Definitionslücke und gleiche Funktionen

Definition:

Eine Stelle, an der eine Funktion nicht definiert ist, heißt Definitionslücke der Funktion.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie Definitionslücken folgender Funktionen:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = \frac{x}{x-2}, \qquad h(x) = \frac{1}{x^2-9}$$

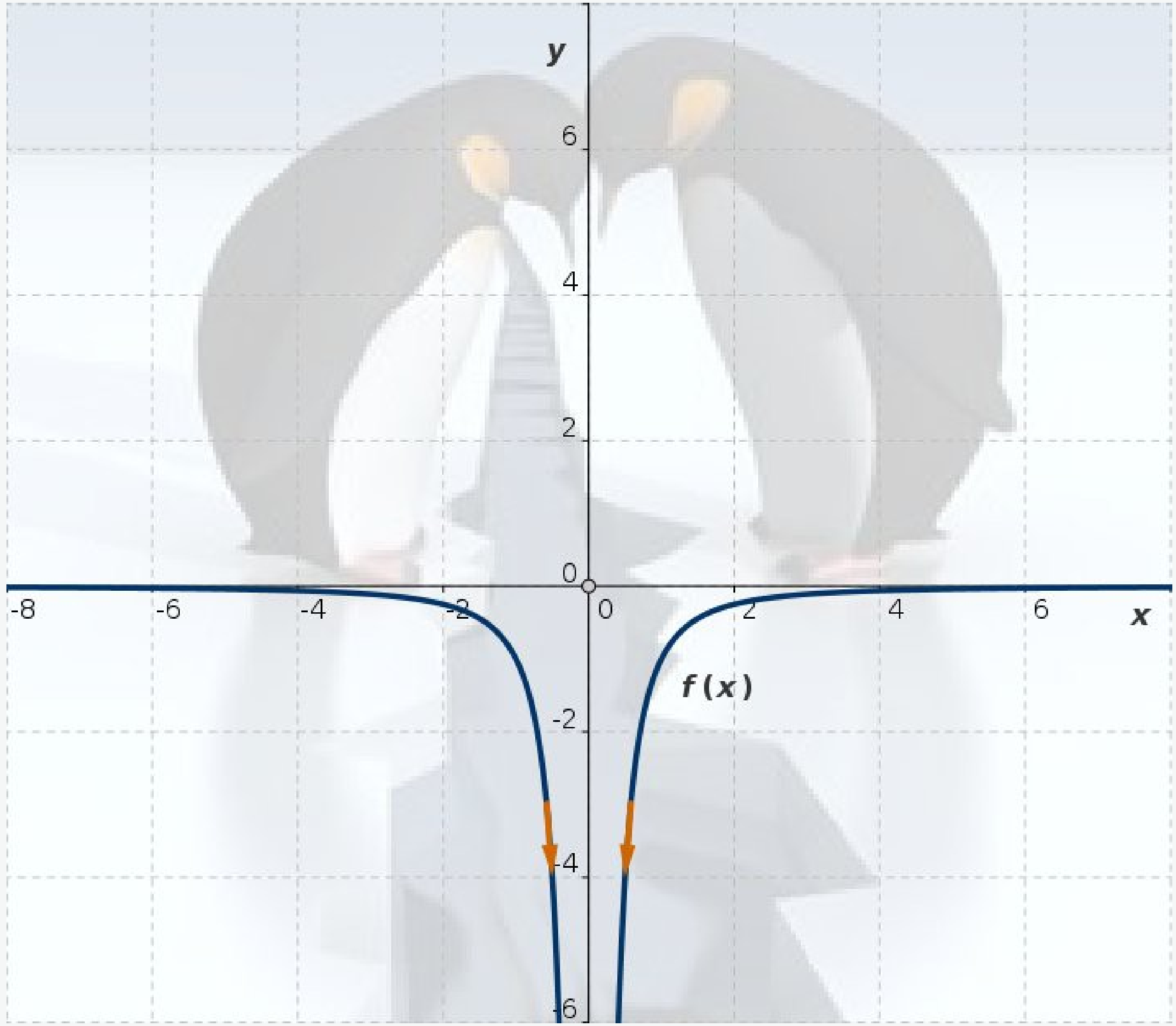

Abb. 1-1: Die Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$$

$x = 0$ – Definitionslücke der Funktion $f(x)$

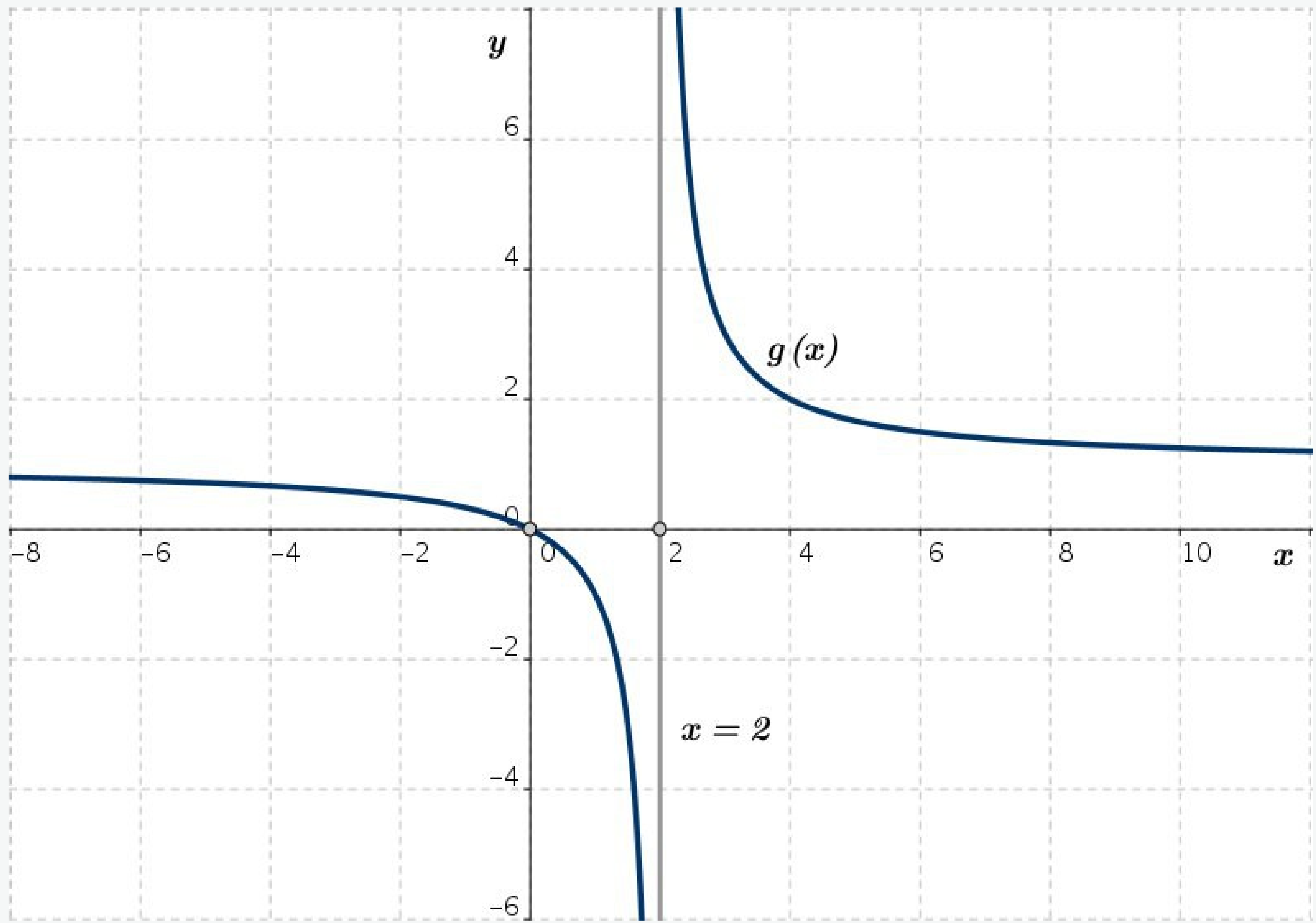

Abb. 1-2: Die Funktion $y = g(x)$

$$g(x) = \frac{x}{x-2}, \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$x = 2$ – Definitionslücke der Funktion $g(x)$

