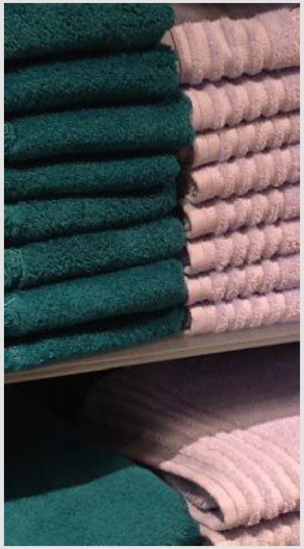
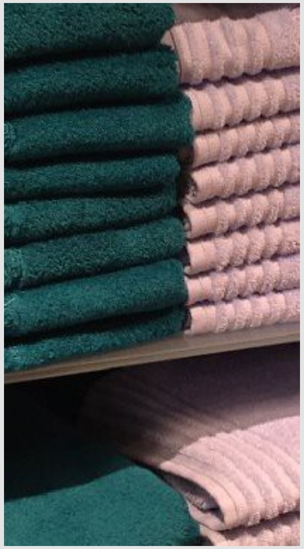
Klassifikation von Funktionen



Definition:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt rational, wenn auf die unabhängige Variable x nur endlich viele Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) angewendet werden.

Alle anderen Funktionen heißen irrational.



Zu den rationalen Funktionen gehören:

- die linearen Funktionen

  $y = a\,x + b \qquad (x\,,\ a\,,\ b \in \mathbb{R})$

- die quadratischen Funktionen

  $y = a\,x^2 + b\ x + c \qquad (x\,,\ a\,,\ b\,,\ c\ \in\ \mathbb{R}\,,\quad a \neq 0)$

