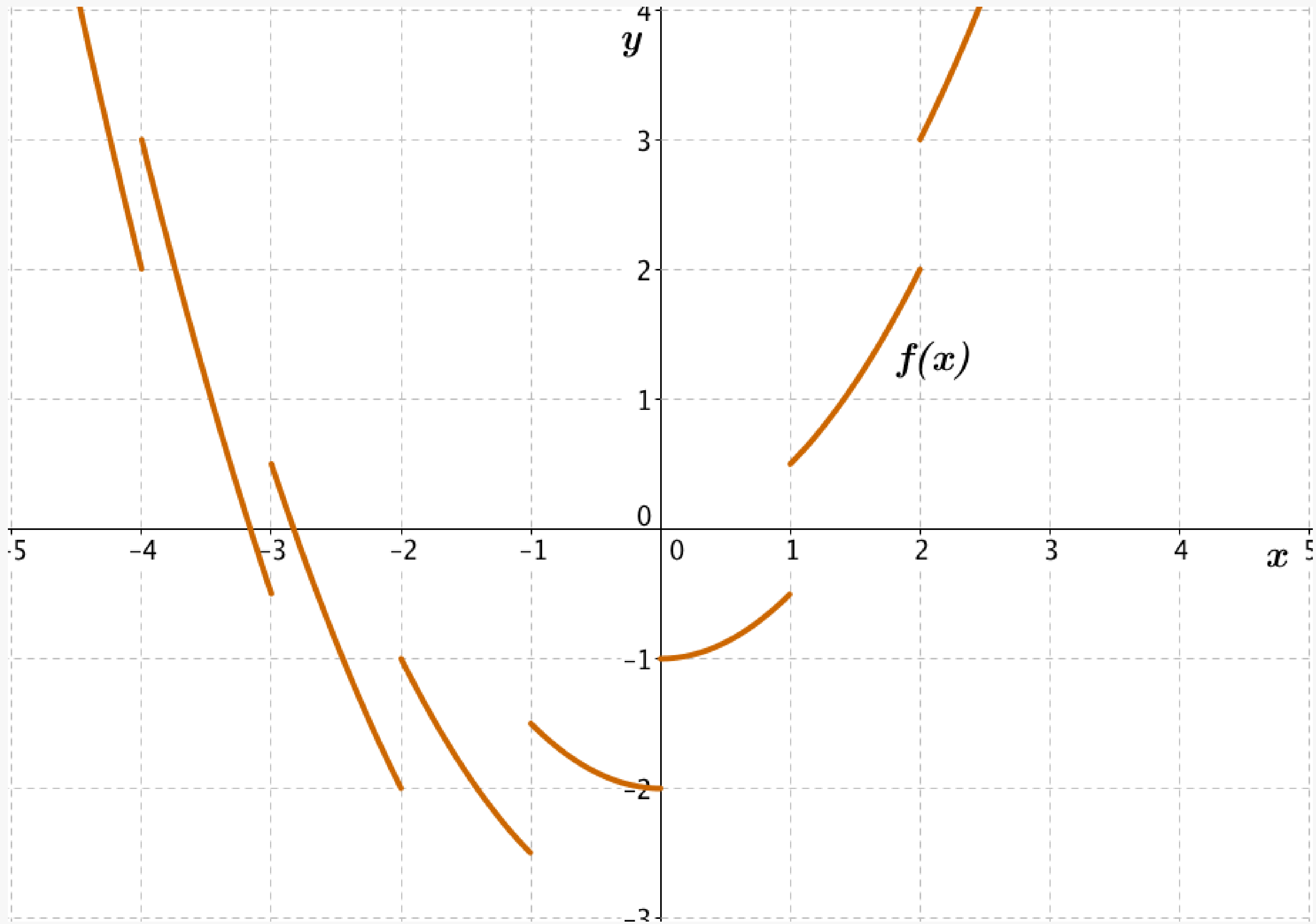

Abb. 3-5b: Graphische Darstellung der Funktion f (x)

Die Funktion $y = f(x)$ hat Unstetigkeitsstellen bei ganzen Werten von x.

