http://www.fotocommunity.de/pc/pc/cat/575/display/9729632

Quadratische Gleichungen mit absoluten Beträgen

Wir betrachten als quadratische Gleichungen mit absoluten Beträgen die Gleichungen des Typs

$$|\, x^2 + p\,x + m\,| + n = 0$$

Beim Lösen sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1 Fall: $x^2 + p\,x + m \geqslant 0$, dann gilt

$$|\, x^2 + p\,x + m\,| + n = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + p\,x + m + n = 0$$

und nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man:

$$x_{1,\,2} = -\,\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - m - n}$$

2 Fall: $x^2 + p\,x + m < 0$, dann gilt

$$-(x^2 + p\,x + m\,) + n = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + p\,x + m - n = 0$$

und nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man:

$$x_{3,\,4} = -\,\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - m + n}$$

Bestimmen Sie die Lösungen folgender quadratischen Gleichungen mit absoluten Beträgen

Aufgabe 1: $|x^2 - 6x + 1| - 8 = 0$

Aufgabe 2: $|x^2 - 6x + 2| - 9 = 0$

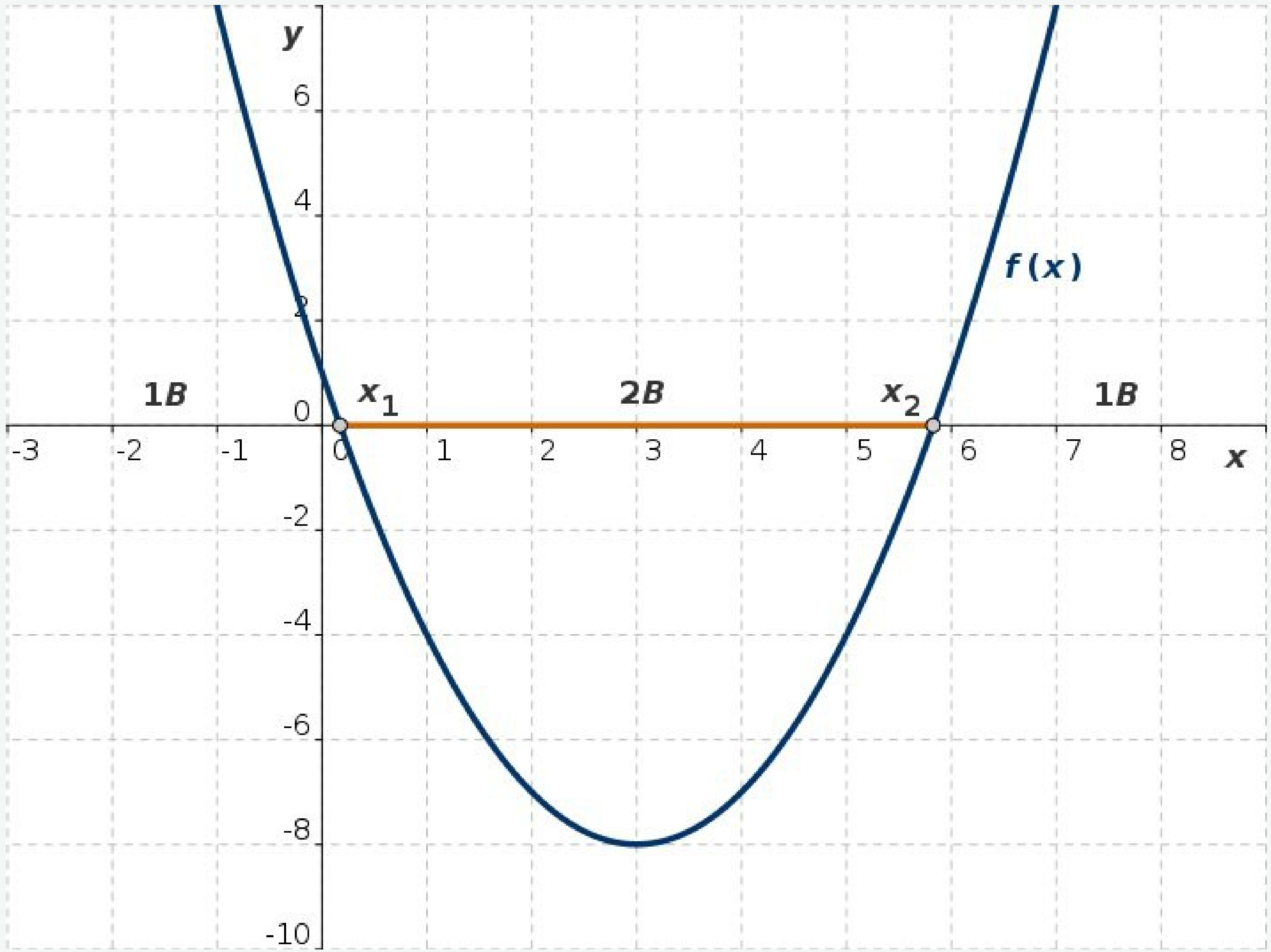

Abb. L1a: Die Funktion $y = f(x)$ und die Schnittpunkte mit der x-Achse

$$f(x) = x^2 - 6x + 1$$

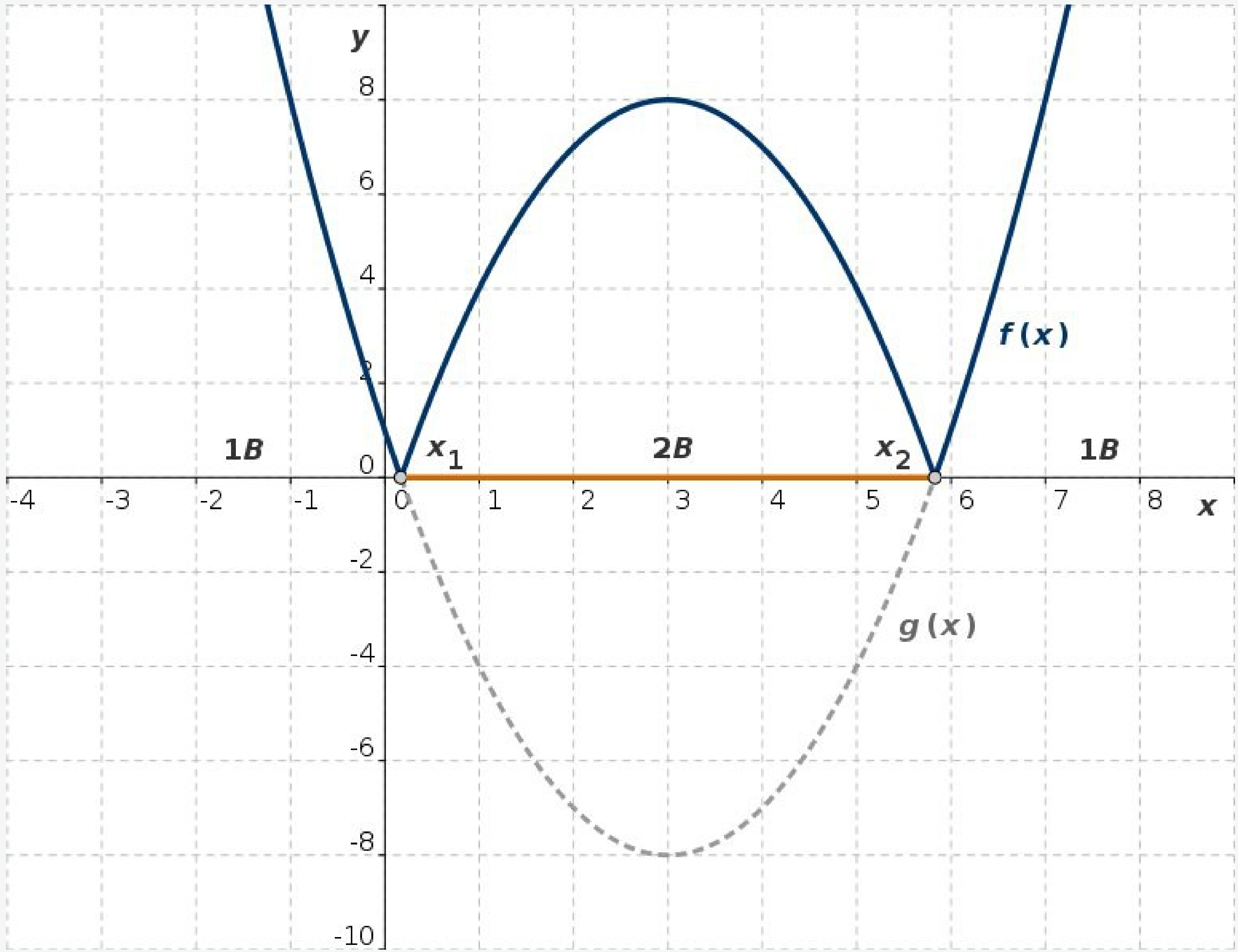

Abb. L1b: Die Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = |\, x^2 - 6x + 1 \,|, \qquad g(x) = x^2 - 6x + 1$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 1$$

$f(x)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Die Abb. *L1a* zeigt, dass sie zwei Schnittpunkte mit der x-Achse hat. Um diese Schnittpunkte zu bestimmen, lösen wir die entsprechenden quadratischen Gleichungen:

$$x^2 - 6x + 1 = 0, \qquad x_a = 3 - 2\sqrt{2}\,, \quad x_b = 3 + 2\sqrt{2}$$

Im Bereich 1B: $\quad (-\infty, x_a] \cup [x_b, \infty)$

sind die Funktionswerte positiv oder gleich 0,

im Bereich 2B: $\quad (x_a, x_b) \quad$ sind die Funktionswerte negativ.

Dementsprechend kann man die Betragsgleichung in folgender Form darstellen:

1 Fall (1B): $\quad x^2 - 6x + 1 \geqslant 0$

$$|x^2 - 6x + 1| - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x - 7 = 0$$

2 Fall (2B): $\quad x^2 - 6x + 1 < 0$

$$|x^2 - 6x + 1| - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

1 Fall: $x^2 - 6x + 1 \geqslant 0 \qquad (1B)$

$$x^2 - 6x - 7 = 0, \qquad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 7}$$

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 7$$

2 Fall: $x^2 - 6x + 1 < 0 \qquad (2B)$

$$x^2 - 6x + 9 = 0, \qquad (x - 3)^2 = 0, \qquad x_3 = x_4 = 3$$

$$L = \{-1,\ 3,\ 7\}$$

Diese Gleichung hat genau drei Lösungen (graphische Darstellung in Abb. L1c).

Die obigen allgemeinen Betrachtungen zeigen, dass eine quadratische Gleichung mit absoluten Beträgen maximal vier Lösungen haben kann. Es kann aber auch überhaupt keine Lösung geben oder auch zwei oder drei.