- $y = x^{\,n}\,, \qquad y = \dfrac{1}{x^{\,n}} \qquad (n \in \mathbb{N})$

- $y = \dfrac{x}{x^{\,2} + 1}\,, \qquad y = -\,\dfrac{5\,x}{x^{\,3} - 7}$

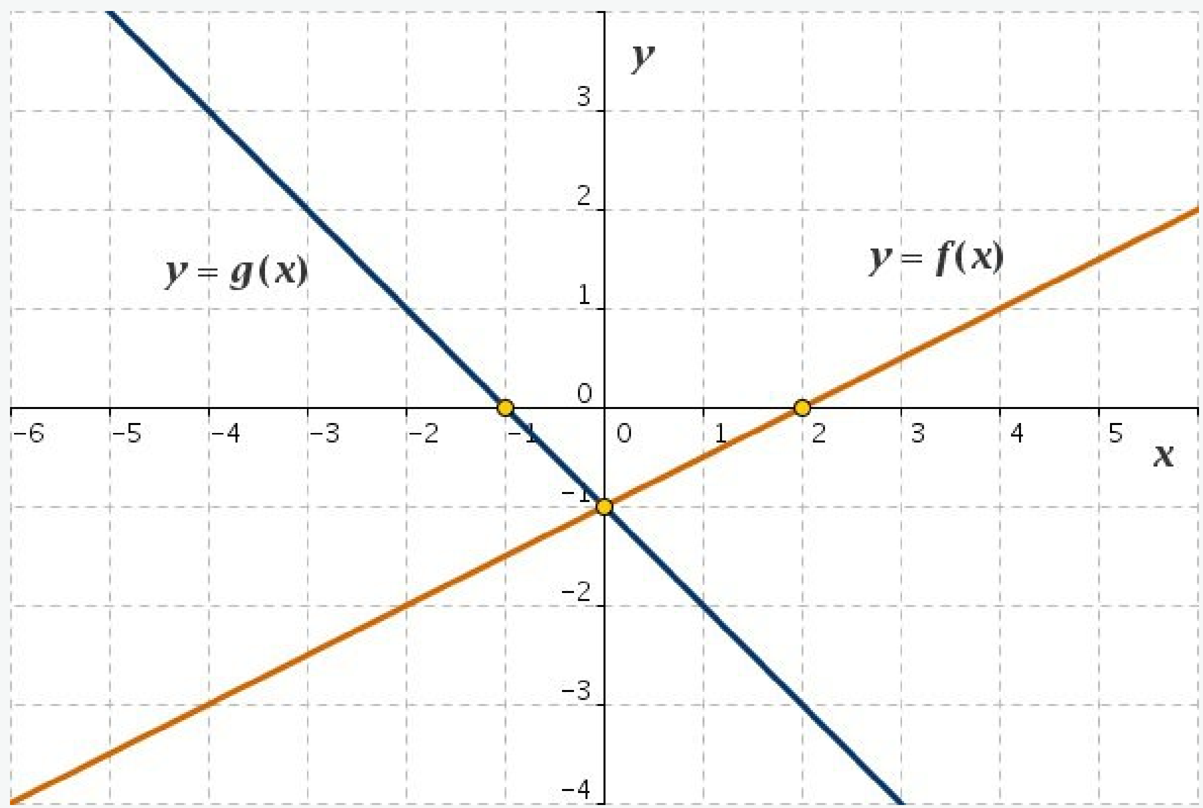


Abb. 1: Lineare Funktionen y = f (x) (rot) und y = g (x) (blau)

$y = a\,x + b \quad (a\,,\ b \in \mathbb{R})$ – allgemeine Funktionsgleichung

$$y = f\,(x): \quad f\,(x) = \frac{x}{2} - 1, \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = -1$$

$$y = g\,(x): \quad g\,(x) = -x - 1, \quad a = -1, \quad b = -1$$

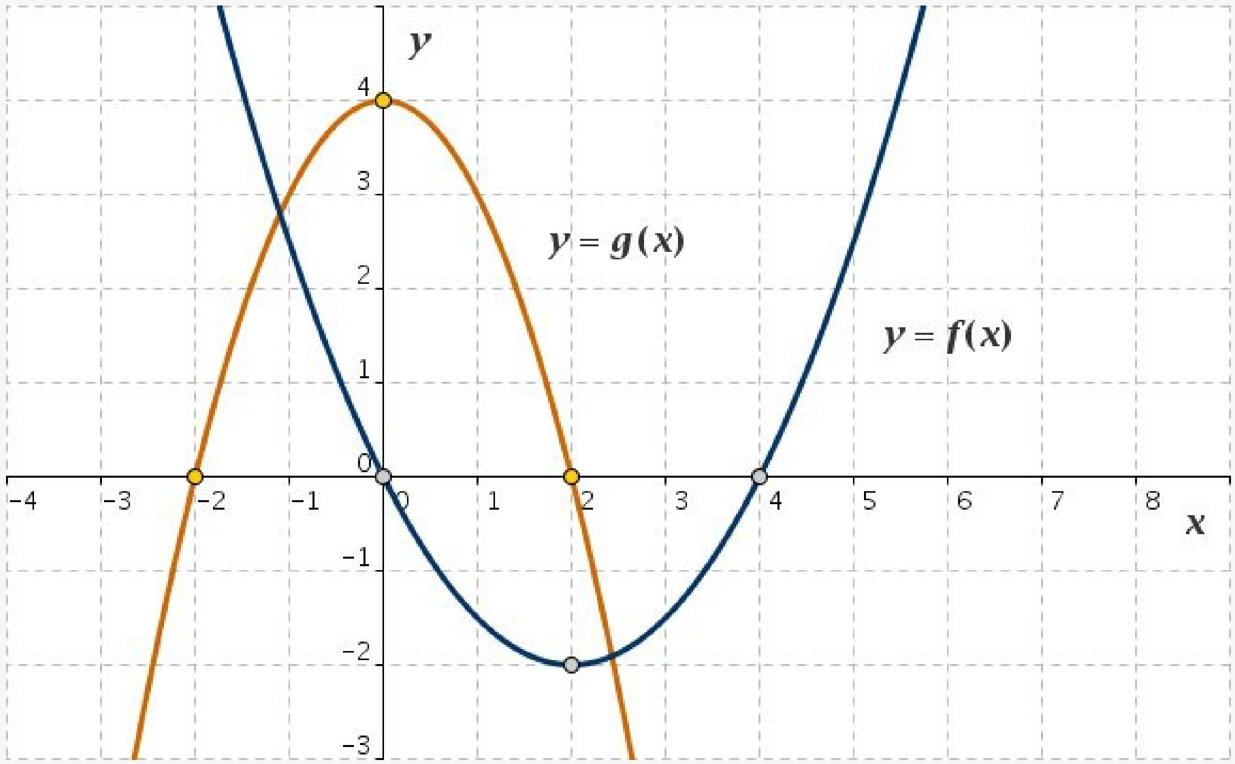


Abb. 2: Quadratische Funktionen $y = f(x)$ (blau) und $y = g(x)$ (rot)

