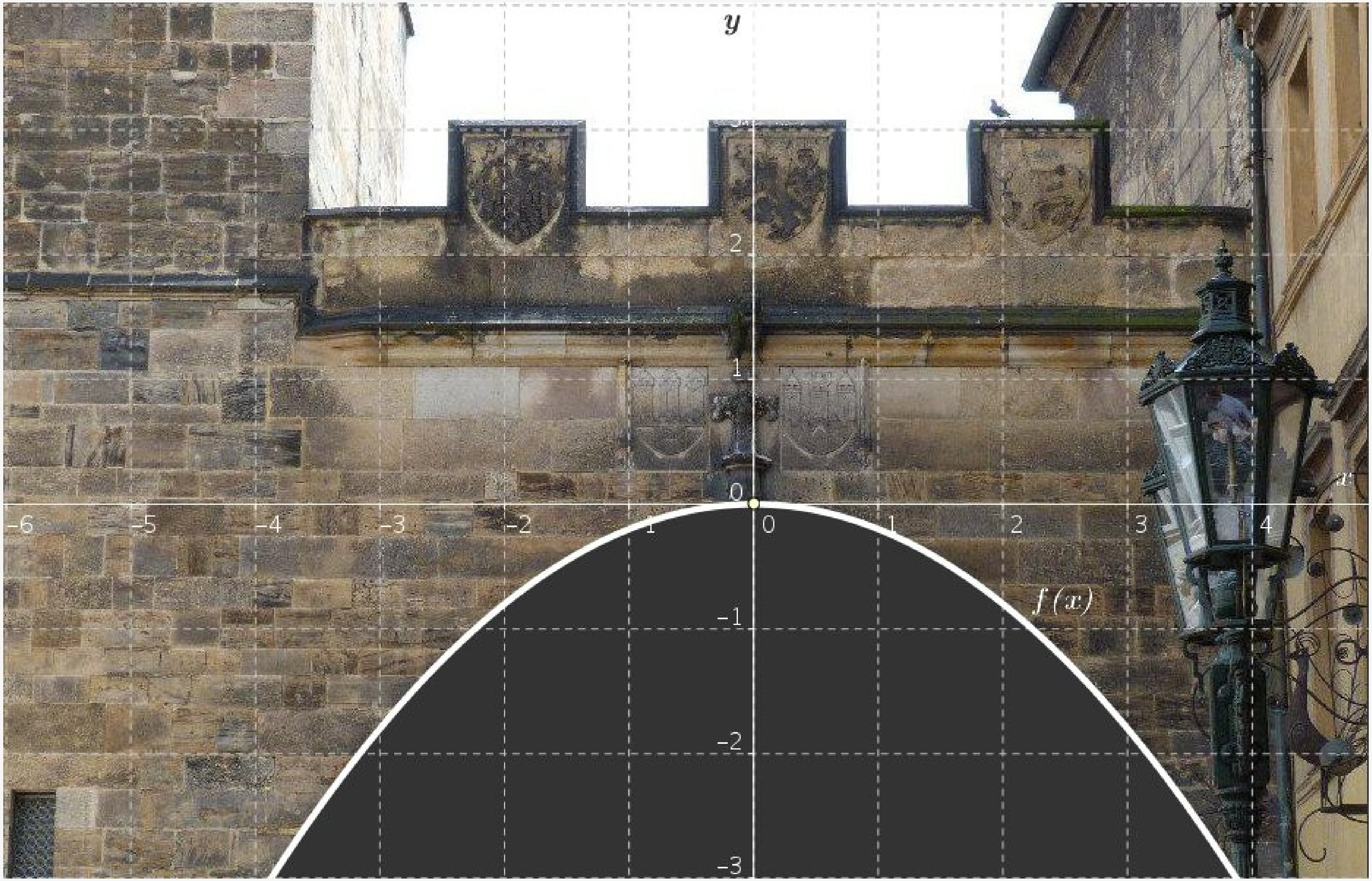

Der Funktionsbegriff

Definition:

Unter einer Funktion versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet.

Diese Zuordnung wird durch das Funktionszeichen f in der Form $y = f(x)$ symbolisch ausgedrückt.

x : unabhängige Veränderliche (Variable) oder Argument

y : abhängige Veränderliche (Variable) oder Funktionswert

D : Definitionsbereich der Funktion

W : Wertebereich der Funktion

Definitionbereich und Wertebereich

Zur vollständigen Beschreibung einer reellen Funktion f bzw. einer reellen Relation R gehört die Angabe des Definitionsbereiches $D(f)$ bzw. $D(R)$ und Wertebereiches $W(f)$ bzw. $W(R)$.

Der Definitionsbereich (D) einer Funktion $y = f(x)$ ist durch die Menge aller Werte gegeben, welche die unabhängige Variable (häufig x) annehmen kann.

Der Wertebereich (W) einer Funktion $y = f(x)$ besteht aus allen Werten (häufig y), welche die Funktion annehmen kann.

