http://www.flickr.com/photos/ishida/1805420435/in/pool-streetlampsoftheworld

Darstellungsformen von Funktionen

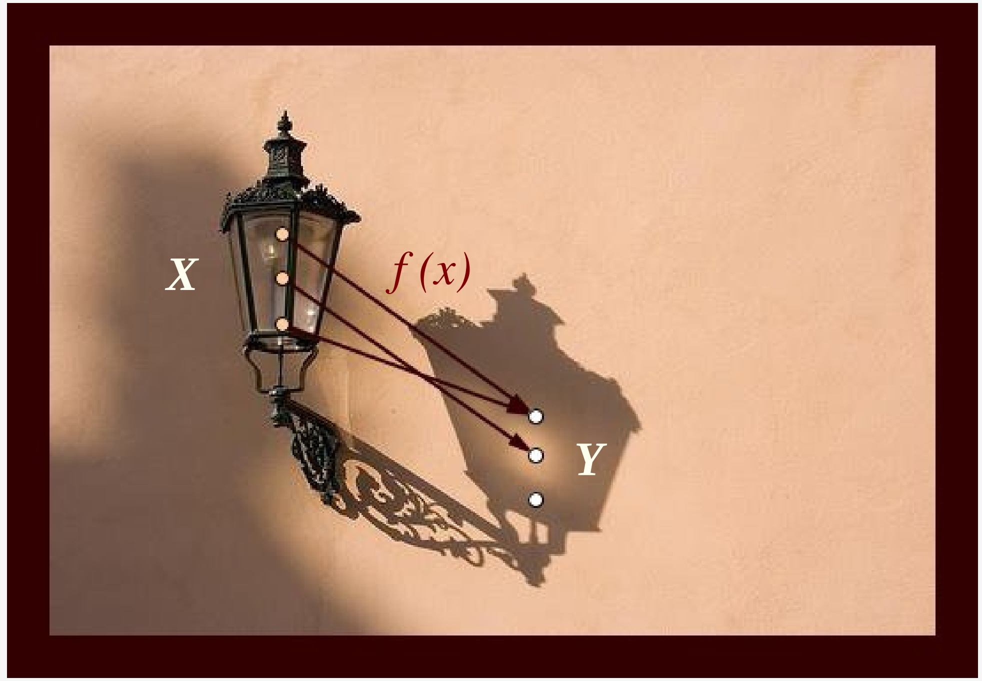

Abb. 1: Konzept einer Funktion $f(x)$: Abbildung einer Menge auf die andere

Die Situation, dass verschiedene Größen durch eine Gleichung in Zusammenhang stehen, die nicht von der Form $y = f(x)$ ist, tritt sehr häufig auf. Es stellt sich die Frage, unter welchen Umständen durch eine solche Gleichung eine Funktion definiert wird, die eine Größe auf eine andere abbildet. In einem solchen Fall sagen wir, dass die Funktion durch die Gleichung implizit definiert wird.

Eine Funktion ist in implizit‌er Form gegeben, wenn die Funktionsgleichung nach keiner der beiden Variablen x und y aufgelöst ist. So ist beispielsweise

$$2x - y + 1 = 0$$

die implizite Form einer linearen Funktion. Die Gleichung

$$y^2 - x - 2 = 0$$

stellt keine Funktionsgleichung $y = f(x)$ dar, denn wenn diese Gleichung nach der abhängigen Variablen y aufgelöst wird, ergibt sich keine eindeutige Zuordnungsvorschrift:

$$y = \pm\sqrt{x + 2}$$

An diesem Beispiel werden wir uns wesentliche Aspekte bei der impliziten Definition einer Funktion klarmachen.