$$y = a\,x^2 + b\;x + c \quad (x,\, a,\, b,\, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0)$$

$$y = f(x): \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - 2\,x, \qquad a = \frac{1}{2}, \quad b = -2, \quad c = 0$$

$$y = g(x): \quad f(x) = -x^2 + 4, \qquad a = -1, \quad b = 0, \quad c = 4$$

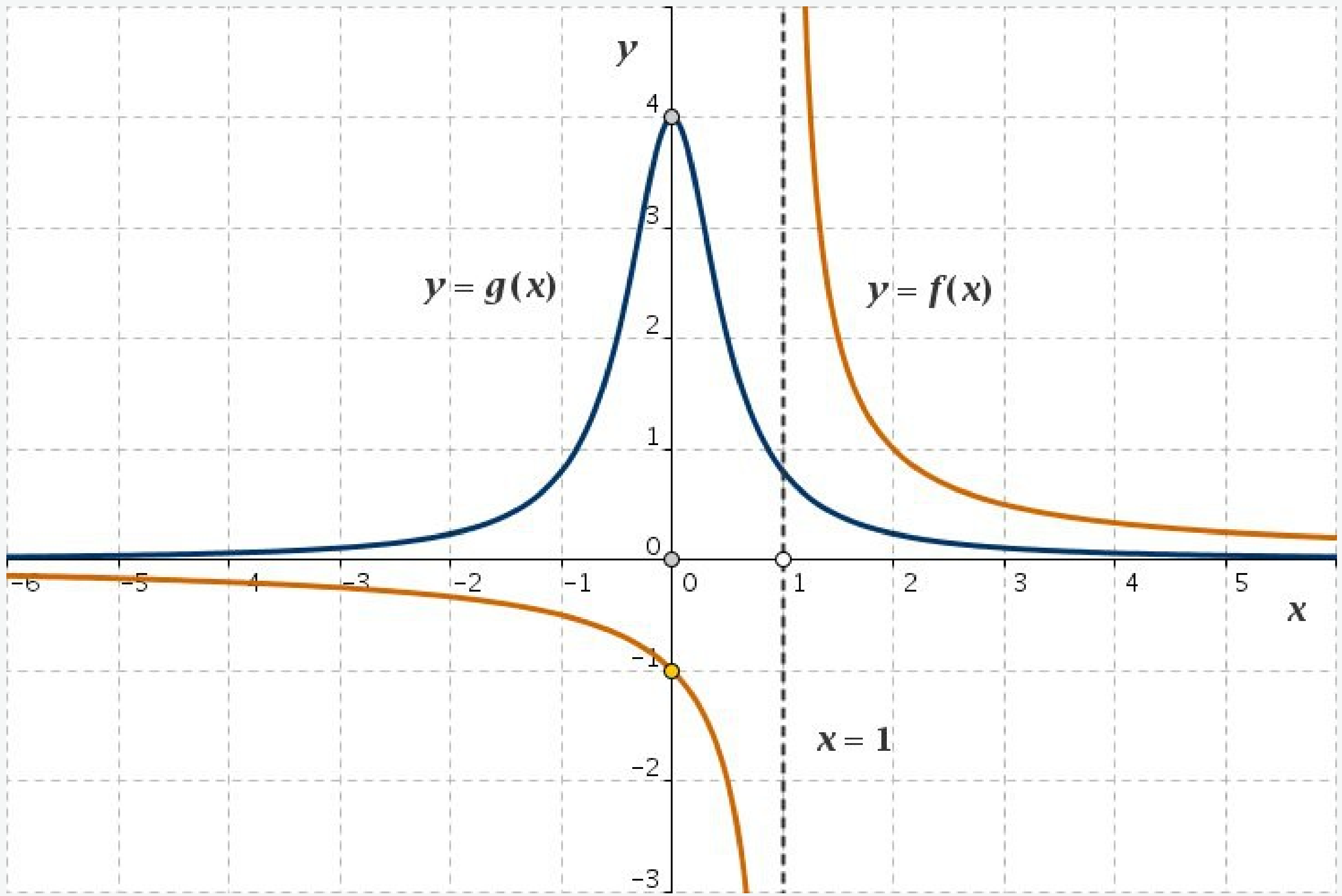
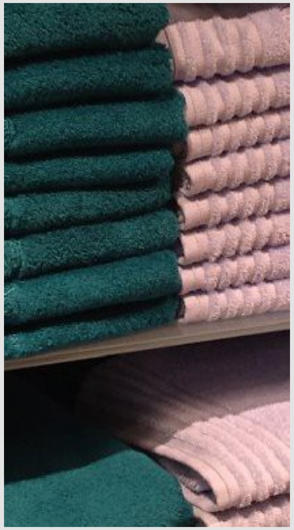