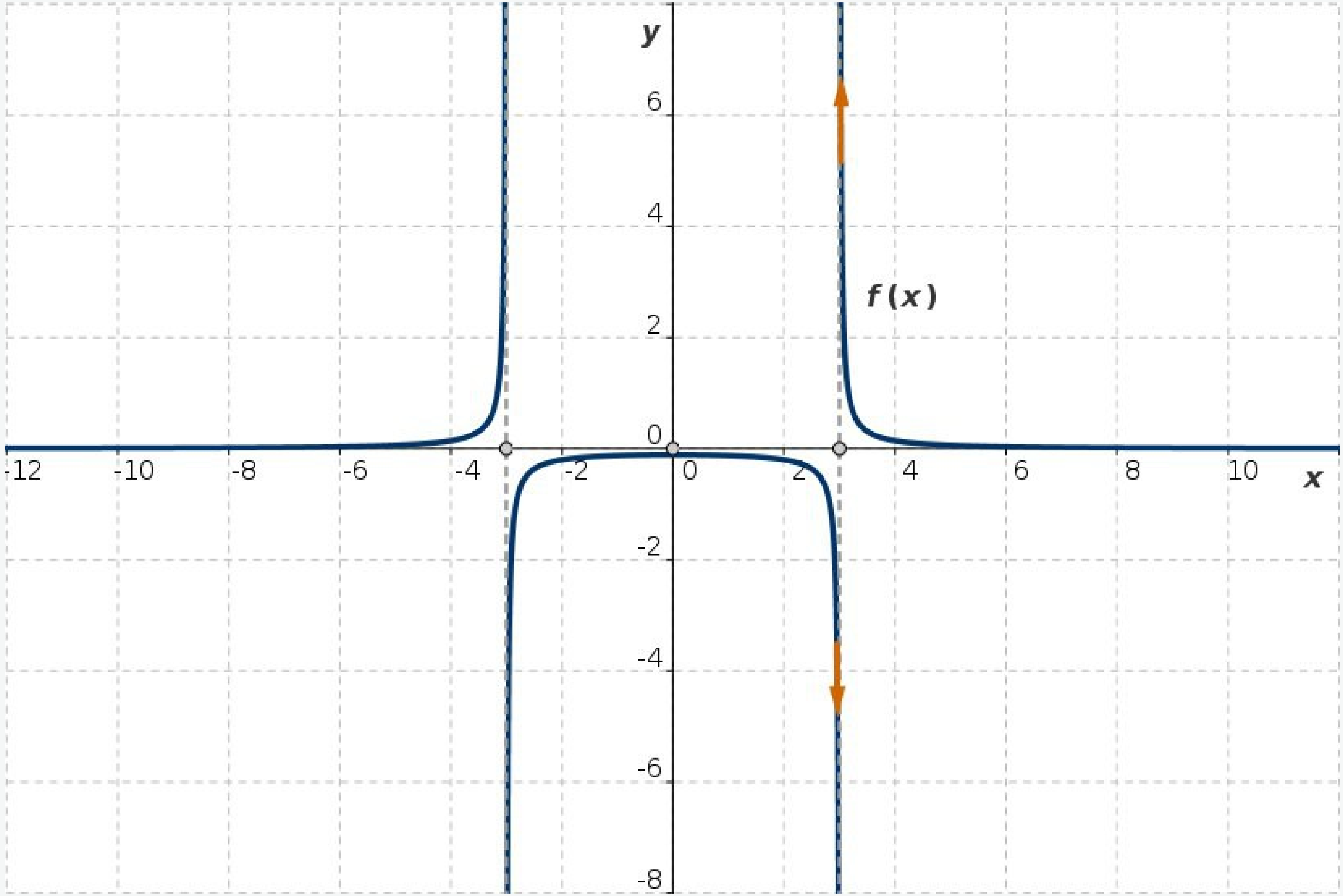

Abb. 1-3: Die Funktion y = h (x)

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 9}, \qquad D(h) = \mathbb{R} \setminus \{-3,\ 3\}$$

$x = -3,\ 3$ – Definitionslücken der Funktion $h(x)$

Definition:

Funktionen sind gleich, wenn sie in demselben Definitionsbereich an allen Stellen gleiche Funktionswerte haben.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie, ob die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleich sind

$a)\quad f(x) = x^2, \qquad g(x) = \dfrac{x^2\,(x-1)}{(x-1)}$

$b)\quad f(x) = x^2 - 1, \qquad g(x) = \dfrac{(x^2-1)\,(x^2+1)}{(x^2+1)}$

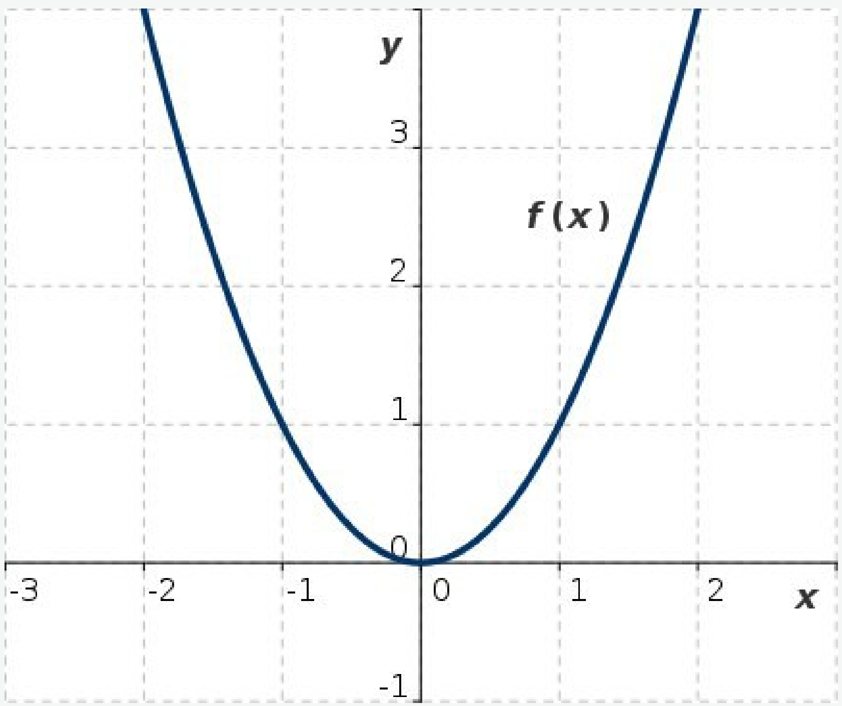

Abb. 2-1: Die Funktion f (x)