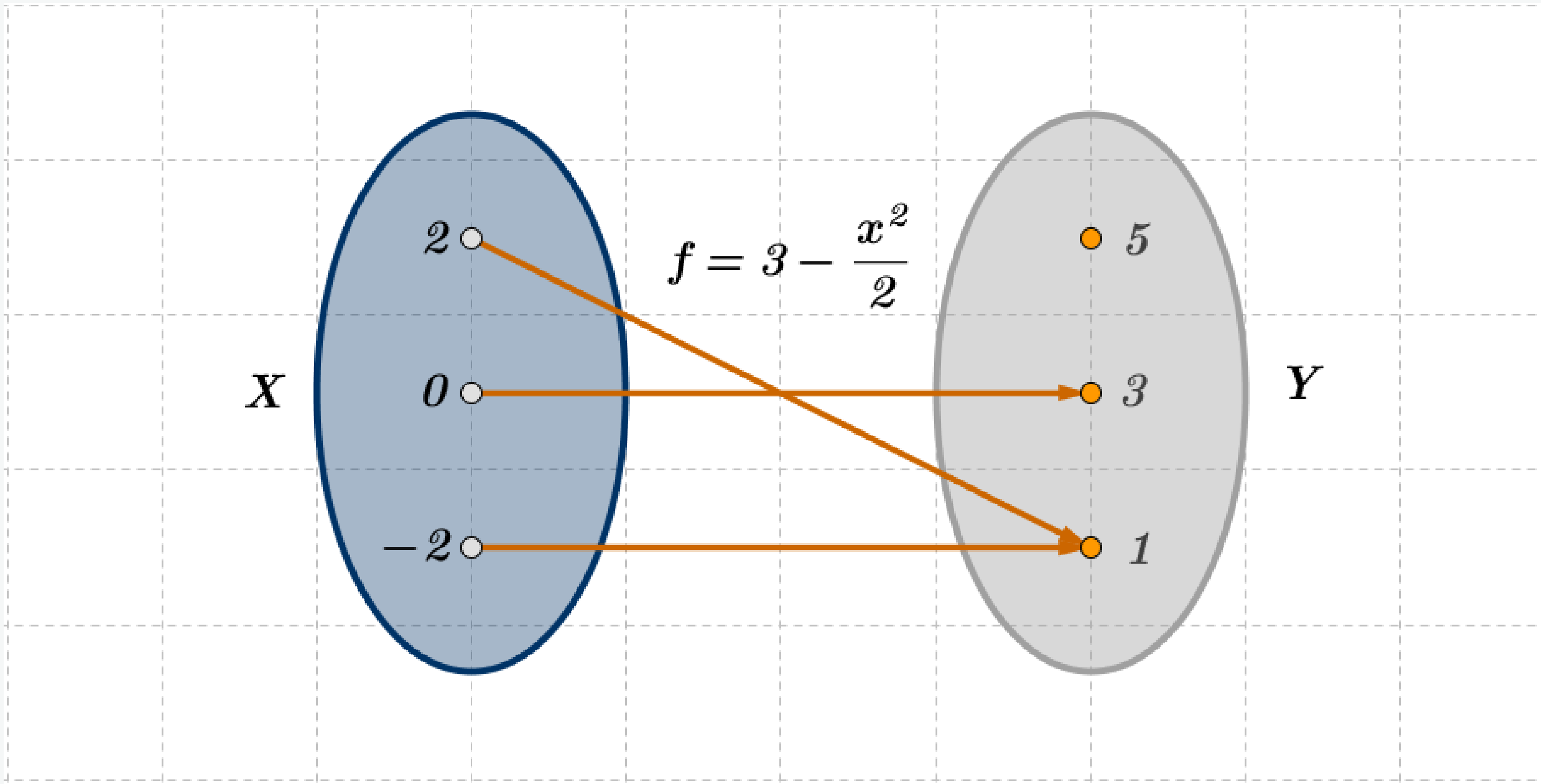

Abb. B1-a: Die Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y mit der Vorschrift f (x)

$$X = \{-2,\ 0,\ 2\}, \quad Y = \{1,\ 3,\ 5\}, \quad X \to Y, \quad x \to f(x), \quad f(x) = 3 - \frac{x^2}{2}$$