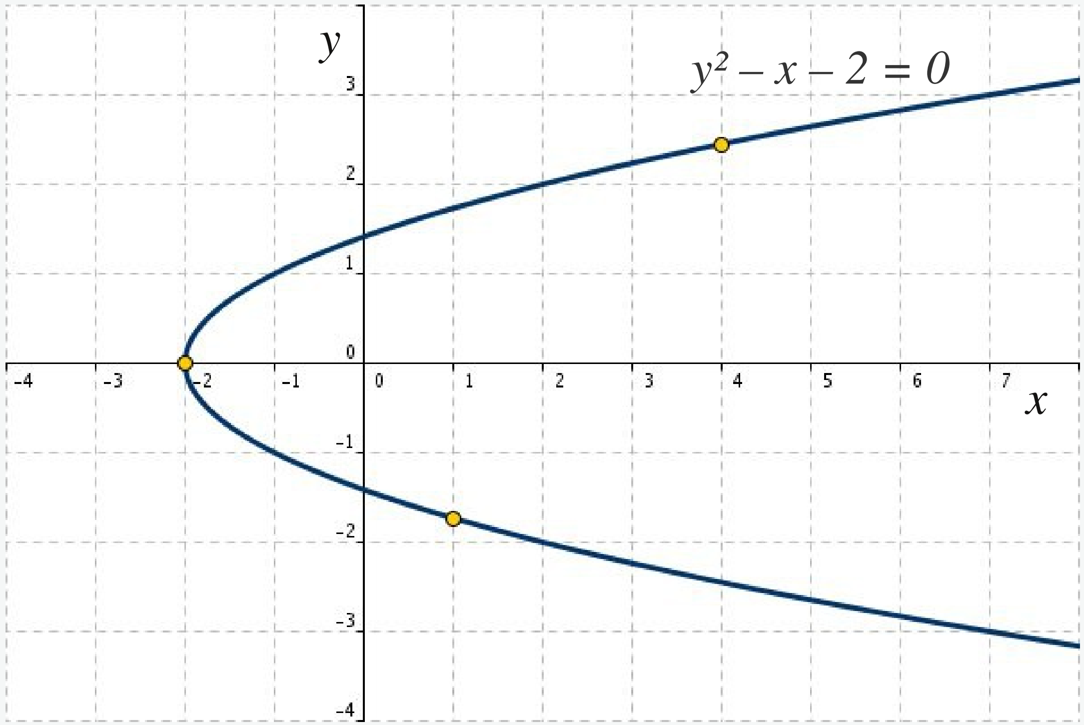

Abb. 2-1: Graphische Darstellung der durch die Gleichung $F(x, y) = y^2 - x - 2 = 0$ *implizit gegebenen Funktion*

Durch die Gleichung $y^2 - x - 2 = 0$ ist eine Teilmenge aller Punkte der x,y-Ebene definiert, die diese Gleichung erfüllen. Beispiele sind $(-2, 0)$, $(4, \sqrt{6})$ oder $(1, -\sqrt{3})$.