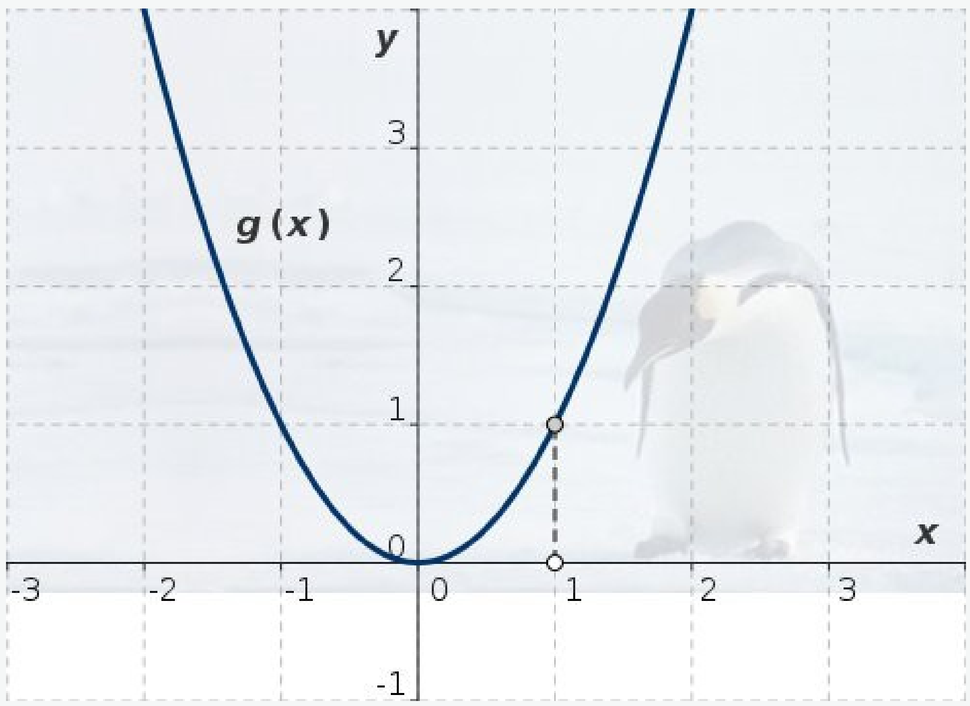

Abb. 2-2: Die Funktion g (x)

$$a)\quad f(x) = x^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{x^2\,(x-1)}{(x-1)}, \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$D(f) \neq D(g)$$

$$b)\quad f(x) = g(x)$$

Die Funktion $g(x)$ hat an der Stelle $x = 1$ eine Definitionslücke. Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stimmen bis auf die Definitionslücke überein. Alle Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ sind für

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$$

gleich, obwohl die Funktionsterme von $f(x)$ und $g(x)$ verschieden sind. Trotzdem kann man die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nicht als gleiche Funktionen bezeichnen.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen *f (x)* und *g (x)* in den gegebenen Intervallen gleich sind

Aufgabe 3:

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} - 3, \qquad g(x) = x - 2$$

$$I_1 = (-\infty, 0], \qquad I_2 = [0, 4], \qquad I_3 = [4, \infty)$$

Aufgabe 4:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} - 4, \qquad g(x) = x^2 + 2x$$

$$I_1 = (-\infty, 1], \qquad I_2 = [1, 6], \qquad I_3 = [6, \infty)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 3 = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 3, \qquad g(x) = x - 2$$

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich in den Intervallen

$$I_1 = (-\infty, 0], \qquad I_3 = [4, \infty)$$

und unterschiedlich im zweiten Intervall, da $x = 1$ nicht zum Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ gehört.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad D(g) = \mathbb{R}$$