$$\{(x,\ f(x))\} = \{(-2,\ 1),\ (0,\ 3),\ (2,\ 1)\}$$

$$D(f) = X, \quad W(f) \neq Y, \quad 5 \notin W(f),$$

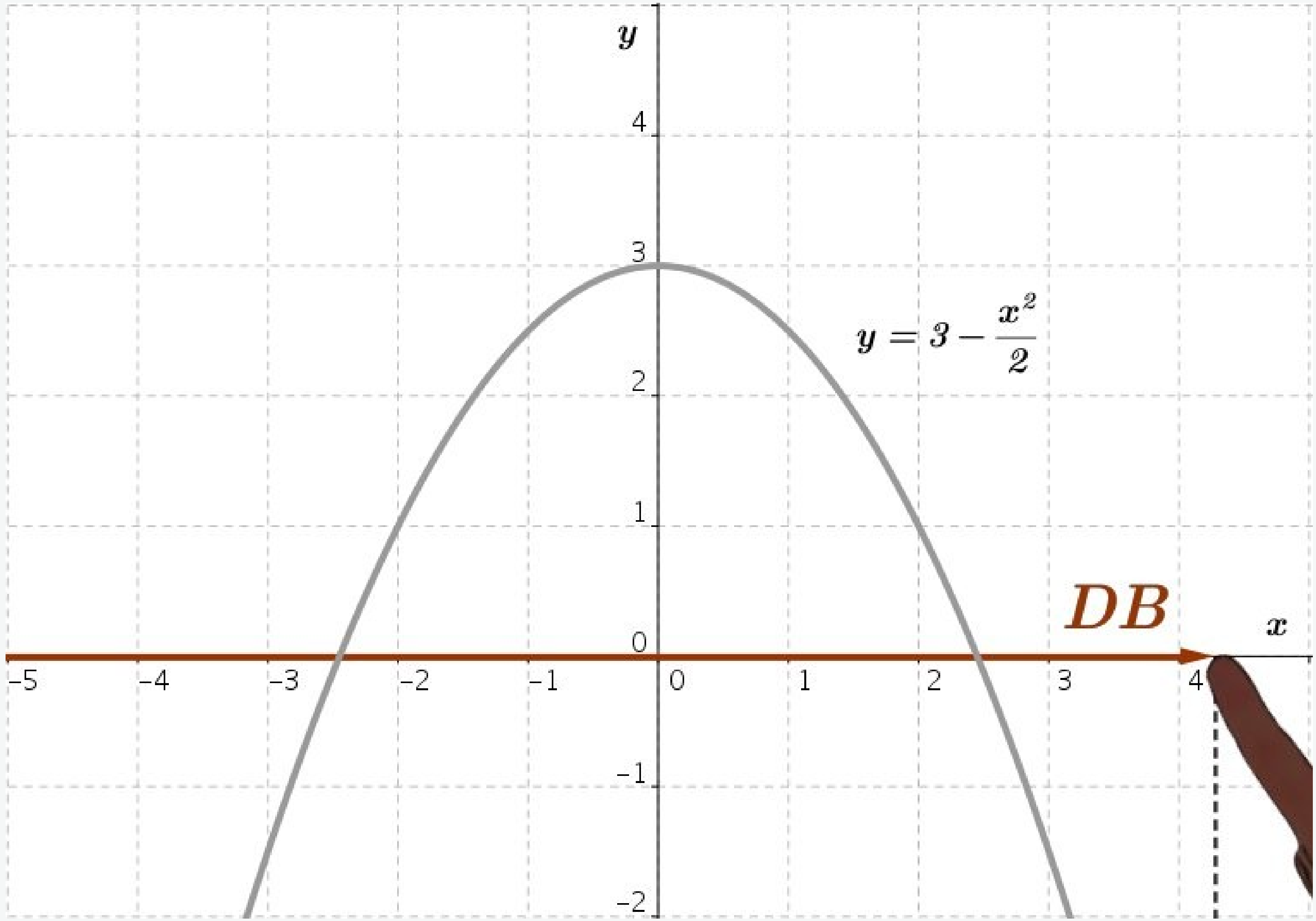

Abb. B1-b: Die reelle Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = 3 - \frac{x^2}{2}, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad W(f) = (-\infty, 3]$$