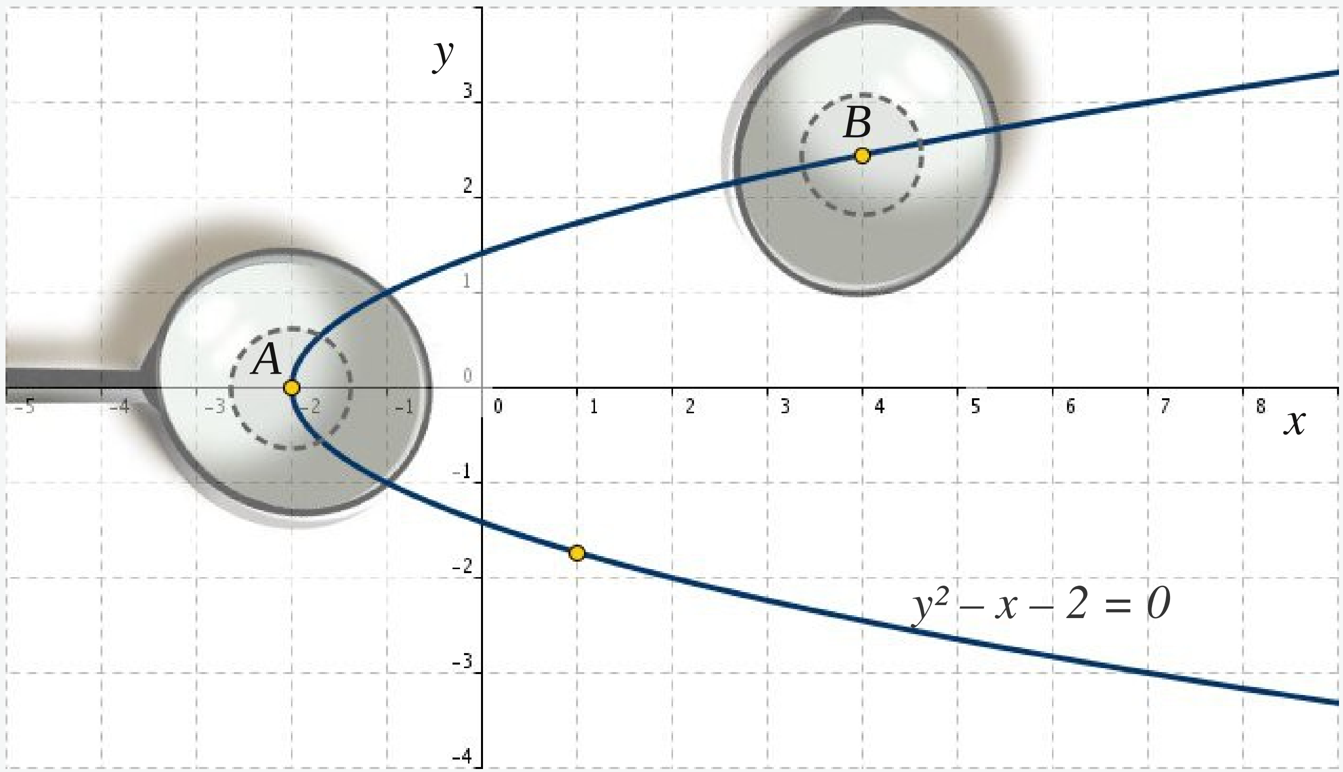

Abb. 2-2: In der Abbildung der implizit gegebenen Funktion $F(x, y) = y^2 - x - 2 = 0$ werden zwei Bereiche vergrößert

Im Folgenden werden zwei Bereiche mit den Mittelpunkten A und B vergrößert und analysiert.

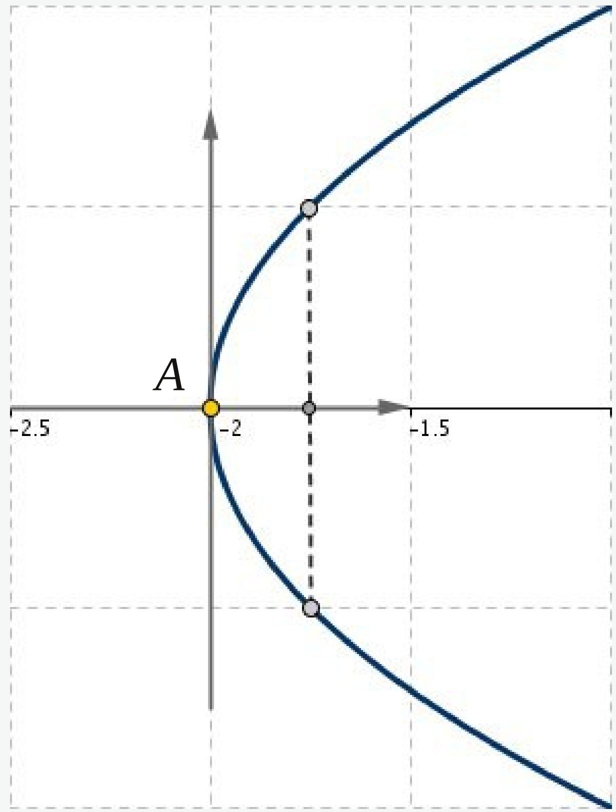

Abb. 2-3: Der vergrößerte Bereich von $F(x, y) = y^2 - x - 2 = 0$ in der Umgebung des Punktes A

Wir betrachten die Umgebung des Punktes $A = (-2, 0)$. In dieser Darstellung haben wir es sicher nicht mit einer Funktion $y = f(x)$ zu tun. Die Kurve verläuft so, dass manchen x zwei verschiedene y-Werte zugeordnet sind.