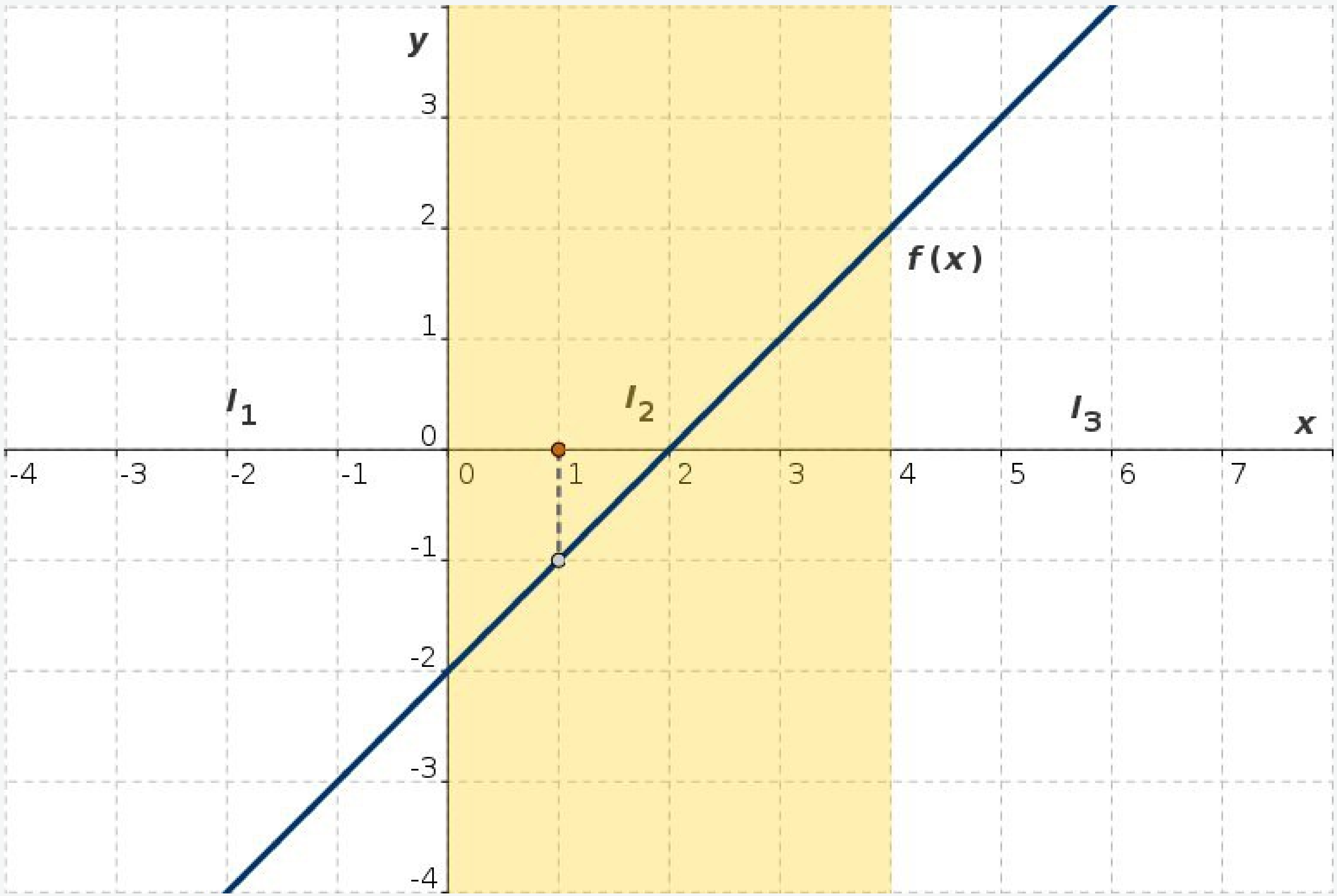

Abb. L3: Die Funktion $y = f(x)$ und drei in der Aufgabe 3 bezeichnete Intervalle des Definitionsbereiches

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} - 3$$

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich in den Intervallen

$$I_1 = (-\infty, 1], \qquad I_3 = [6, \infty)$$

und unterschiedlich im Intervall

$$I_2 = [1, 6]$$

da $x = 2$ nicht zum Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ gehört.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \qquad D(g) = \mathbb{R}$$