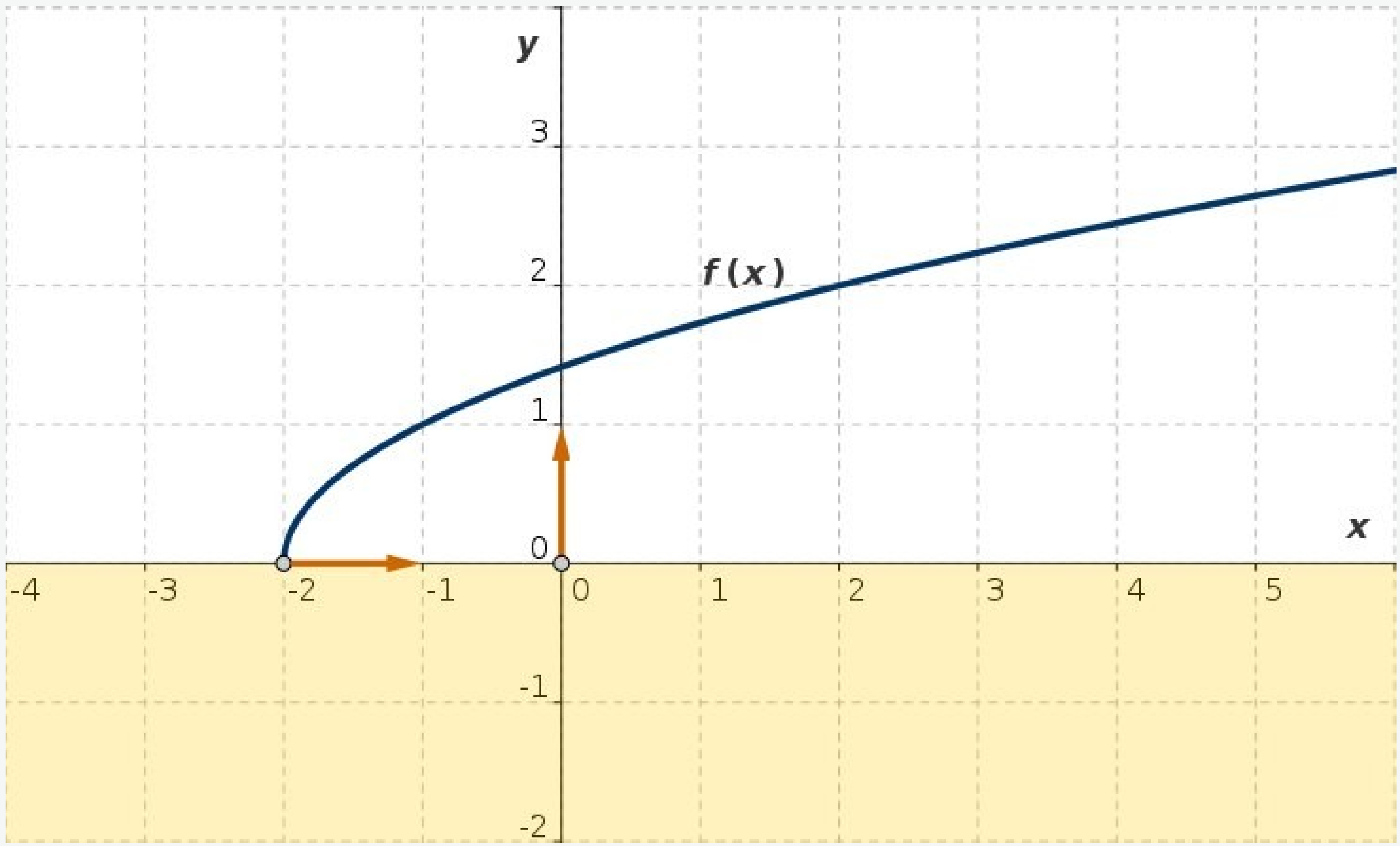

Abb. B2: Die reelle Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \sqrt{x + 2}\,, \qquad D(f) = [-2, \infty)\,, \qquad W(f) = [0, \infty)$$

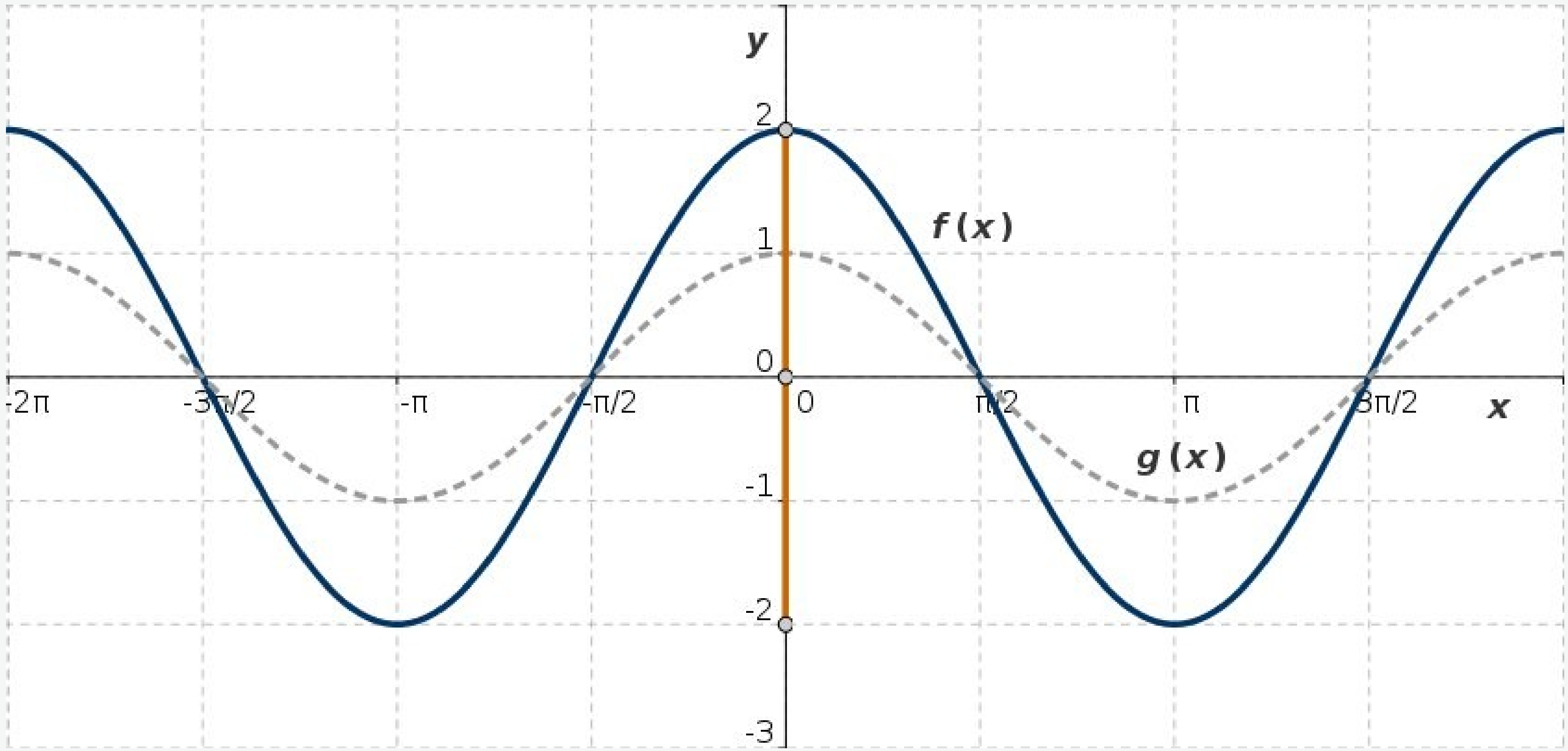

Abb. B3: Die reelle Funktion y = f (x)

$$f(x) = 2\cos x\,, \qquad g(x) = \cos x\,, \qquad D(f) = \mathbb{R}\,, \qquad W(f) = [-2,\ 2]$$

