

<http://www.youtube.com/watch?v=vORsKyopHyM>

Beschränkte Funktionen

Eine beschränkte Funktion: Beispiel 1

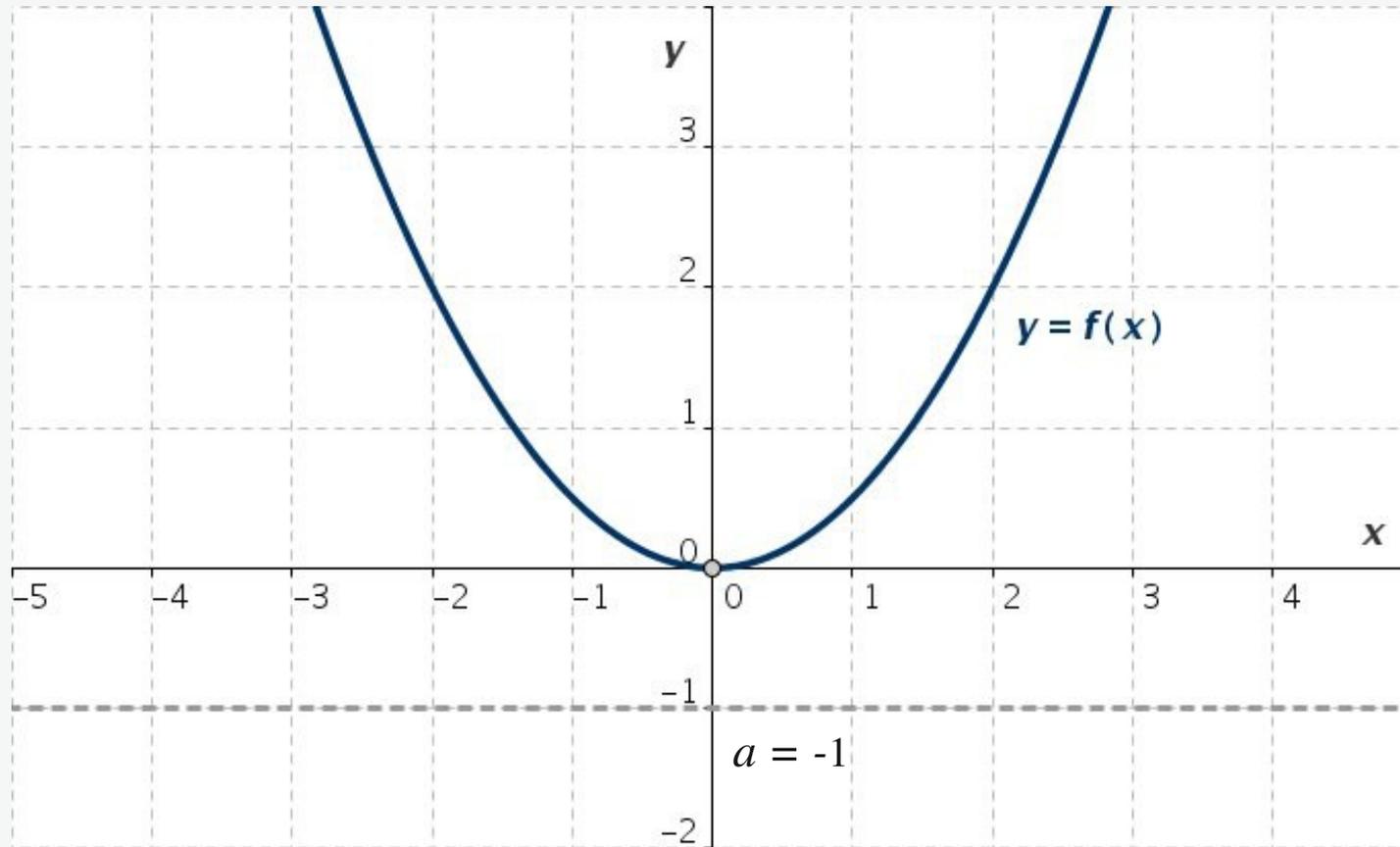


Abb. 1-1: Eine von unten beschränkte Funktion $y = 0.5 x^2$

Die Funktion $y = 0.5 x^2$ besitzt keine negativen Funktionswerte.

$$f(x) = 0.5 x^2 : \quad D = \mathbb{R}, \quad W = \mathbb{R}^+$$

Eine beschränkte Funktion: Beispiel 1

Die Funktion $y = 0.5 x^2$ besitzt keine negativen Funktionswerte. Für alle x aus dem Definitionsbereich gilt

$$f(x) \geq a$$

wobei a eine beliebige nicht positive reelle Zahl sein darf, also beispielsweise $a = 0$ oder $a = -5$ usw.

Man nennt $y = 0.5 x^2$ eine nach unten beschränkte Funktion. Jede Zahl, die die Eigenschaft besitzt, dass sie kleiner ist als alle Funktionswerte der Funktion $y = 0.5 x^2$, wird als untere Schranke dieser Funktion bezeichnet. Eine untere Schranke muss nicht unbedingt mit dem kleinsten Funktionswert übereinstimmen.