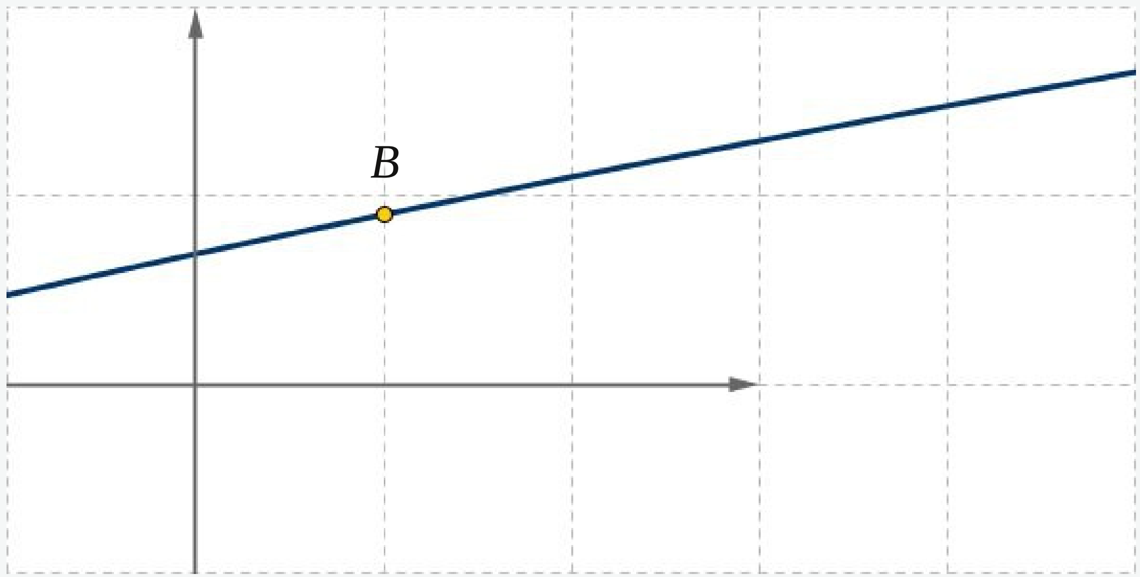

Abb. 2-4: Der vergrößerte Bereich von $F(x, y) = y^2 - x - 2 = 0$ in der Umgebung des Punktes B

Wenn man die Vergrößerung der Umgebung des Punktes $B = (4, \sqrt{6})$ betrachtet, könnte man davon ausgehen, dass man den Graphen einer Funktion vor sich hat.

Implizit definierte Funktionen und Relationen werden im Allgemeinen durch eine Gleichung vom Typ

$$F(x, y) = 0$$

gegeben.

Beispiele:

Kreis: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

Ellipse: $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Lemniskate: $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$

Jakob Bernoulli (1655-1705)

Eine Lemniskate ist die Figur, die als Symbol für Unendlichkeit und Unbegrenztheit bekannt ist. Mit dem Begriff "Lemniskate" wird meist nicht das Unendlichkeitssymbol, sondern eine geometrisch definierte Lemniskatenkurve bezeichnet. Die bekannteste dieser Kurven ist die Lemniskate von Bernoulli.