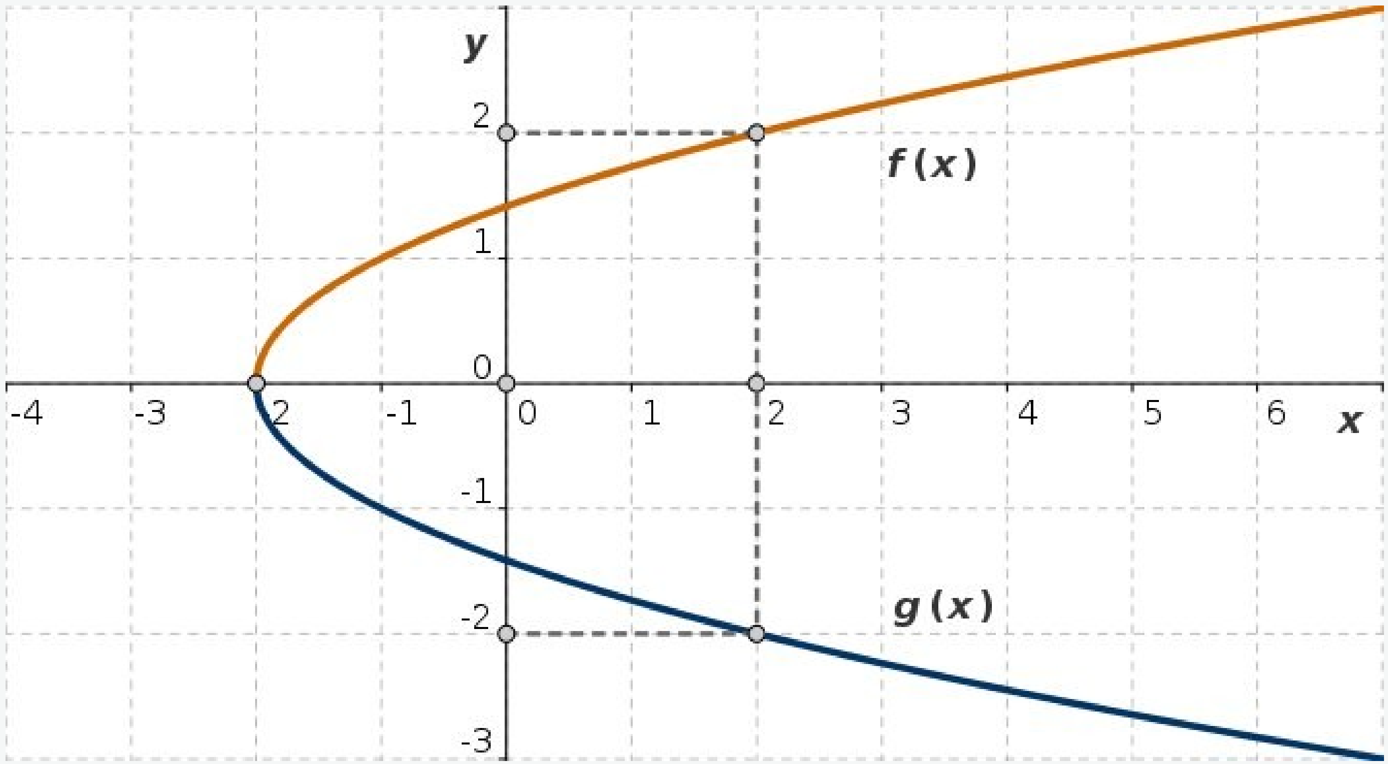

Abb. B4: Die reelle Relation R

$$y^2 = x + 2 \;\; - \text{Relationsgleichung}$$

$$(R) \quad y^2 = x + 2 \qquad : f(x) = \sqrt{x + 2}\,, \qquad g(x) = -\sqrt{x + 2}$$