Eine beschränkte Funktion: Beispiel 2

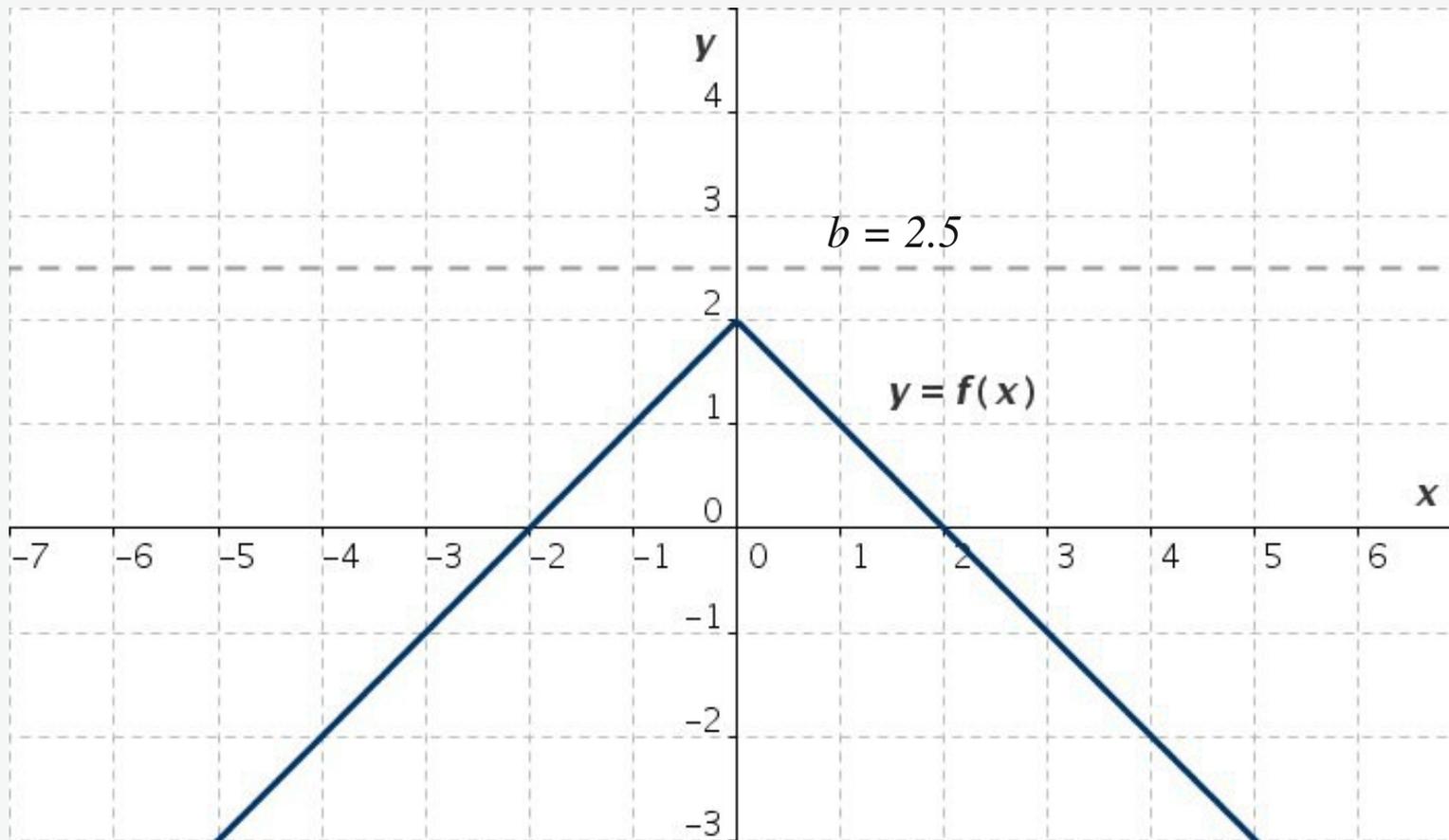


Abb. 1-2: Eine von oben beschränkte Funktion $y = -|x| + 2$

Die Funktion $y = -|x| + 2$ ist nach oben beschränkt, denn für alle x aus dem Definitionsbereich gilt

$$f(x) \leq b$$

Sofern $b \geq 2$ gewählt wird. b wird obere Schranke der Funktion genannt.