Abb. 3: Rationale Funktionen y = f (x) (rot) und y = g (x) (blau)

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}, \qquad g(x) = \frac{4}{4x^2 + 1}$$



Definition:

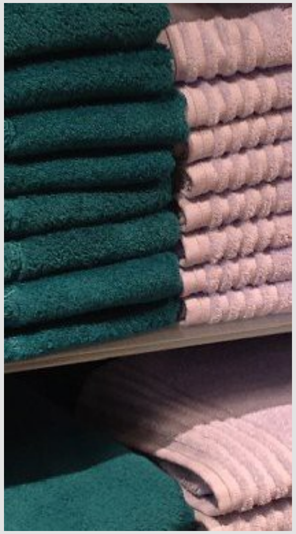
Funktionen vom Typ

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

werden als ganzrationale Funktionen oder Polynomfunktionen bezeichnet. Die reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen Polynomkoeffizienten, der höchste Exponent n in der Funktionsgleichung bestimmt den Polynomgrad.

Auf die unabhängige Variable x werden nur die Operationen Addition, Subtraktion, und Multiplikation angewendet.

$y = a_0$	Konstante Funktion
$y = a_1\, x + a_0$	Lineare Funktion
$y = a_2 x^2 + a_1\, x + a_0$	Quadratische Funktion
$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1\, x + a_0$	Kubische Funktion



Zu den irrationalen Funktionen gehören:

- $y = x^n \qquad (n \notin \mathbb{Z})$

- die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen, z.B.

  $$y = \sin x\,, \qquad y = \tan x\,, \qquad y = \arcsin x$$

- die Exponentialfunktionen und ihre Umkehrfunktionen, z.B.

  $$y = e^x\,, \qquad y = \ln x$$

- alle zusammengesetzte Funktionen, die mindestens ein nicht rationaler Bestandteil haben, z. B.