$$D(R) = [-2, \infty)\,, \qquad W(R) = \mathbb{R}$$

Eine reelle Funktion: Beispiel 5

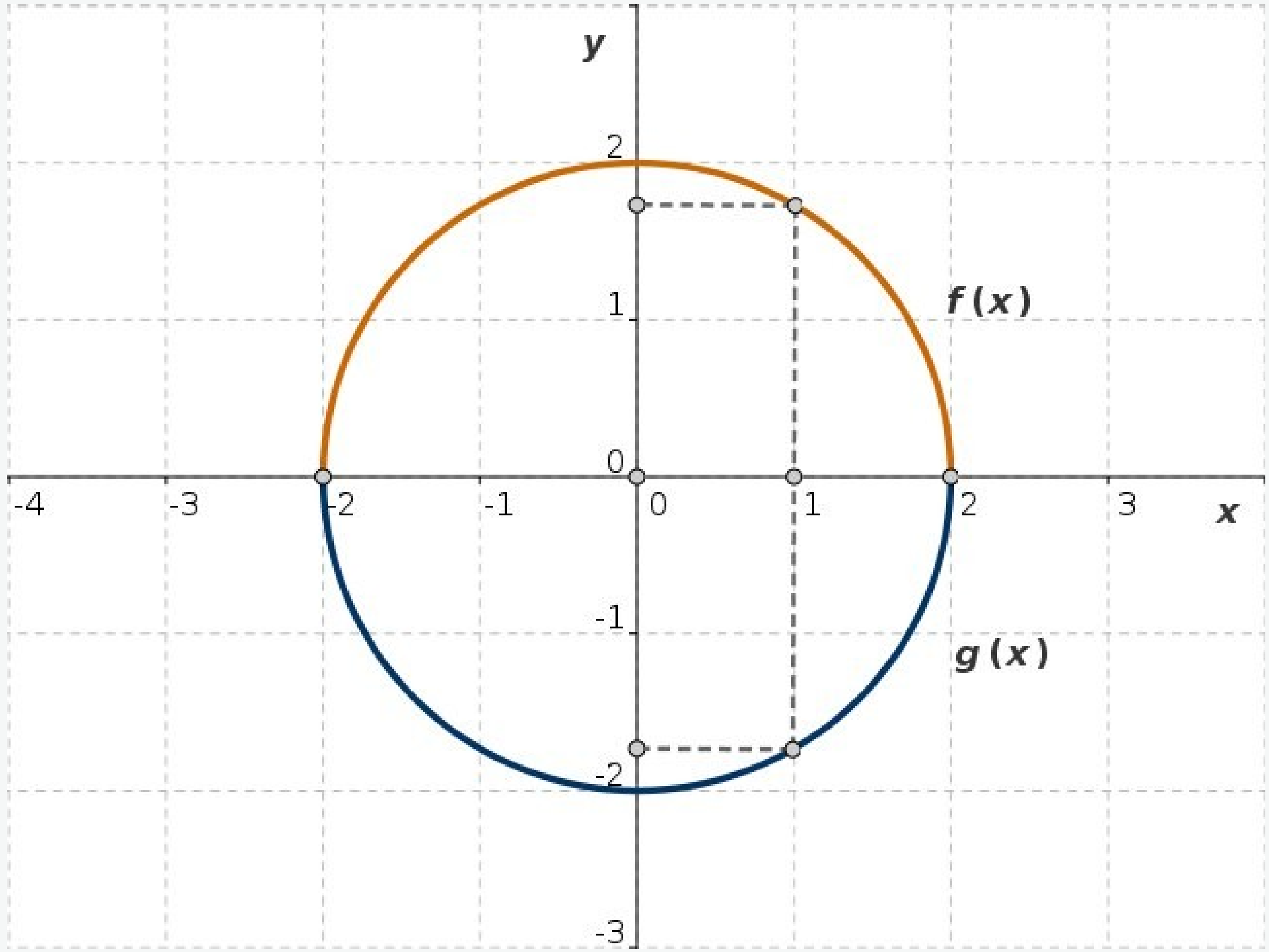

Abb. B4: Die reelle Relation R

$$R \quad : x^2 + y^2 = 4, \qquad f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

$$D(R) = [-2,\ 2], \qquad W(R) = [-2,\ 2]$$

Bei der Funktion $f\,(x, y)$ in den folgenden Beispielen

6) $f \quad : \mathbb{C} \;\to\; \mathbb{R}, \qquad f = \cos\left(|\, z\,|^2\right)$

7) $f \quad : \mathbb{C} \;\to\; \mathbb{R}, \qquad f\,(x\,,\,y) = 3\;e^{-|\,z\,|^2}$

8) $f \quad : \mathbb{C} \;\to\; \mathbb{R}, \qquad f = |\,z\,|^2 + \dfrac{1}{|\,z\,|^2}$

geht es um eine Abbildung der komplexen Zahlen $z = x + i\,y$ auf die reellen Zahlen. Der Graph der Funktion lässt sich als Fläche über der komplexen Zahlenebene darstellen.