Eine beschränkte Funktion: Beispiel 3

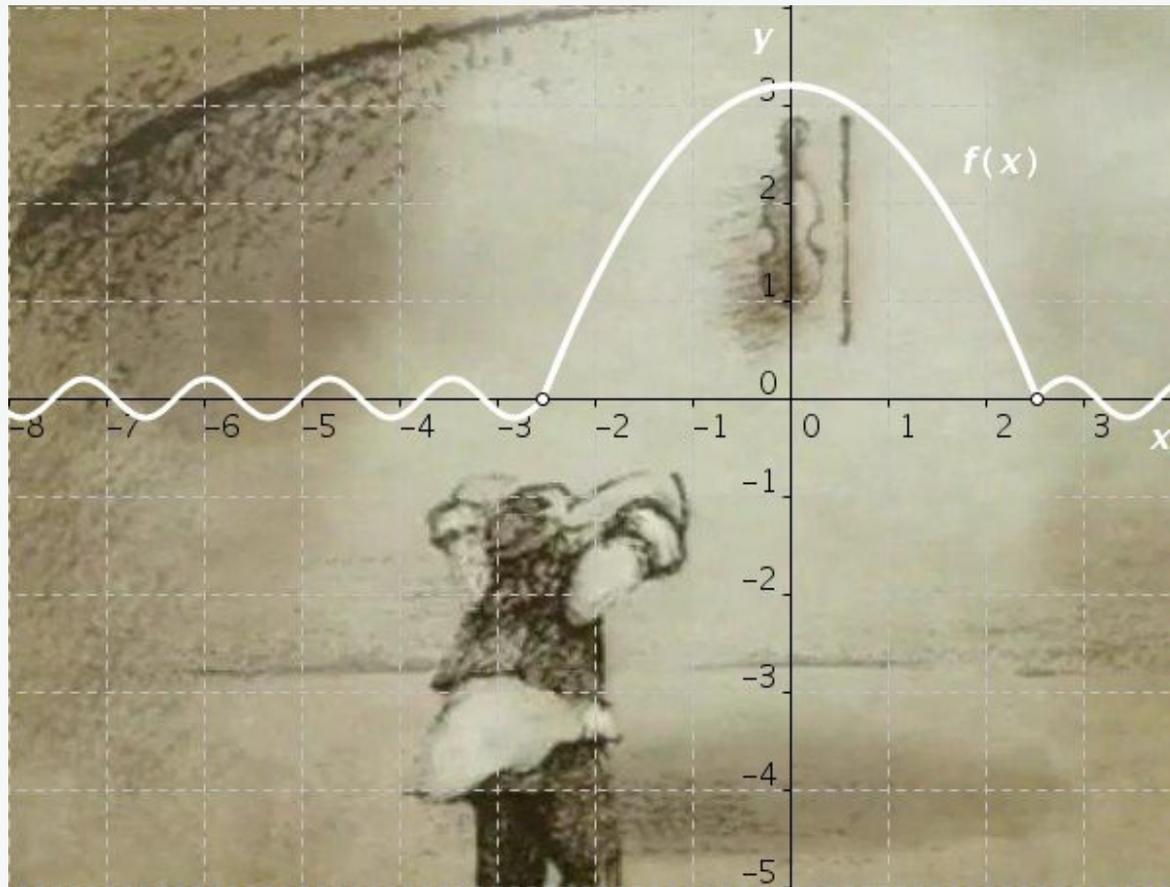


Abb. 1-3: Eine von oben und unten beschränkte Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 3.2, & |x| \leq 2.53 \\ 0.2 \sin(5x), & |x| > 2.53 \end{cases}, \quad W(f) = [-0.2, 3.2]$$

$f(x)$ ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.



Stellen Sie die folgenden Funktionen dar, und ermitteln Sie ihre wichtigsten Eigenschaften

Aufgabe 1: $f(x) = 2|x| - 1$

Aufgabe 2: $f(x) = \left| \frac{x^2}{2} - 2 \right|$

Aufgabe 3: $f(x) = 2 \sin^2 x$

Aufgabe 4:

$$f(x) = 4e^{-0.4x^2}, \quad g(x) = 2e^{-x^2}, \quad h(x) = -e^{-3x^2}$$

Aufgabe 5: $f(x) = 3e^{-0.1x^2} \cos^2 x$

Aufgabe 6: $f(x) = 3e^{-|x|}, \quad g(x) = -2e^{-|x|}$

Aufgabe 7:

$$f(x) = e^{-0.1|x|} \sqrt{9 - x^2}, \quad g(x) = e^{-|x|} \sqrt{9 - x^2}$$

Aufgabe 8: $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$

Beschränkte Funktionen: Lösung 1

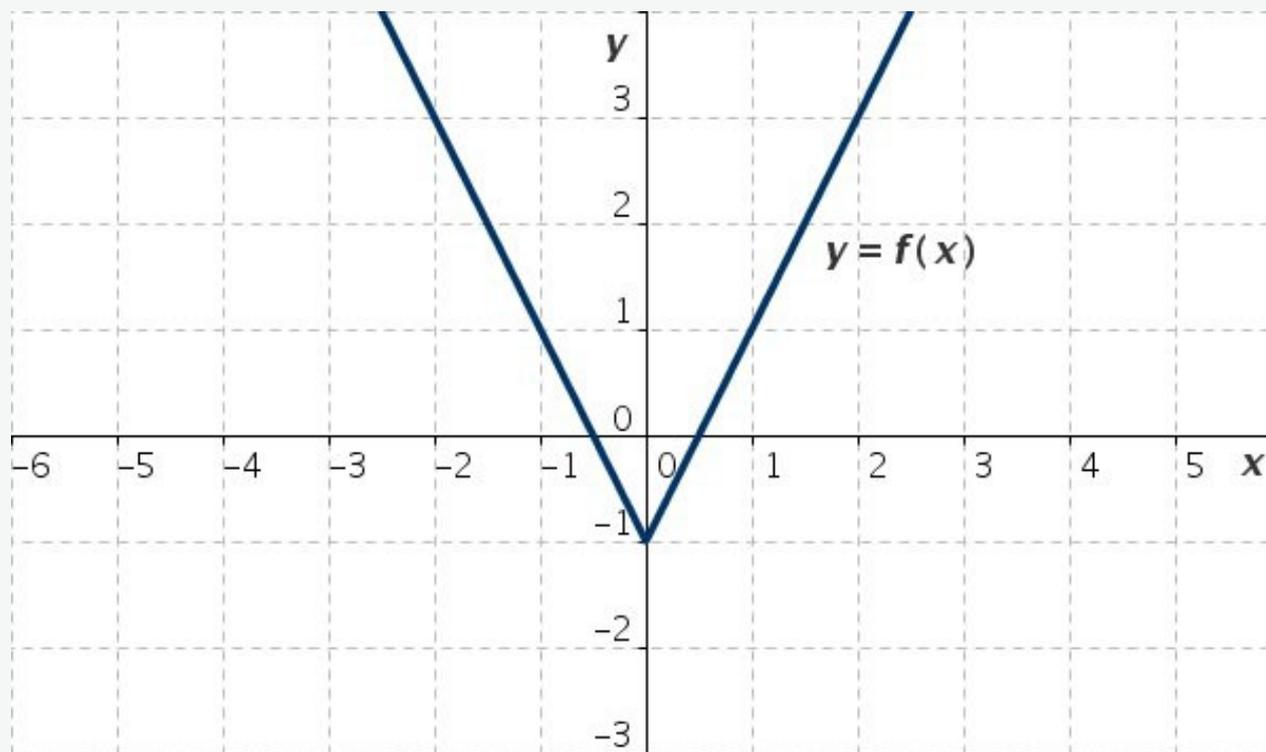


Abb. L1: Eine von unten beschränkte Funktion $y = f(x)$

$$y = 2|x| - 1, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [-1, \infty)$$

nach unten beschränkt ($b \leq -1$)

streng monoton fallend ($x \leq 0$)

streng monoton steigend ($x \geq 0$)