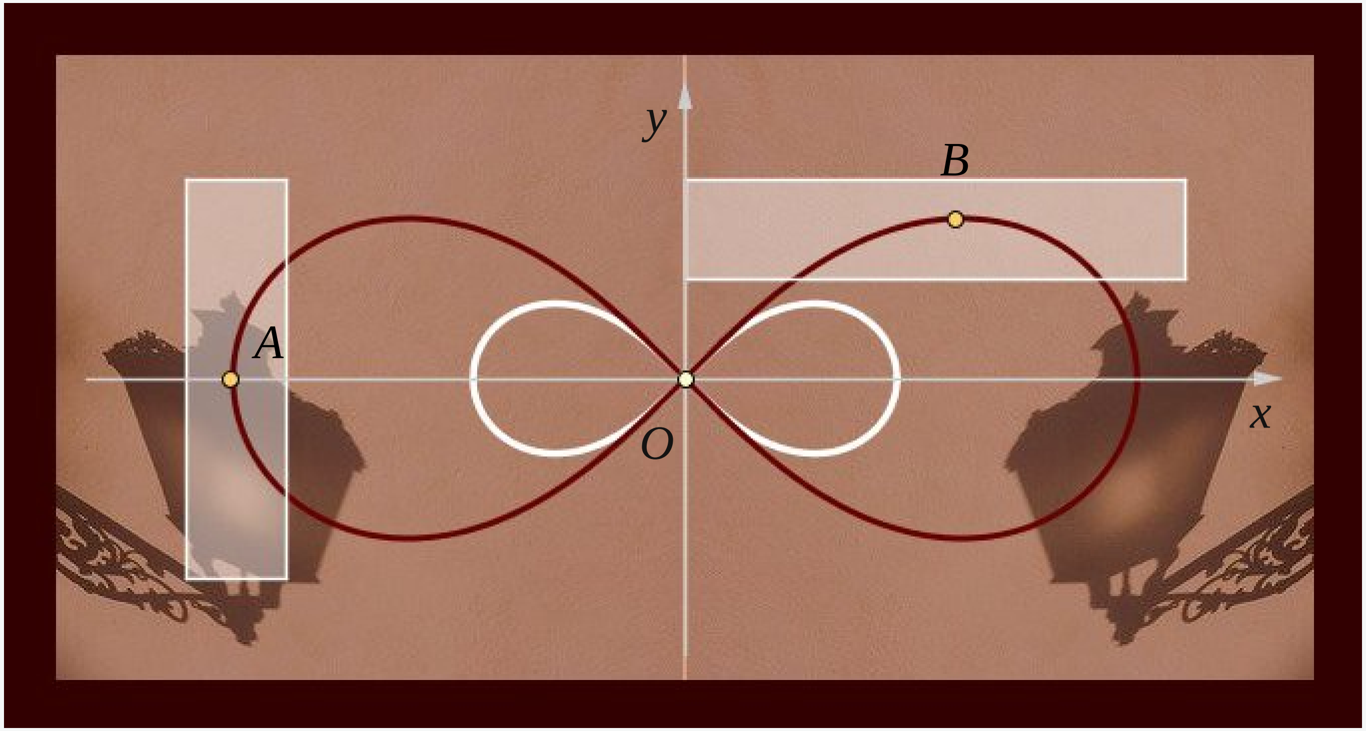

Abb. 3: Graphische Darstellung einer Lemniskate

Die Lemniskate von Bernoulli ist eine spezielle ebene, algebraische Kurve 4. Ordnung mit den Gleichungen:

Kartesische Koordinaten: $(x^2 + y^2)^2 = 2\,a^2\,(x^2 - y^2)$

Parametergleichung:

$$x = a\,\cos t\,\sqrt{2\cos(2\,t)}\,, \qquad y = a\,\sin t\,\sqrt{2\cos(2\,t)}$$

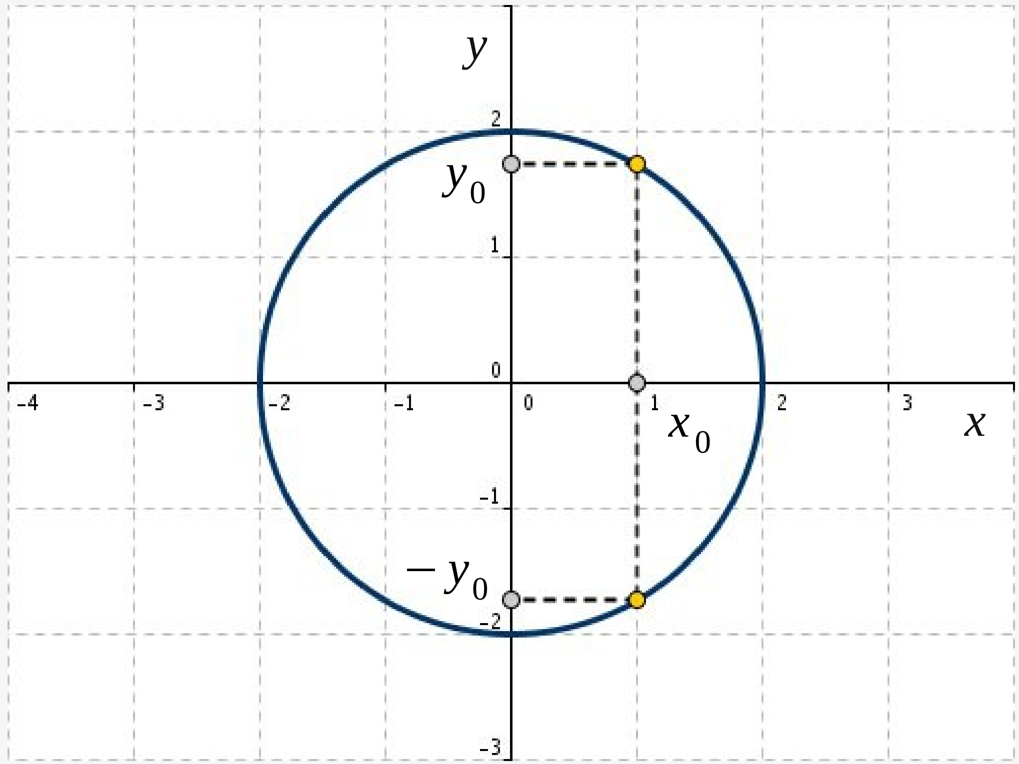

Abb. 4-1: Graphische Darstellung eines Kreises mit dem Radius 2

An der graphischen Darstellung erkennt man, dass die Zuordnung $x \to y$ nicht eindeutig ist. Durch die Gleichung sind implizit zwei Funktionen erklärt, was wir im Folgenden zeigen.