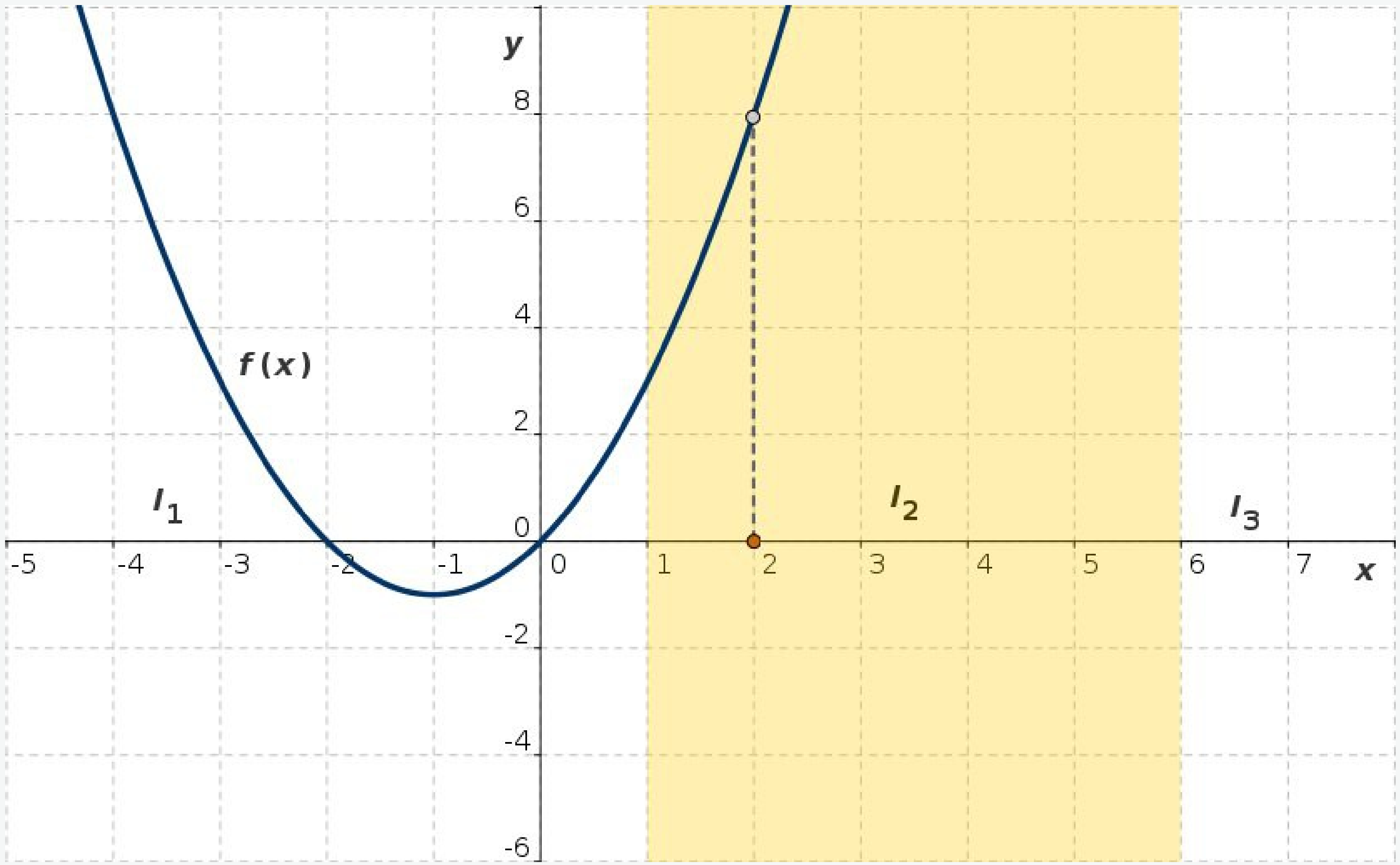

Abb. L4: Die Funktion $y = f(x)$ und drei in der Aufgabe 4 bezeichnete Intervalle des Definitionsbereiches

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} - 4$$

Bestimmen Sie, ob die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in den gegebenen Intervallen I gleich sind

Aufgabe 5:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}, \qquad g(x) = x + 1$$

$$I_1 = (-\infty, 0], \qquad I_2 = [0, 4], \qquad I_3 = [4, \infty)$$

Aufgabe 6:

$$f(x) = \sqrt{(x - 1)} \sqrt{(2x + 1)}, \qquad g(x) = \sqrt{(x - 1)(2x + 1)}$$

$$I_1 = (-\infty, -2], \qquad I_2 = [2, \infty)$$

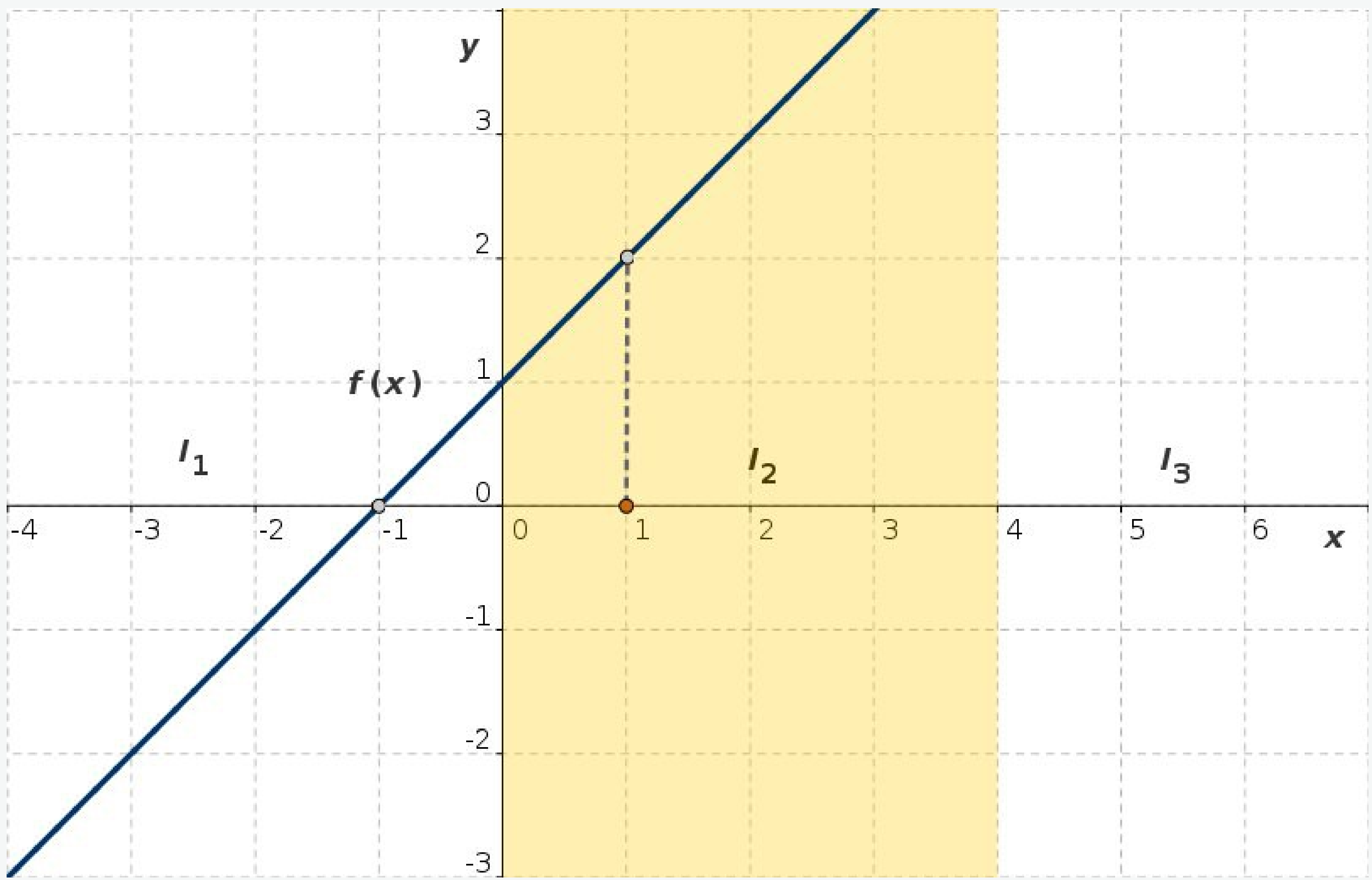

Abb. L5: Die Funktion $y = f(x)$ und drei in der Aufgabe 5 bezeichnete Intervalle des Definitionsbereiches

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind nur in dem Intervall $I_3 = [4, \infty)$ gleich.

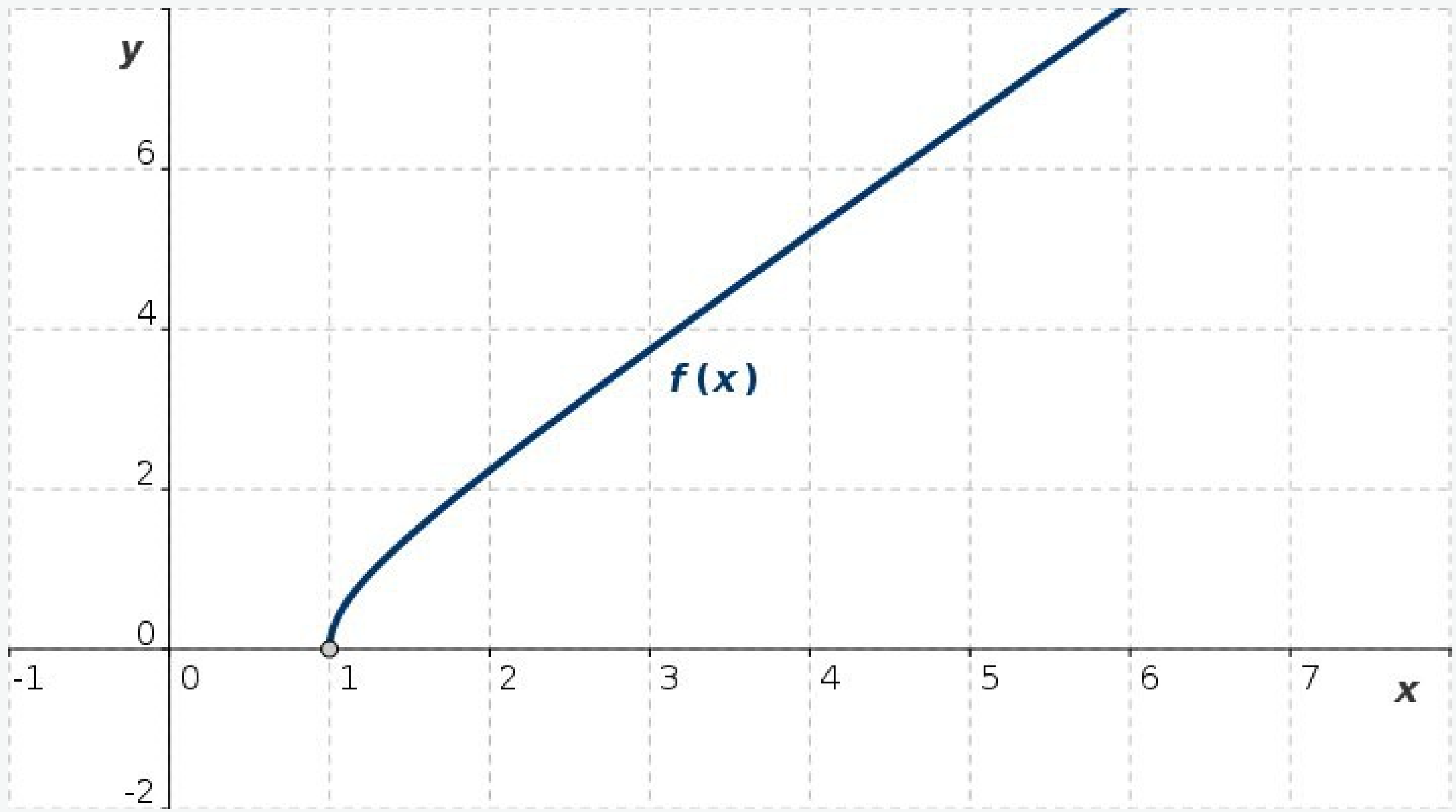

Abb. L6: Die Darstellung der Wurzelfunktion $y = f(x)$

Der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt{(x - 1)}\ \sqrt{(2x + 1)}$