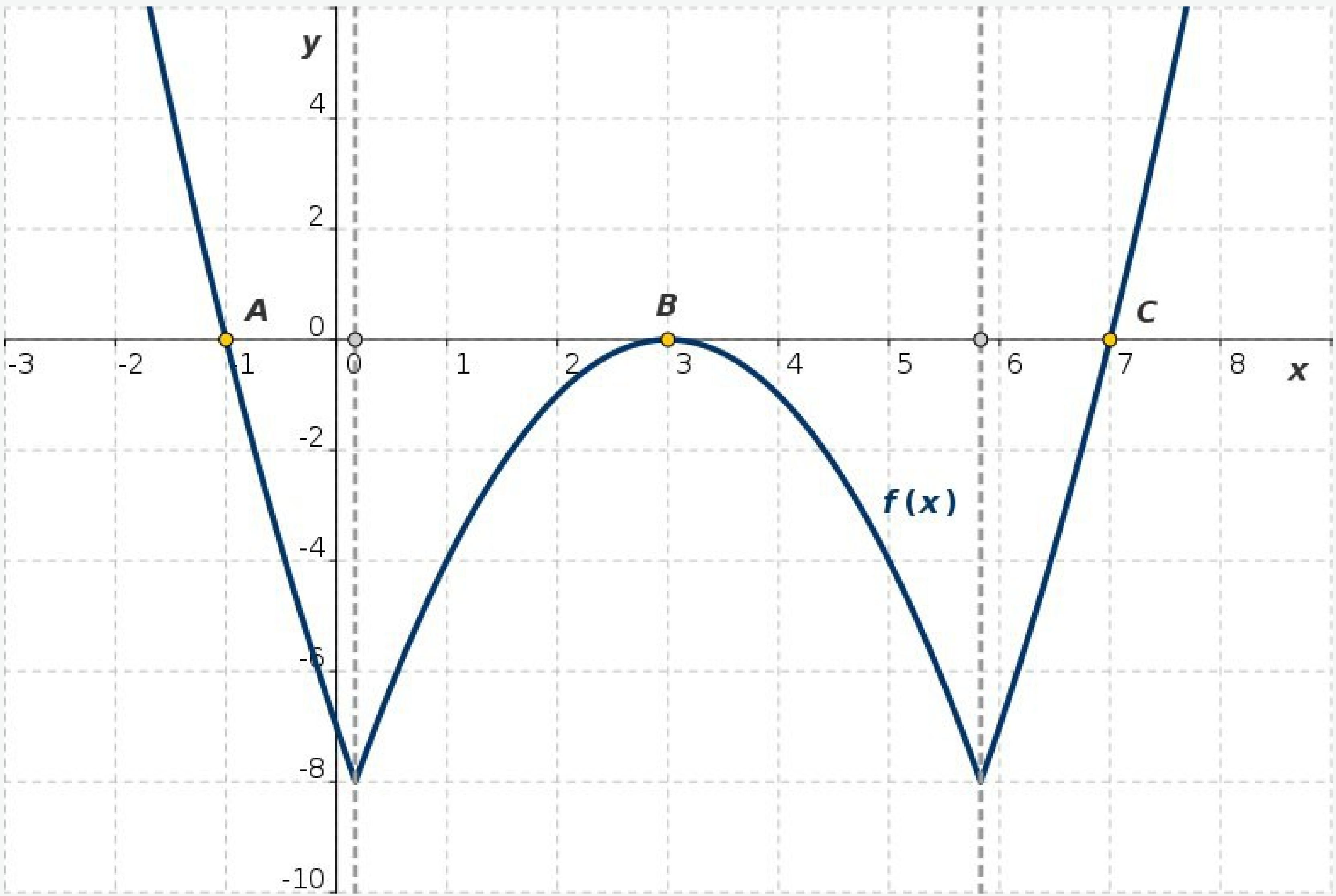

Abb. L1c: Die Funktion $y = f(x)$ und die Schnittpunkte mit der x-Achse

$$f(x) = |\, x^2 - 6x + 1 \,| - 8, \qquad A = (-1,\ 0), \quad B = (3,\ 0), \quad C = (7,\ 0)$$