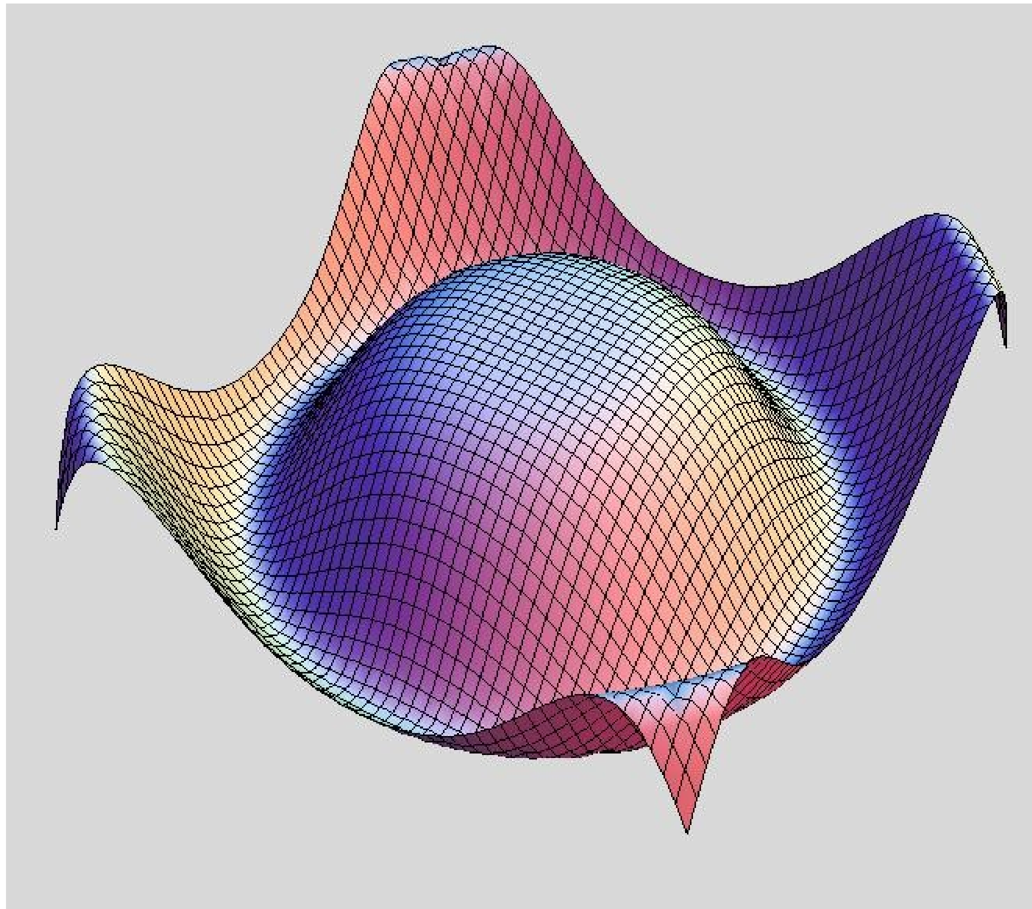

Abb. 3-1: Die komplexe Funktion f (x, y)

$$f(x, y) = \cos(|z|^2) = \cos(x^2 + y^2), \quad D(f) = \mathbb{C}, \quad W(f) = [-1, 1]$$