$y = f(x)$ ist eine gerade Funktion

Beschränkte Funktionen: Lösung 2

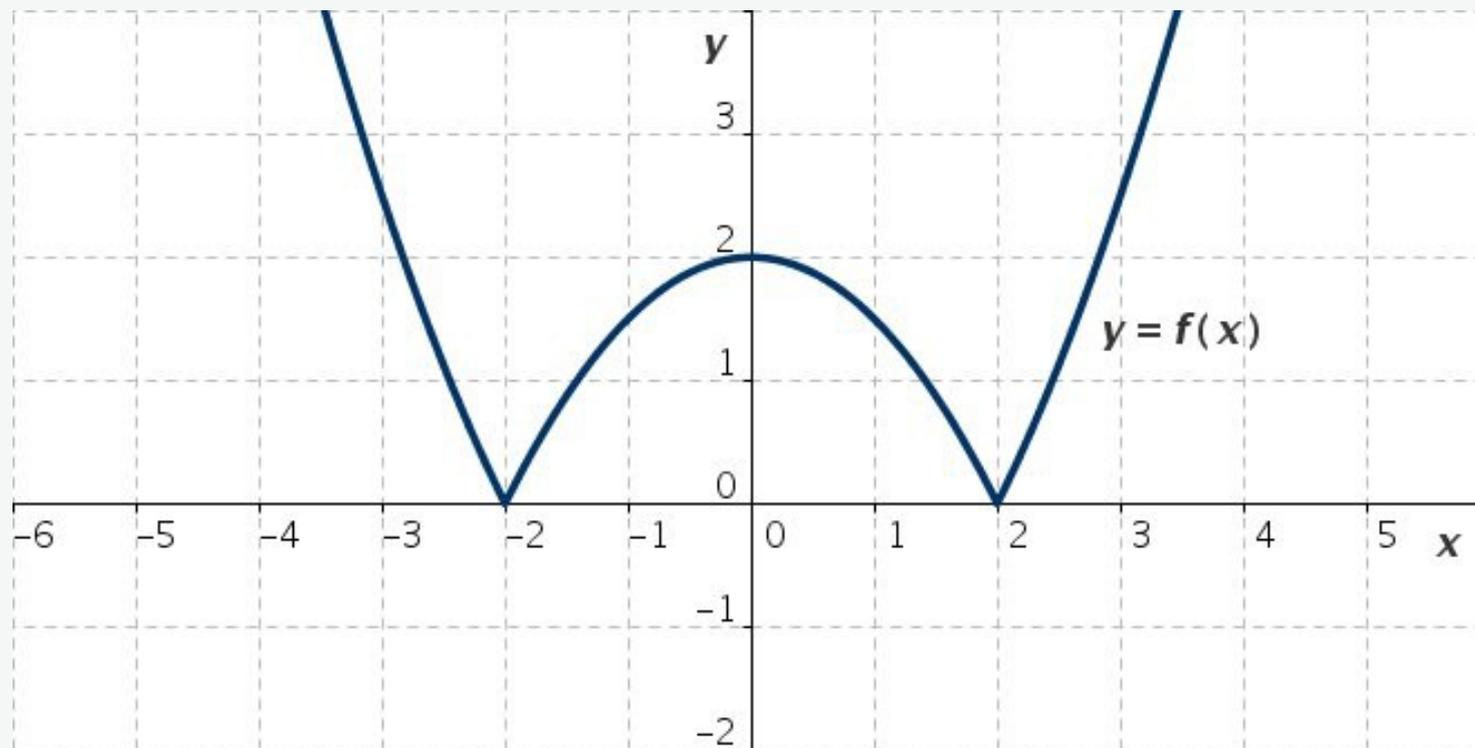


Abb. L2: Eine von unten beschränkte Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \left| \frac{x^2}{2} - 2 \right|, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [0, \infty)$$

nach unten beschränkt ($b \leq 0$)

streng monoton fallend: $x \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$