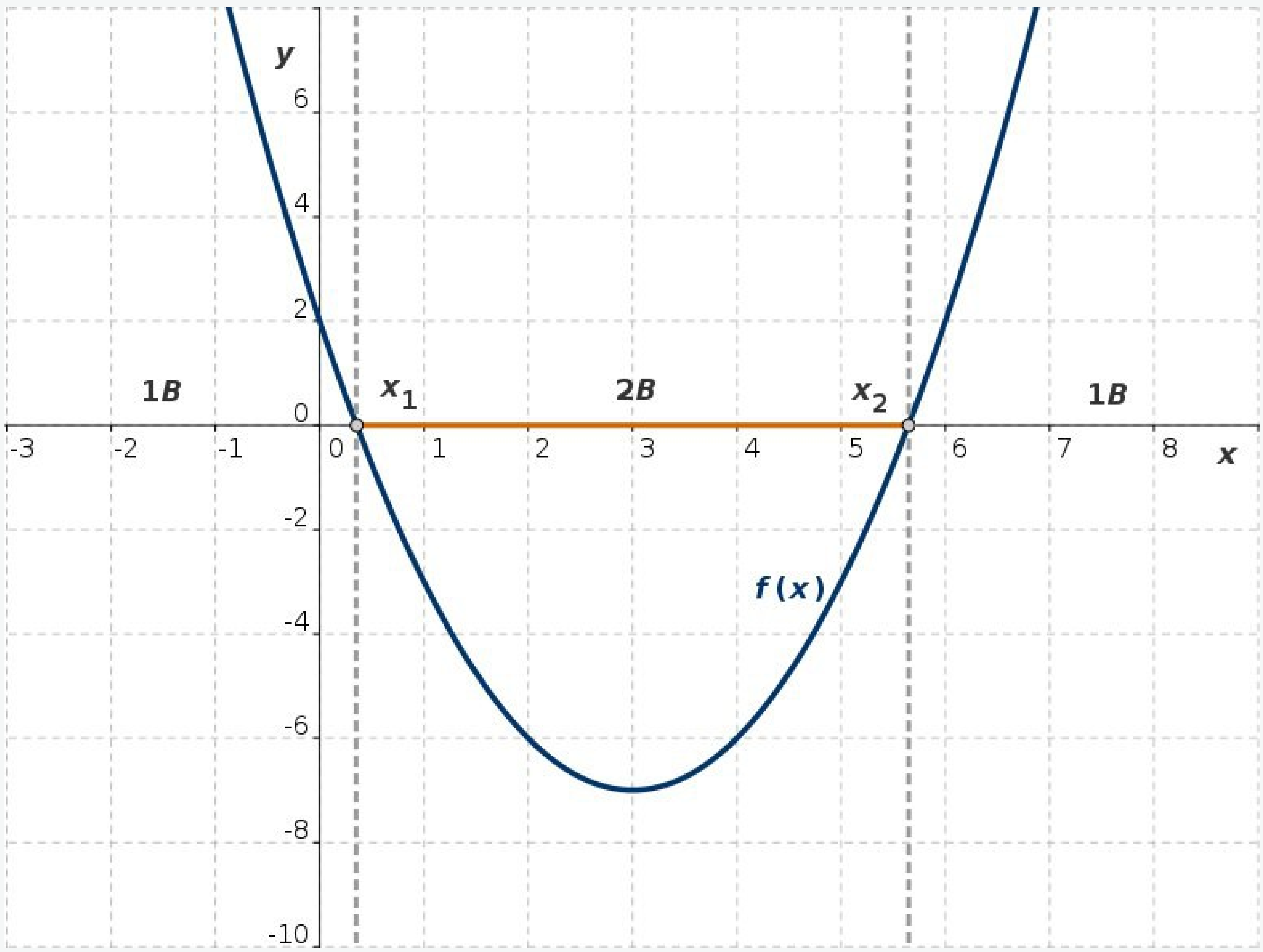

Abb. L2a: Die Funktion $y = f(x)$ und die Schnittpunkte mit der x-Achse

$$f(x) = x^2 - 6x + 2$$

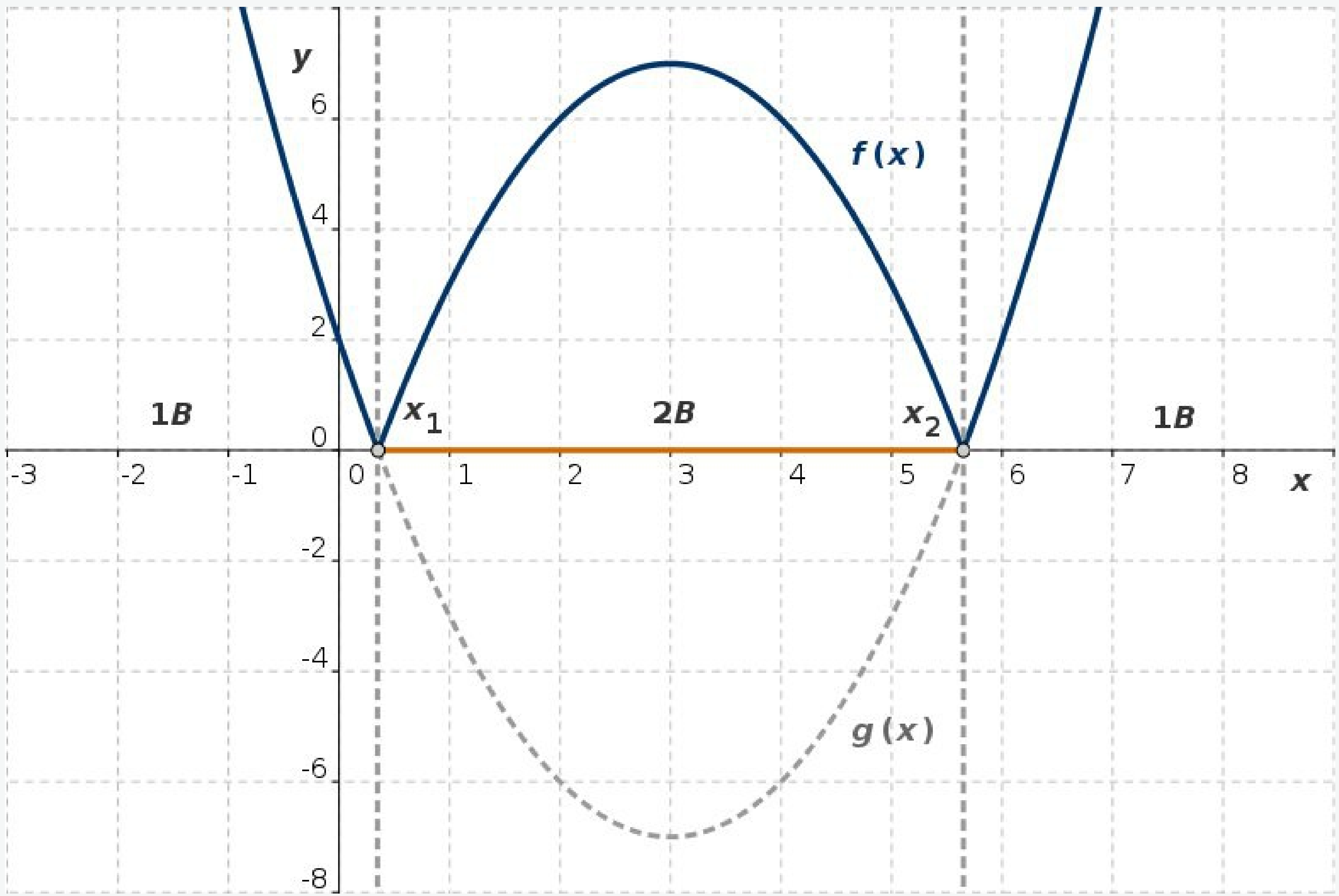

Abb. L2b: Die Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = |\, x^2 - 6x + 2 \,|, \qquad g(x) = x^2 - 6x + 2$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 2$$

$f(x)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Die Abb. *L2a* zeigt, dass sie zwei Schnittpunkte mit der x-Achse hat. Um diese Schnittpunkte zu bestimmen, lösen wir entsprechende quadratische Gleichung:

$$x^2 - 6x + 2 = 0, \qquad x_a = 3 - \sqrt{7}\,, \qquad x_b = 3 + \sqrt{7}$$

Im Bereich 1B: $\quad (-\infty\,,\ x_a\,] \cup [\,x_b\,,\ \infty)$

sind die Funktionswerte positiv oder gleich 0,

im Bereich 2B: $(x_1\,,\ x_2)$ sind die Funktionswerte negativ.

Dementsprechend kann man die Betragsgleichung in folgender Form darstellen:

1 Fall (1B): $\quad x^2 - 6x + 2 \geqslant 0$

$$|\,x^2 - 6x + 2\,| - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x - 7 = 0$$

2 Fall (2B): $\quad x^2 - 6x + 2 < 0$

$$|\,x^2 - 6x + 2\,| - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x + 11 = 0$$

Quadratische Gleichungen mit absoluten Beträgen: Lösung 2

1 Fall: $x^2 - 6x + 2 \geqslant 0 \qquad (1B)$

$x^2 - 6x - 7 = 0, \qquad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 7}$