Implizite Darstellung: Beispiel 1

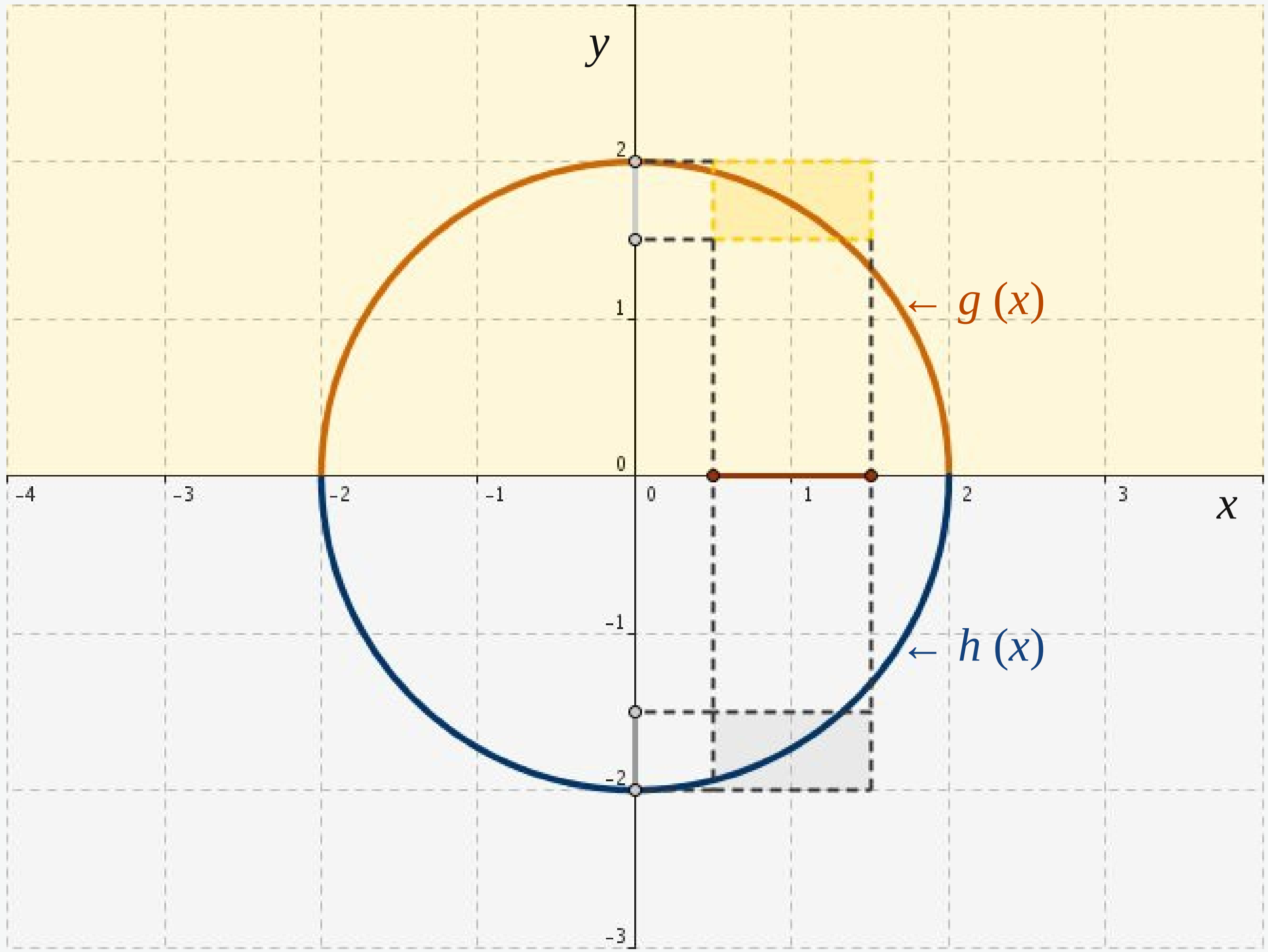

Abb. 4-2: Darstellung eines Kreises durch zwei Wurzelfunktionen g (x) und h (x)