streng monoton steigend: $x \in [-2, 0] \cup [2, \infty)$

$f(x)$ ist eine gerade Funktion

Beschränkte Funktionen: Lösung 3

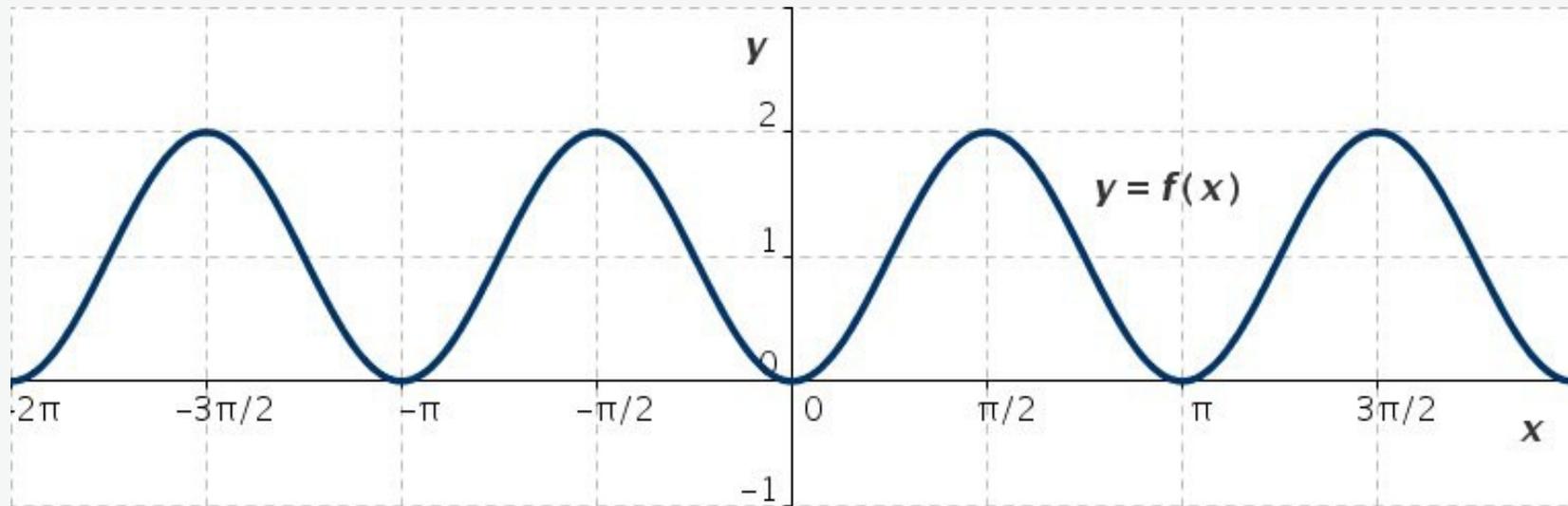


Abb. L3: Eine von unten und oben beschränkte Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = 2 \sin^2 x, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [0, 2]$$

nach oben beschränkt ($a \geq 2$), nach unten beschränkt ($b \leq 0$)

periodische Funktion $T = \pi$

streng monoton steigend: $x \in [0, \pi/2]$

streng monoton fallend: $x \in (\pi/2, \pi)$

$y = f(x)$ ist eine gerade Funktion

Beschränkte Funktionen: Lösung 4

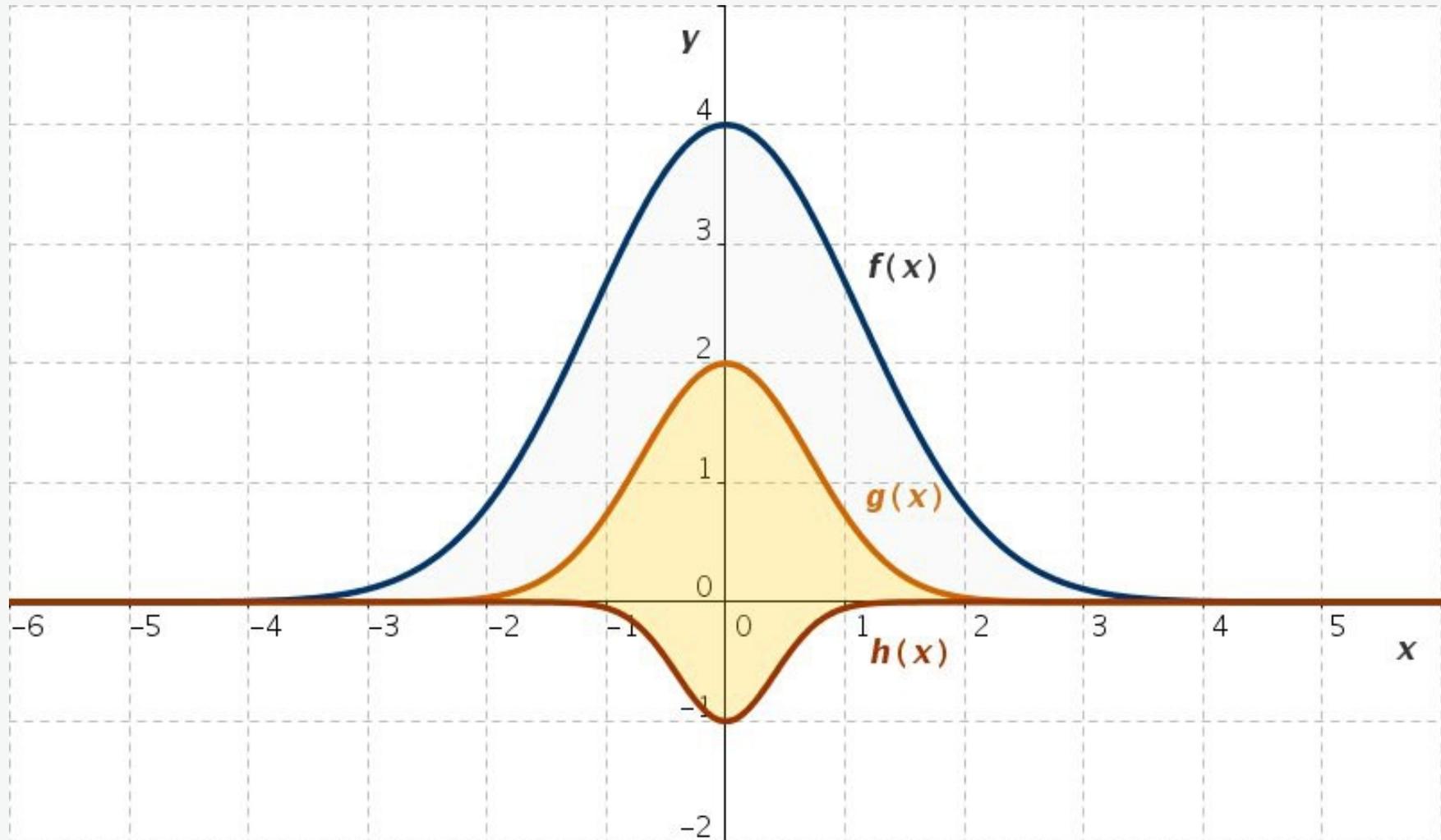


Abb. L4: Von unten und oben beschränkte Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und $y = h(x)$