  $$y = x \cdot e^x + 2, \qquad y = \ln x - 2\,x^3 + 3$$

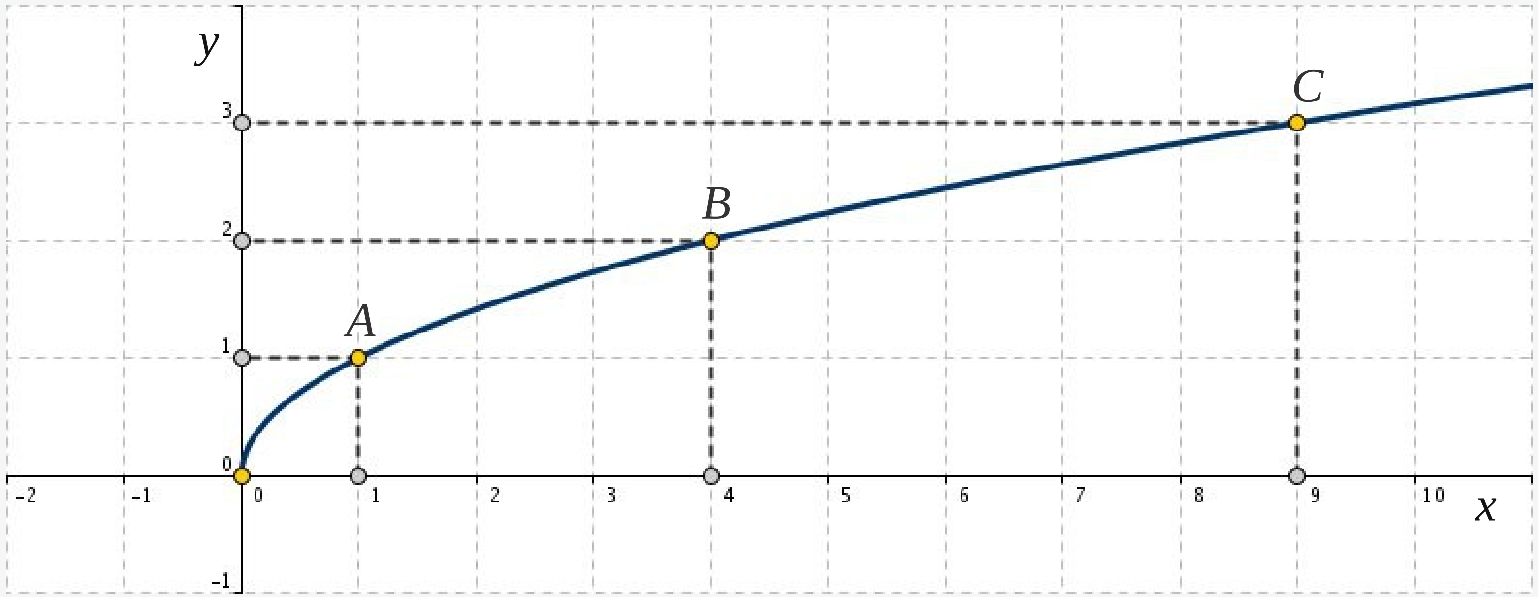


Abb. 4: Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$

$$y = \sqrt{x}$$

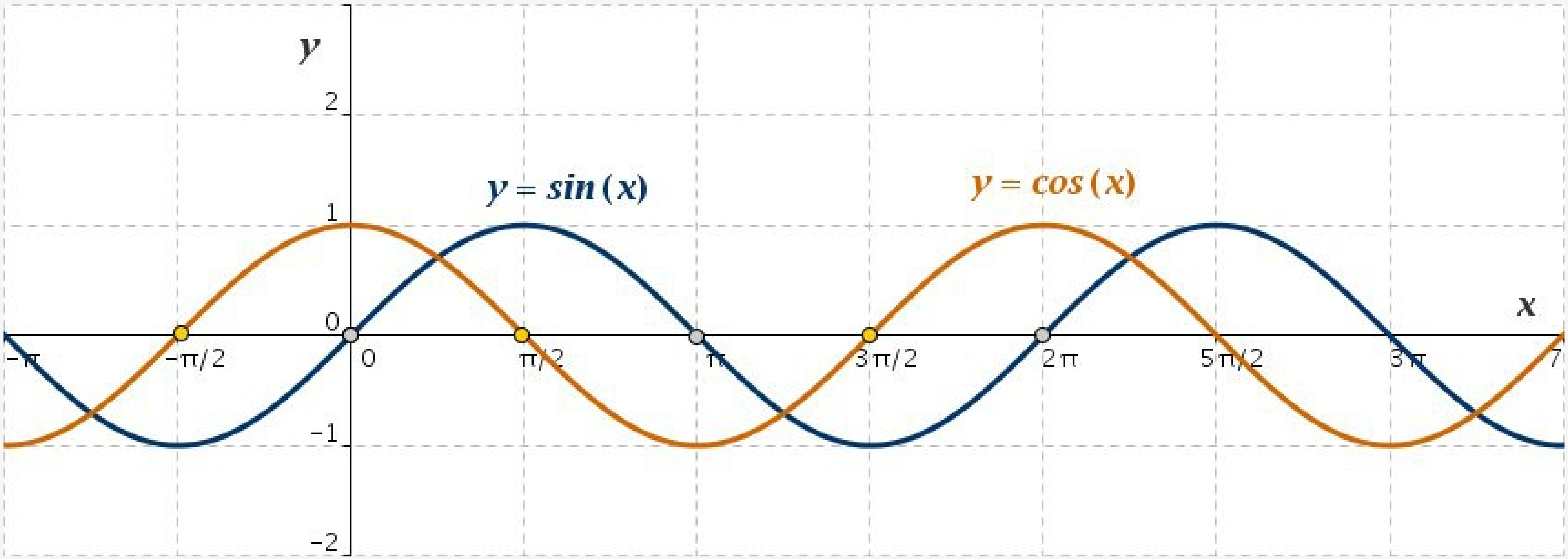