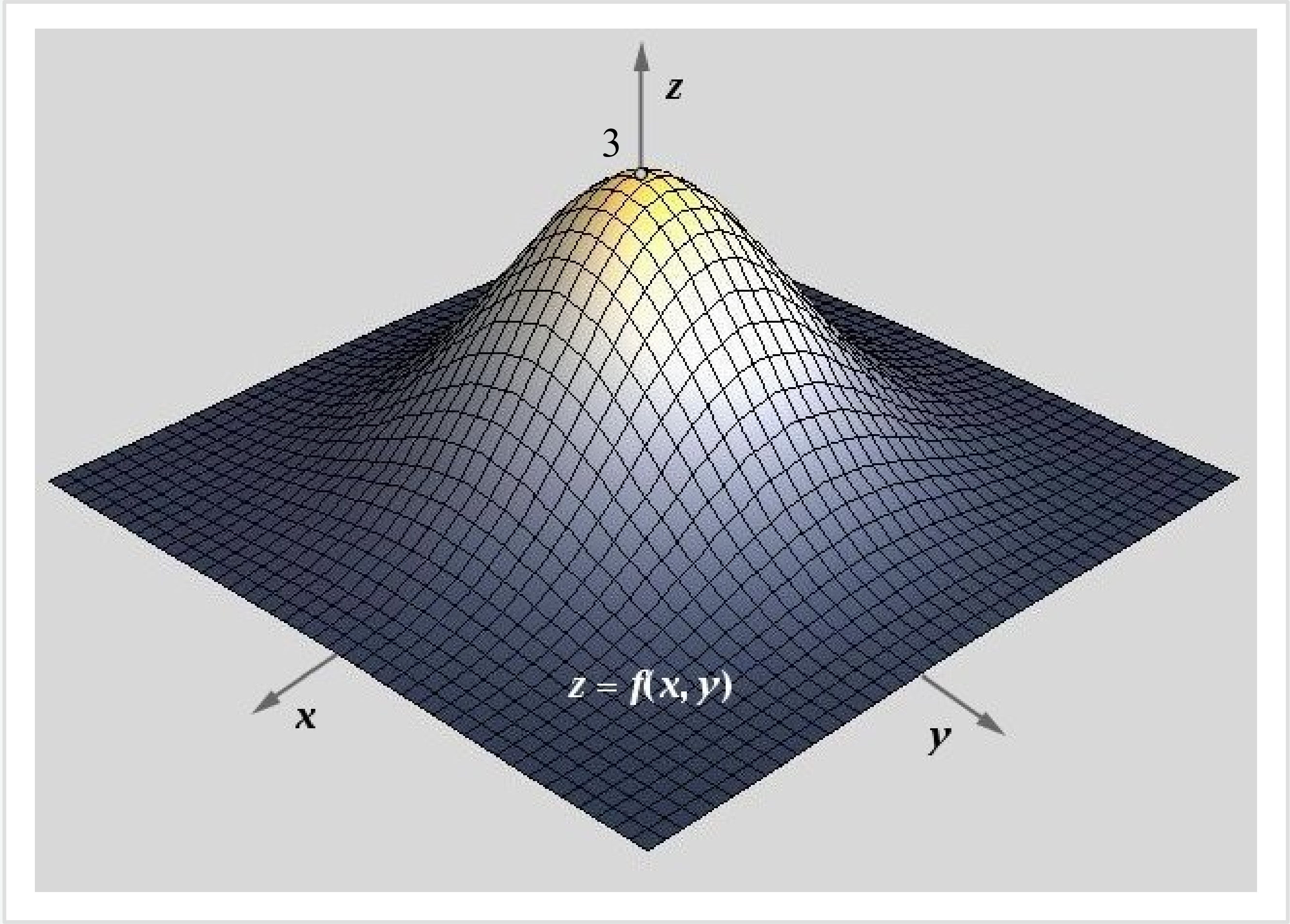

Abb. 3-2: Die komplexe Funktion $f(x, y)$

$$f(x, y) = 3\ e^{-|z|^2} = 3\ e^{-(x^2 + y^2)}, \qquad D(f) = \mathbb{C}, \qquad W(f) = (0, 3]$$

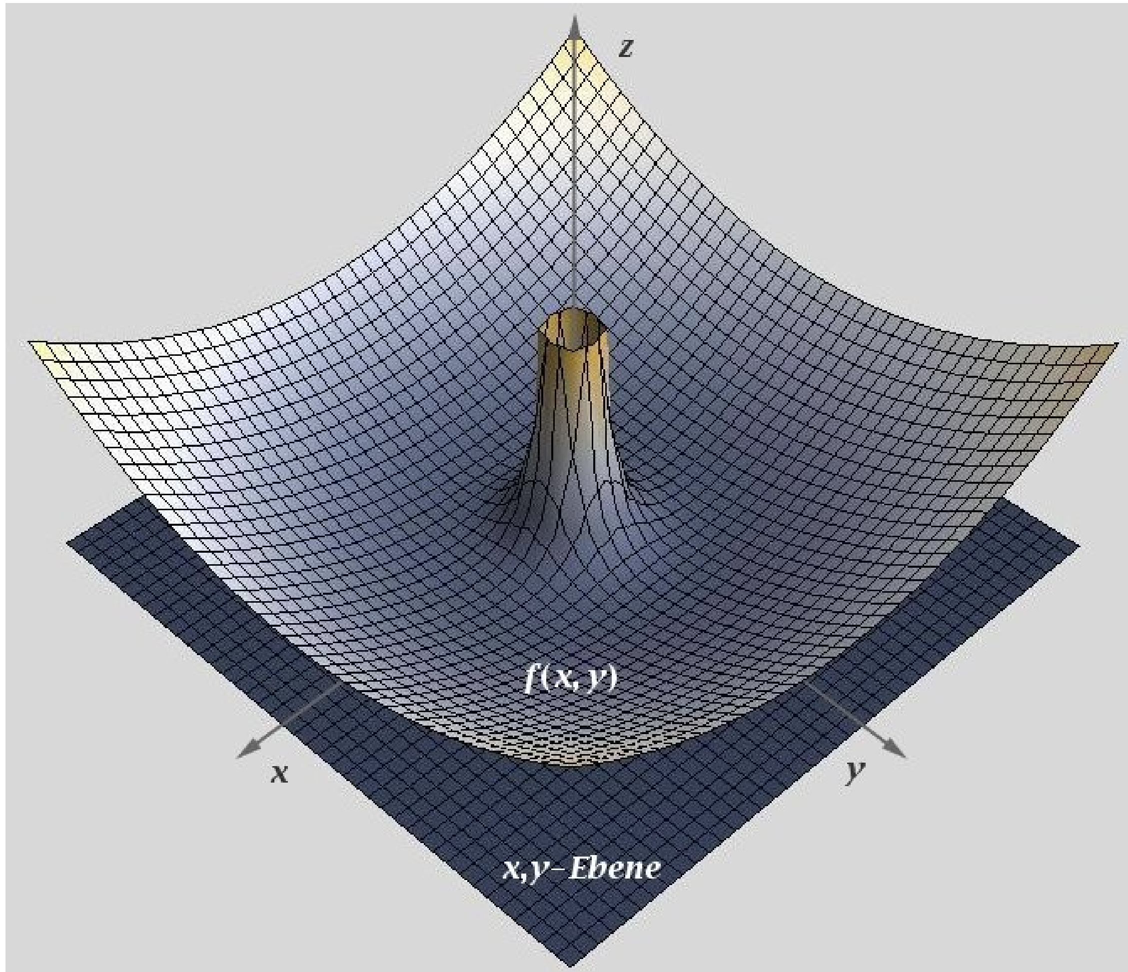

Abb. 3-3: Die komplexe Funktion f (x, y)

$$f(x, y) = |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad W(f) = (2, \infty)$$