$$f(x) = 4e^{-0.4x^2}, \quad g(x) = 2e^{-x^2}, \quad h(x) = -e^{-3x^2}$$

Beschränkte Funktionen: Lösung 4

$$f(x) = 4e^{-0.4x^2}, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = (0, 4]$$

$$g(x) = 2e^{-x^2}, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = (0, 2]$$

$$h(x) = -3e^{-3x^2}, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [-1, 0)$$

$f(x)$ und $g(x)$ sind streng monoton steigend ($x \leq 0$) und streng monoton fallend ($x \geq 0$)

$h(x)$ sind streng monoton fallend ($x \leq 0$) und streng monoton steigend ($x \geq 0$)

$f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ sind gerade Funktionen

Beschränkte Funktionen: Lösung 5

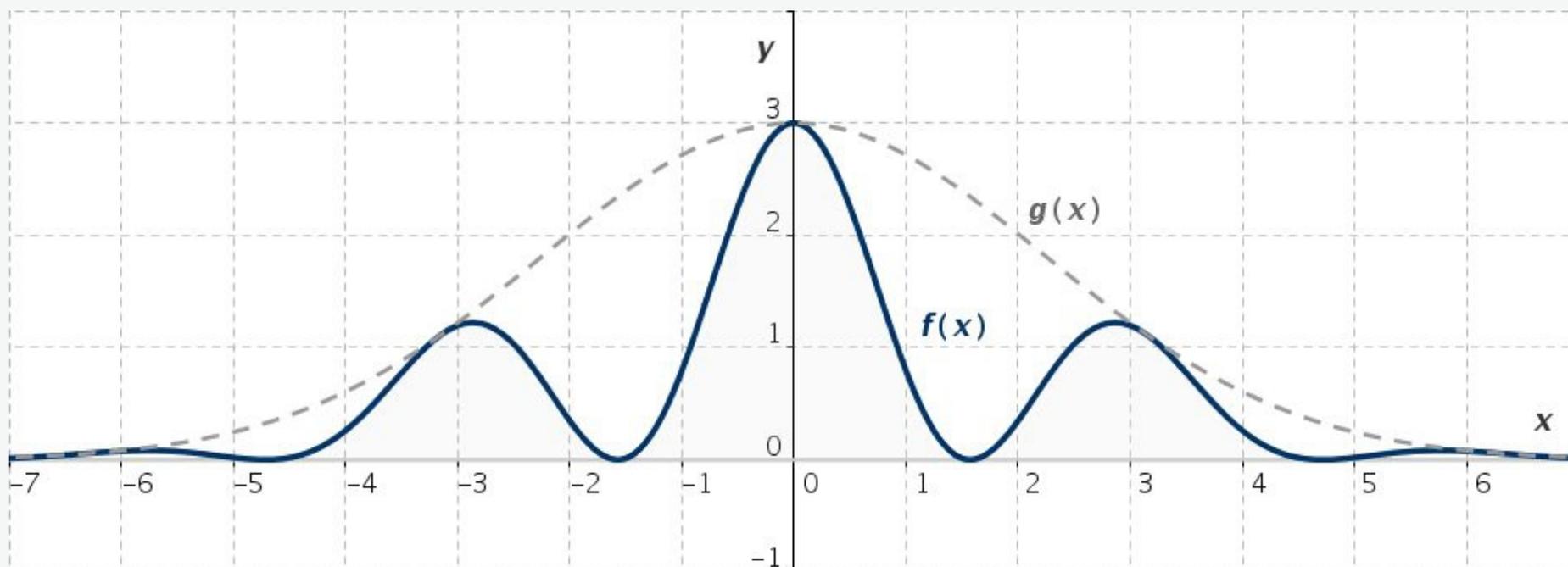


Abb. L5: Von unten und oben beschränkte Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = 3 e^{-0.1 x^2} \cos^2 x, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = (0, 3] \quad (g(x) = 3 e^{-0.1 x^2})$$

nach oben beschränkt ($a \geq 3$), nach unten beschränkt ($b \leq 0$)