Abb. 5: Trigonometrische Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$

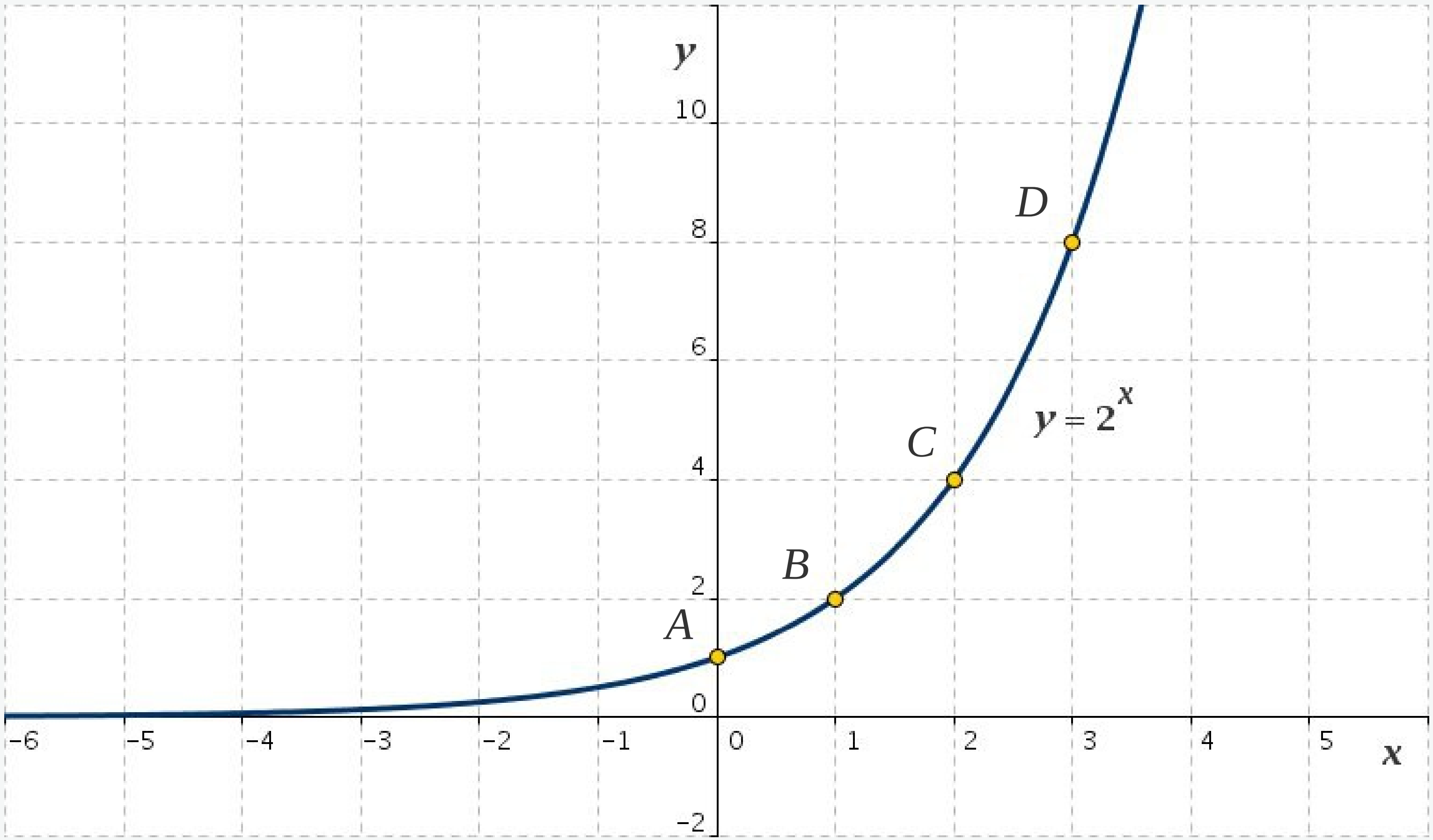


Abb. 6: Exponentialfunktion $y = f(x)$

$$A = (0,\ 2^0) = (0,\ 1), \qquad B = (1,\ 2^1) = (1,\ 2)$$

$$C = (2,\ 2^2) = (2,\ 4), \qquad D = (3,\ 2^3) = (3,\ 8)$$