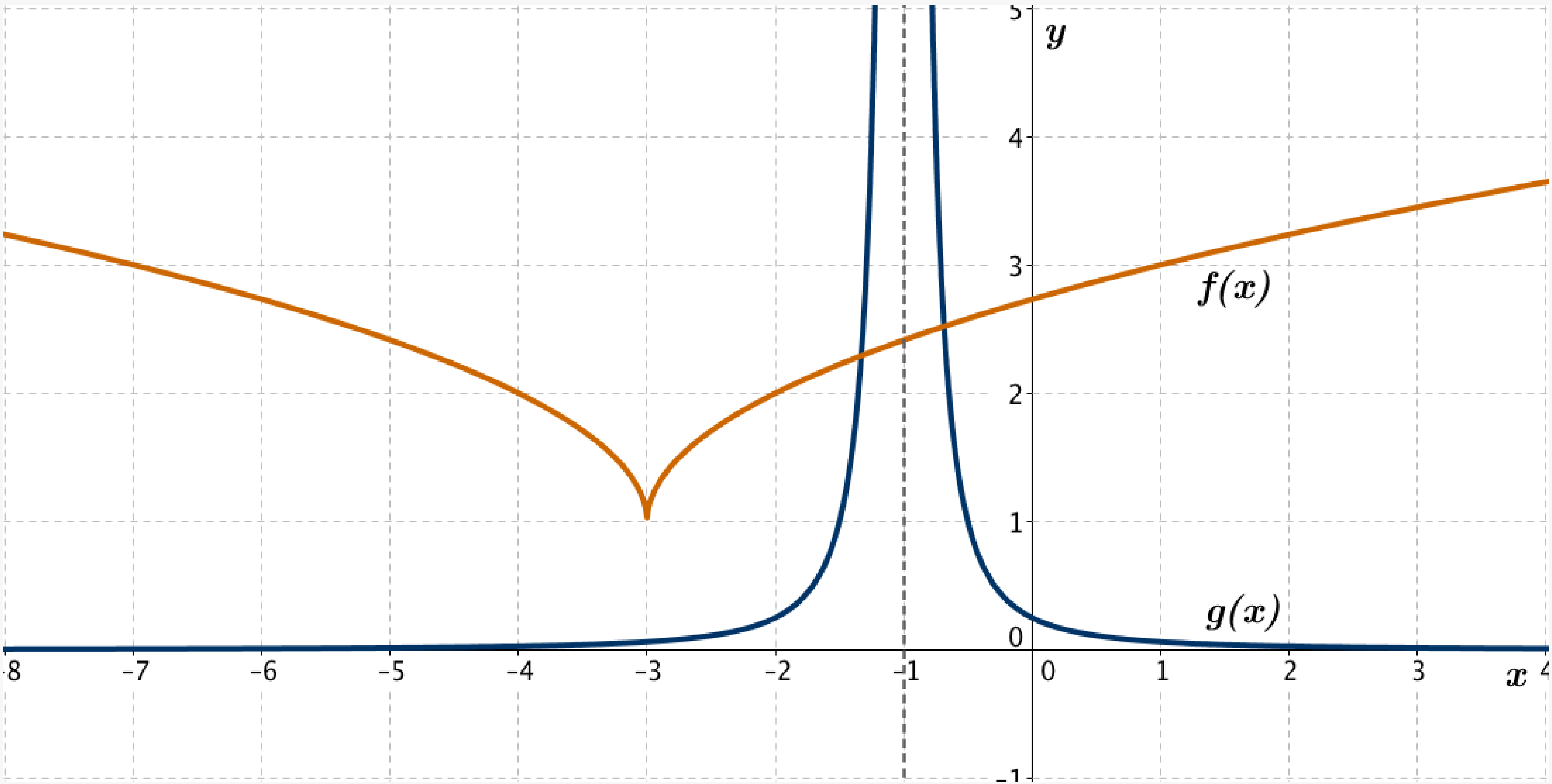

Abb. 3-6b: Graphische Darstellung der Funktionen f (x) und g (x)

Die Funktion $y = f(x)$ ist stetig im Punkt $x = -3$, die Funktion $y = g(x)$ ist im Punkt $x = -1$ unstetig, weil sie in diesem Punkt keinen Grenzwert hat.