$y = f(x)$ ist eine gerade Funktion

Beschränkte Funktionen: Lösung 6

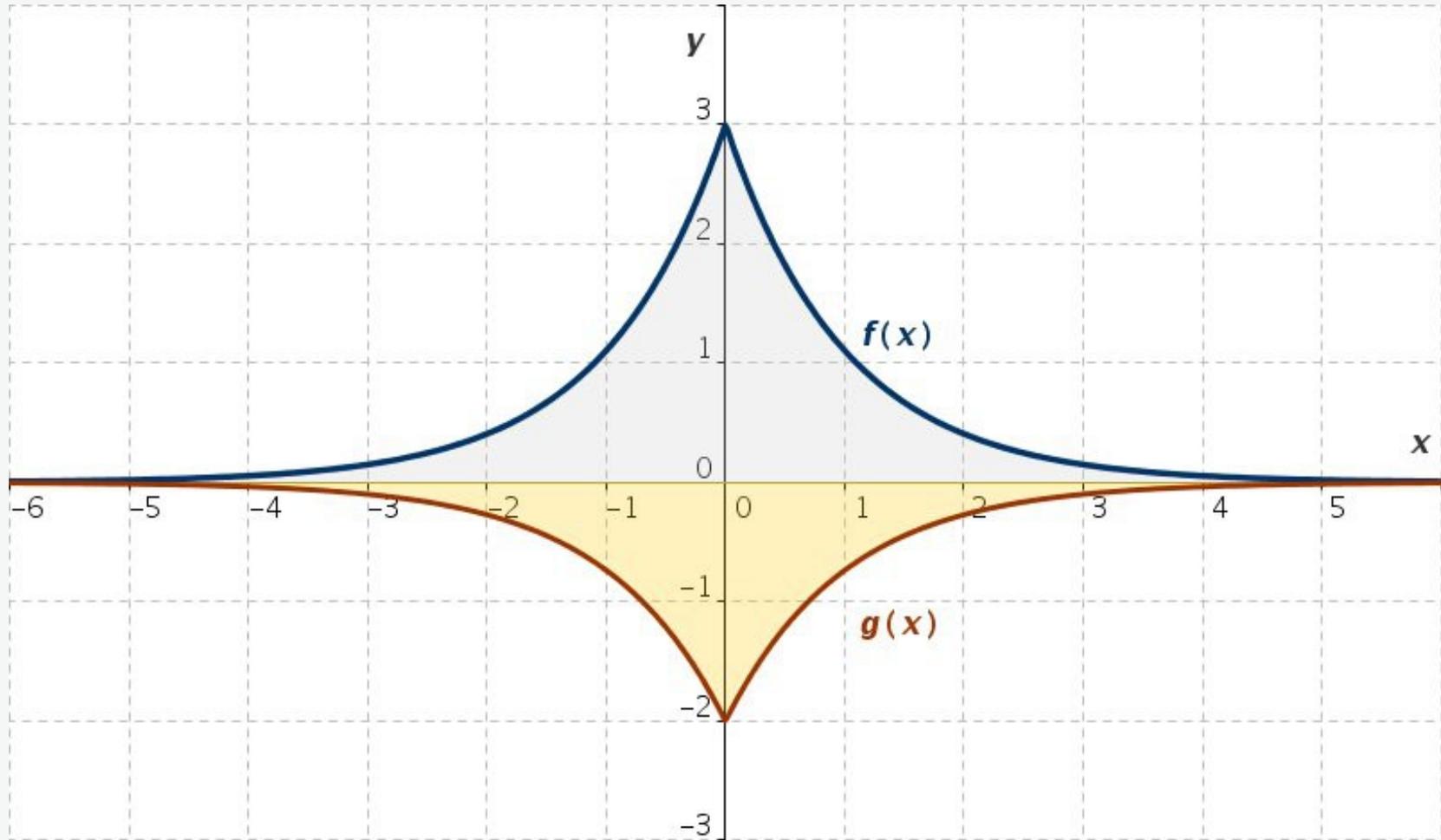


Abb. L6: Von unten und oben beschränkte Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = 3e^{-|x|}, \quad g(x) = -2e^{-|x|}$$

$$f(x) = 3e^{-|x|}, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = (0, 3]$$

$$g(x) = -2e^{-|x|}, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [-2, 0)$$

$f(x)$ ist streng monoton steigend ($x \leq 0$) und streng monoton fallend ($x \geq 0$)

$g(x)$ ist streng monoton fallend ($x \leq 0$) und streng monoton steigend ($x \geq 0$)