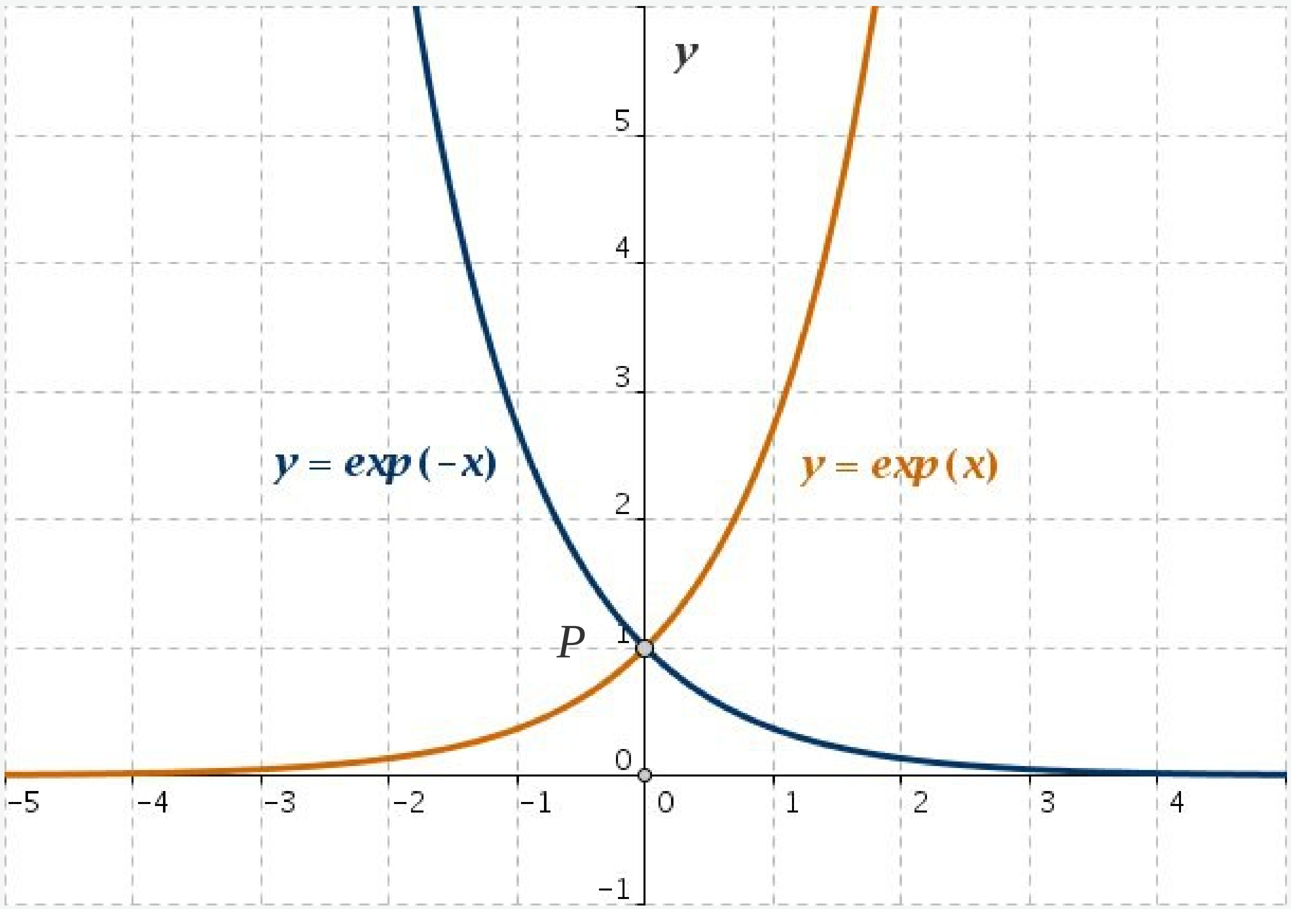


Abb. 7: Exponentialfunktionen $y = exp\ (x)$ (rot) und $y = exp\ (-x)$ (blau)

Der Punkt P ist ein gemeinsamer Punkt der Funktionen $y = exp\ (x)$ und $y = exp\ (-x)$.