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2}: \quad [-2,\ 2] \ \rightarrow \ [0,\ 2]$$

$$h(x) = -\sqrt{4 - x^2}: \quad (-2,\ 2) \ \rightarrow \ [-2,\ 0)$$

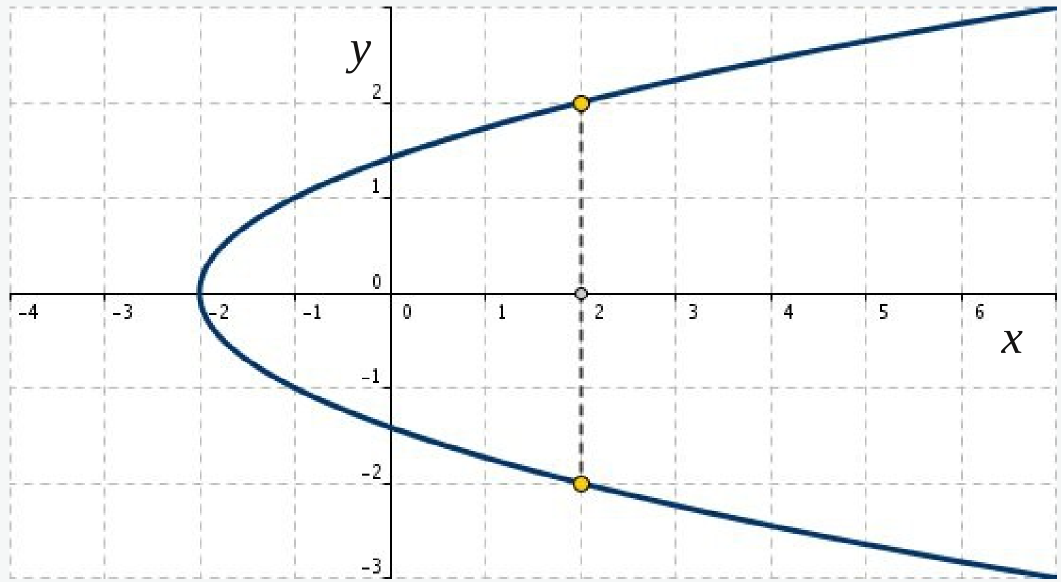

Abb. 5-1: Graphische Darstellung einer Funktion $y^2 = x + 2$

An der graphischen Darstellung erkennt man, dass die Zuordnung $x \to y$ nicht eindeutig ist. Durch die Gleichung sind implizit zwei Funktionen erklärt, was wir im Folgenden zeigen.