$f(x)$ und $g(x)$ sind gerade Funktionen

Beschränkte Funktionen: Lösung 7

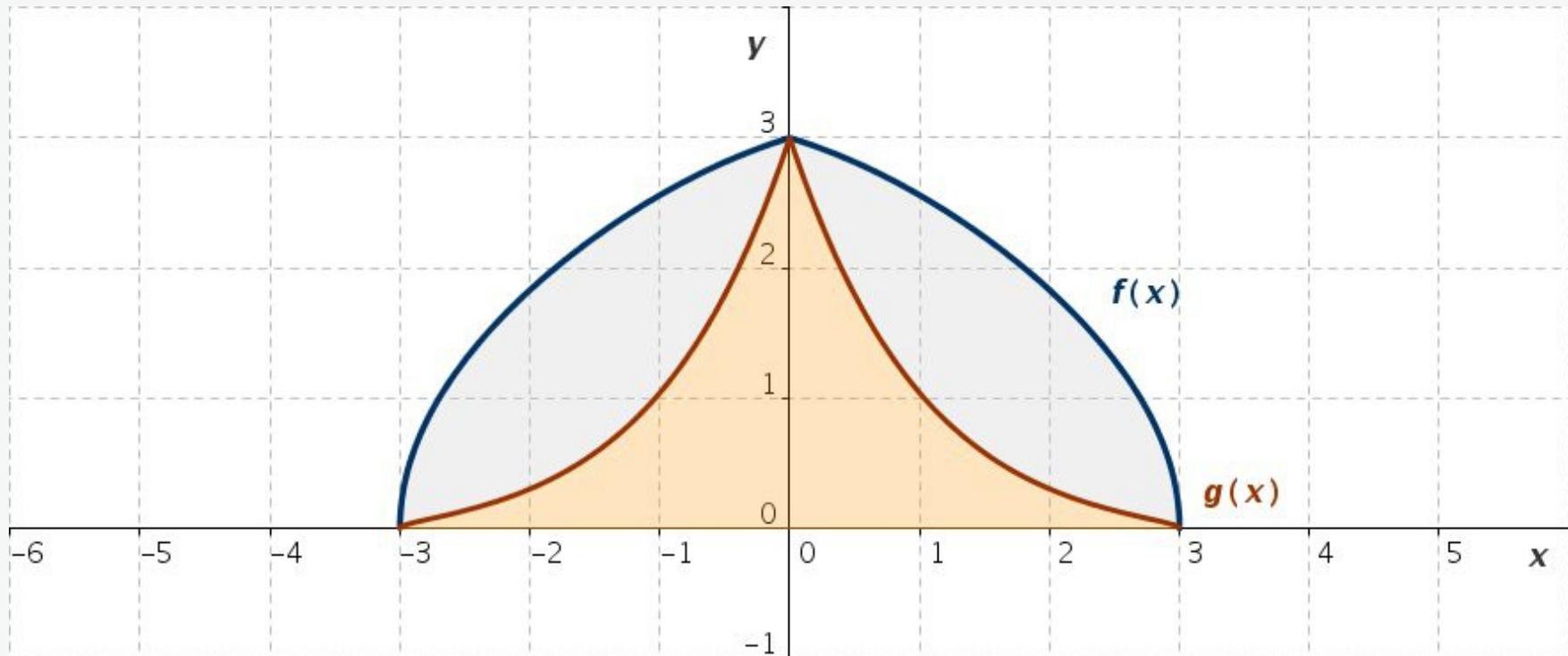


Abb. L7: Von unten und oben beschränkte Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = e^{-0.1|x|} \sqrt{9 - x^2}, \quad D = [-3, 3], \quad W = [0, 3]$$

$$g(x) = e^{-|x|} \sqrt{9 - x^2}, \quad D = [-3, 3], \quad W = [0, 3]$$

$f(x)$ und $g(x)$ sind streng monoton steigend ($-3 \leq x \leq 0$) und streng monoton fallend ($0 \leq x \leq 3$)

$f(x)$ und $g(x)$ sind gerade Funktionen

Beschränkte Funktionen: Lösung 8

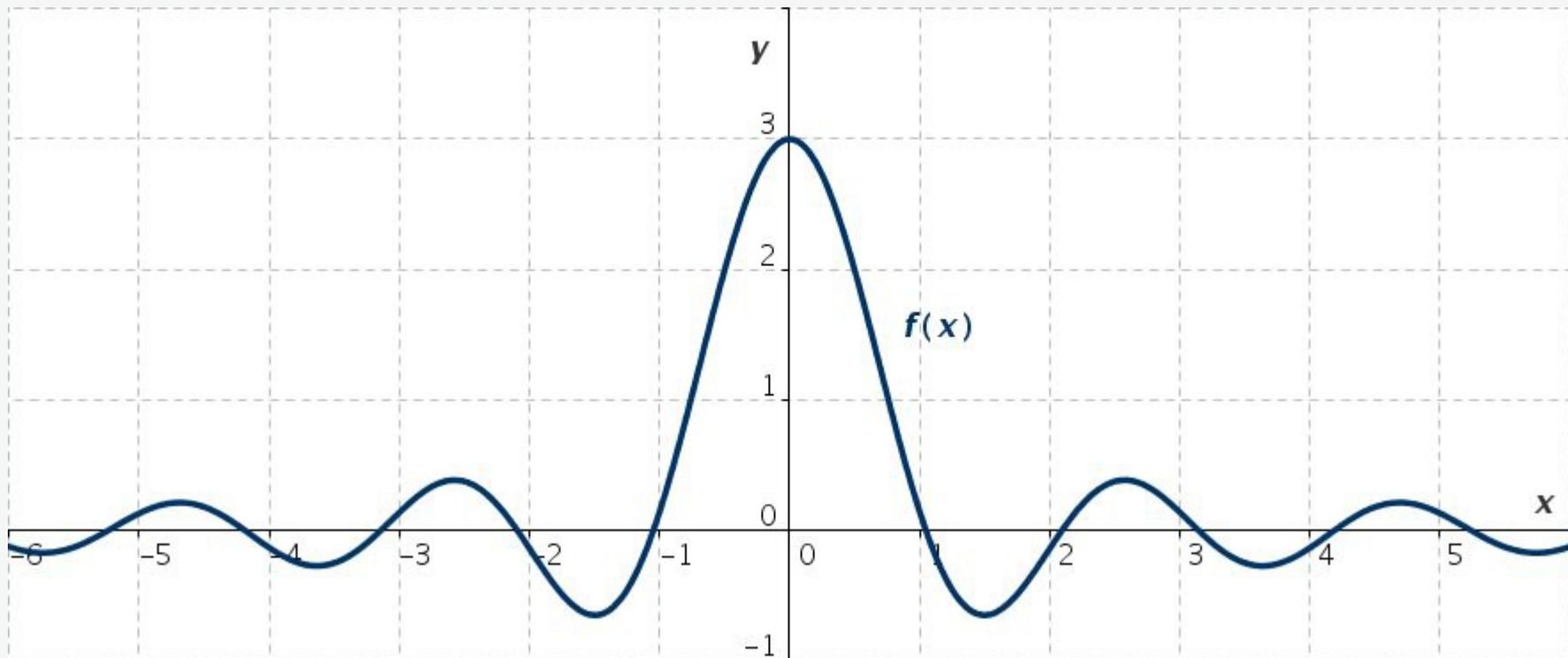


Abb. L8: Von unten und oben beschränkte Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad W = [-0.65, 3]$$

nach oben beschränkt ($a \geq 3$), nach unten beschränkt ($b \leq -0.65$)

$f(x)$ ist eine gerade Funktion