$x_1 = -1, \qquad x_2 = 7$

2 Fall: $x^2 - 6x + 2 < 0 \qquad (2B)$

$x^2 - 6x + 11 = 0, \qquad D < 0$

$L = \{-1, \ 7\}$

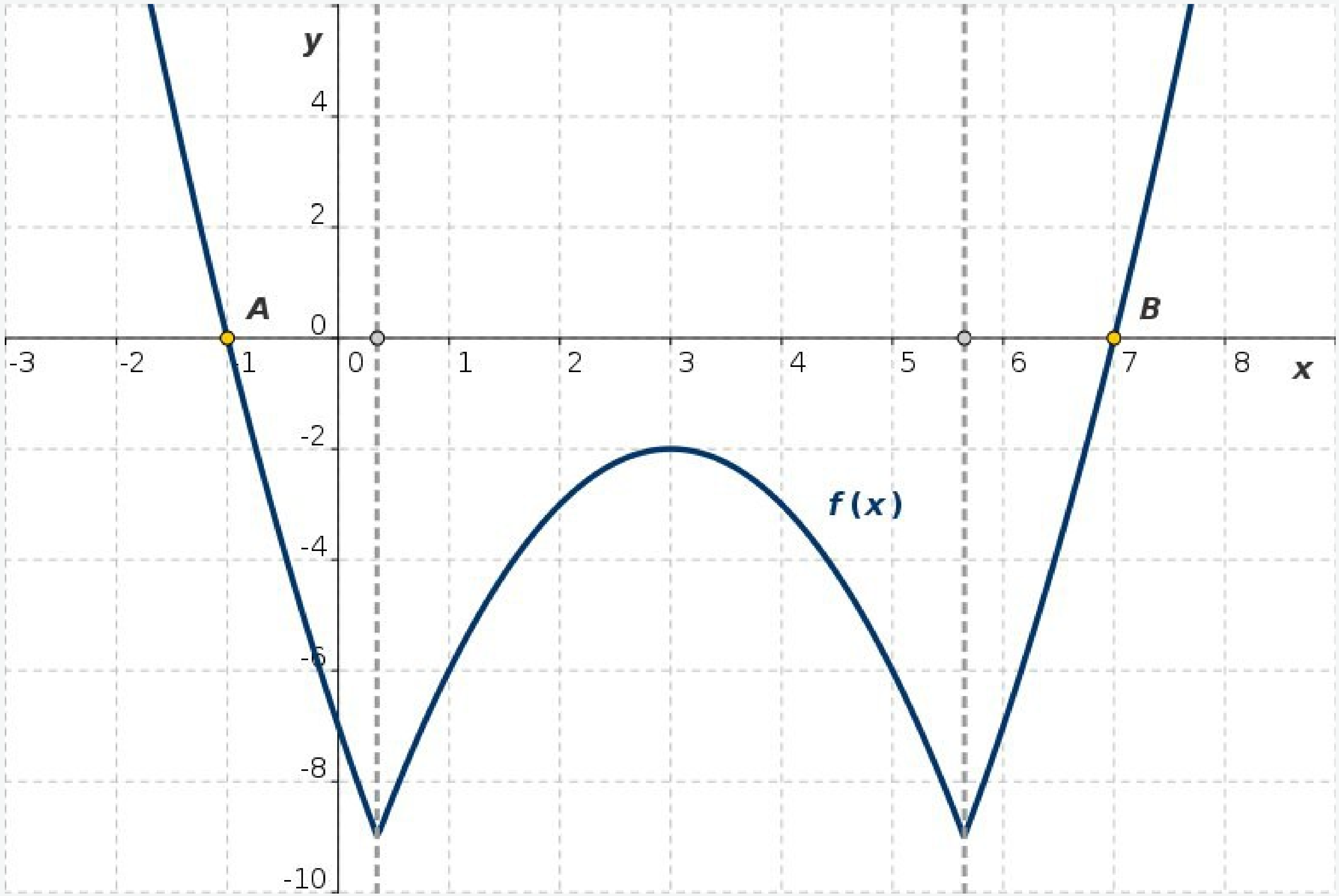

Abb. L2c: Die Funktion $y = f(x)$ und die Schnittpunkte mit der x-Achse

$$f(x) = |\, x^2 - 6x + 2 \,| - 9, \qquad A = (-1,\ 0), \quad B = (7,\ 0)$$