$$D(f) = [\,1,\ \infty\,)$$

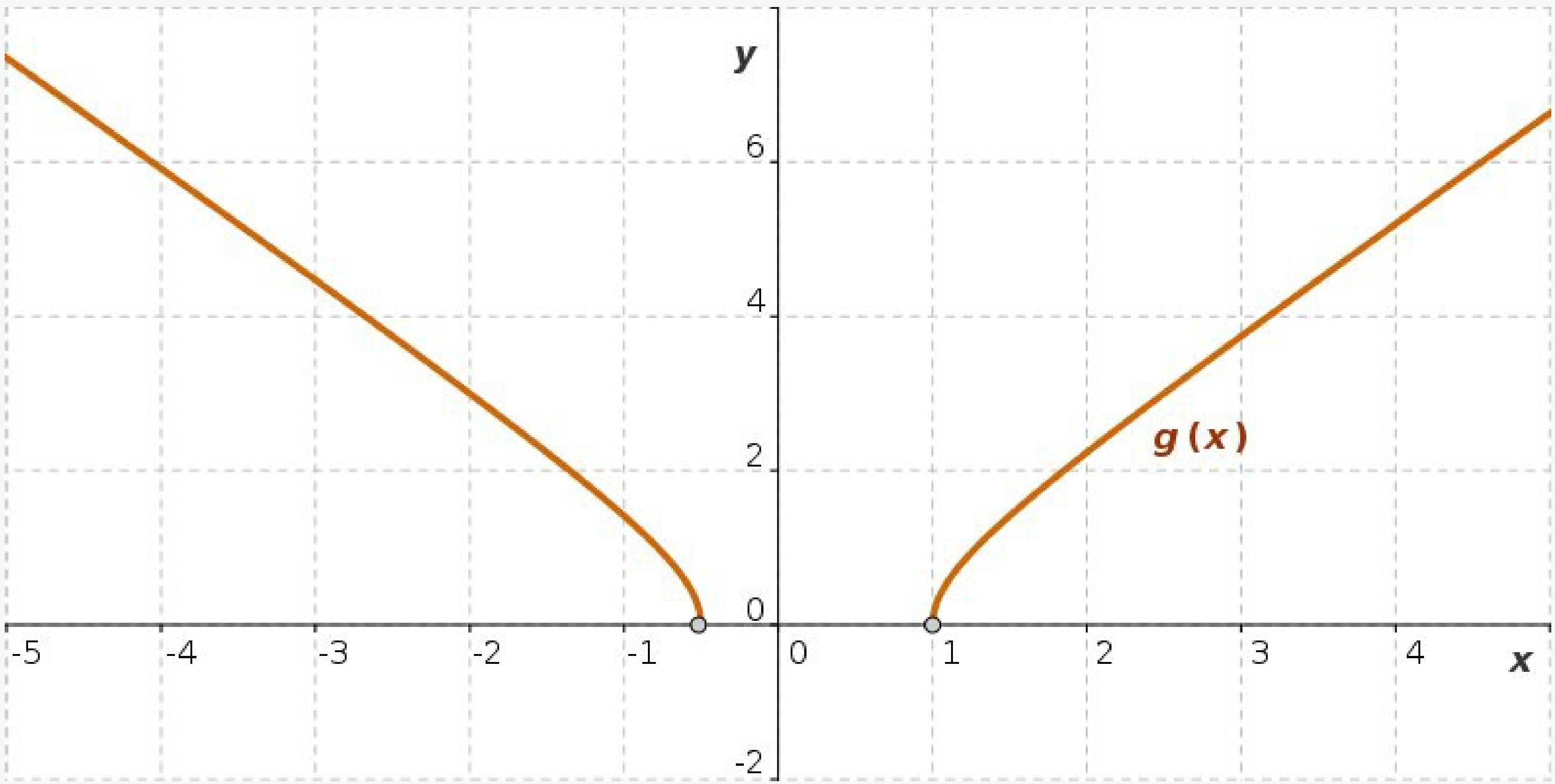

Abb. L6: Die Darstellung der Wurzelfunktion $y = g\,(x)$

Die Funktionen $f\,(x)$ und $g\,(x)$ sind gleich in dem Intervall $I_2 = [\,2,\ \infty\,)$.

Die Funktion $f\,(x)$ ist im Intervall $I_1 = (\,-\infty\,,\ -2\,]$ nicht bestimmt.

Padova, Italien. Zum Begriff “gleich zu sein”