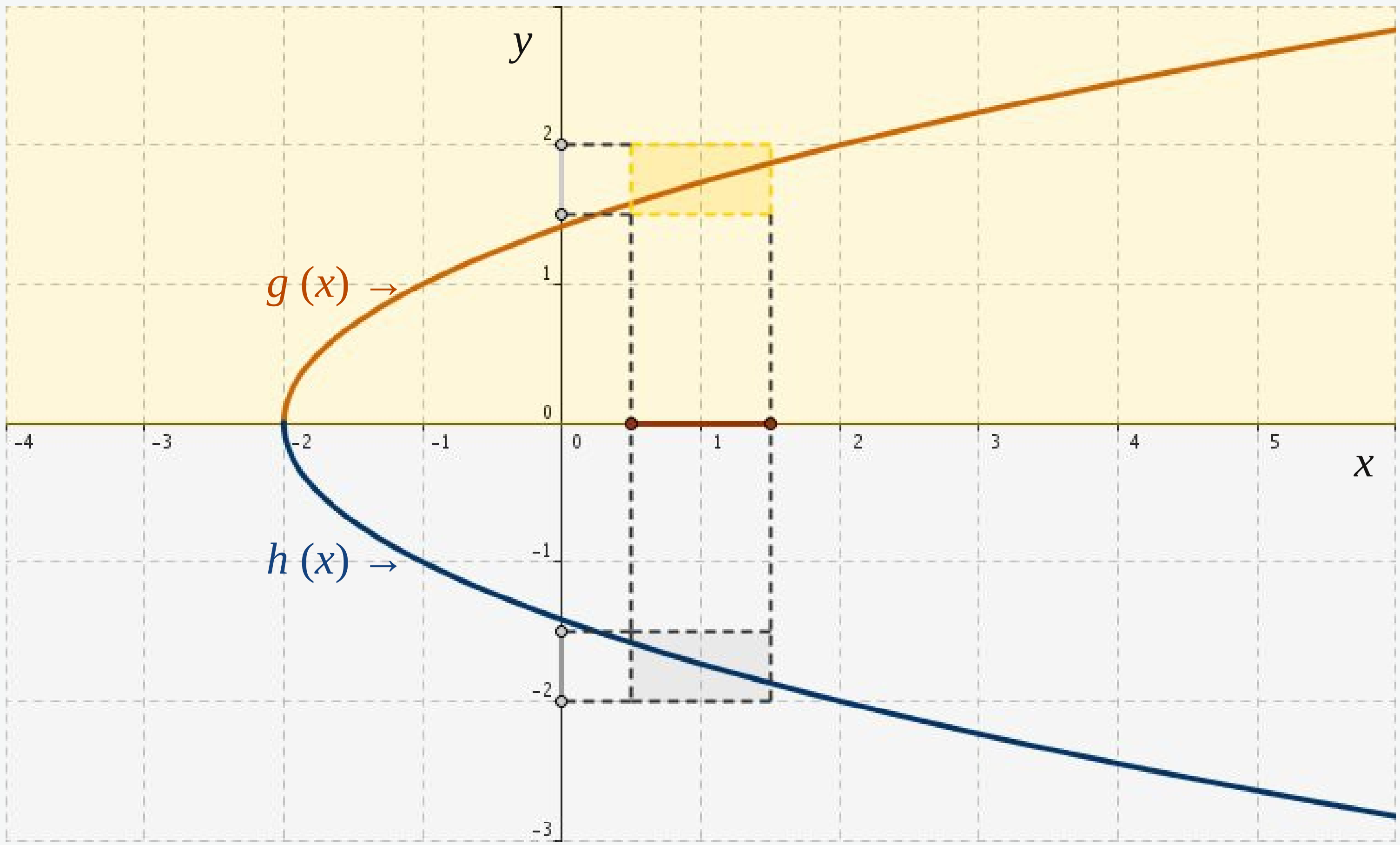

Abb. 5-2: Darstellung der Gleichung $y^2 = x + 2$ durch zwei Wurzelfunktionen $g(x)$ und $h(x)$

$$g(x) = \sqrt{x + 2}: \quad [-2, \infty) \quad \to \quad [0, \infty)$$

$$h(x) = -\sqrt{x + 2}: \quad (-2, \infty) \quad \to \quad (-\infty, 0)$$

Funktionen werden nach Möglichkeit explizit dargestellt, das heißt, die Glieder mit und ohne Funktionsvariablen stehen auf der einen Seite der Funktionsgleichung und der Funktionswert auf der anderen Seite. Man spricht dann von explizit definierten Funktionen.

$$y = f(x)$$

y steht isoliert auf einer Seite der Funktionsgleichung

Beispiele:

$$y = x^3 + 3x - 7$$

$$y = 3 \sin x + 2$$

$$y = x e^x$$

Wandeln Sie, wenn möglich, die folgenden implizit definierten Funktionen oder Relationen in eine explizite Darstellung um

$a)\quad F(x, y) = 2x + 3y - 6 = 0$

$b)\quad x^4 = -x^2 \cdot \ln\sqrt{y}$

$c)\quad x^2 - 6y + 8 = 0$

$d)\quad e^x = xy$

$g)\quad \ln y = x^2$

$$a)\quad y = -\frac{2}{3}\,x + 2$$

$$b)\quad y = e^{-2\,x^2}$$

$$-x^2 = \ln\sqrt{y} \quad\Leftrightarrow\quad -x^2 = \frac{1}{2}\,\ln y \quad\Leftrightarrow$$

$$-2\,x^2 = \ln y \quad\Rightarrow\quad y = e^{-2\,x^2}$$

$$c)\quad y = \frac{x^2}{6} + \frac{4}{3}$$

$$d)\quad y = \frac{e^x}{x}, \qquad x \neq 0$$

$$e)\quad y = e^{x^2}$$