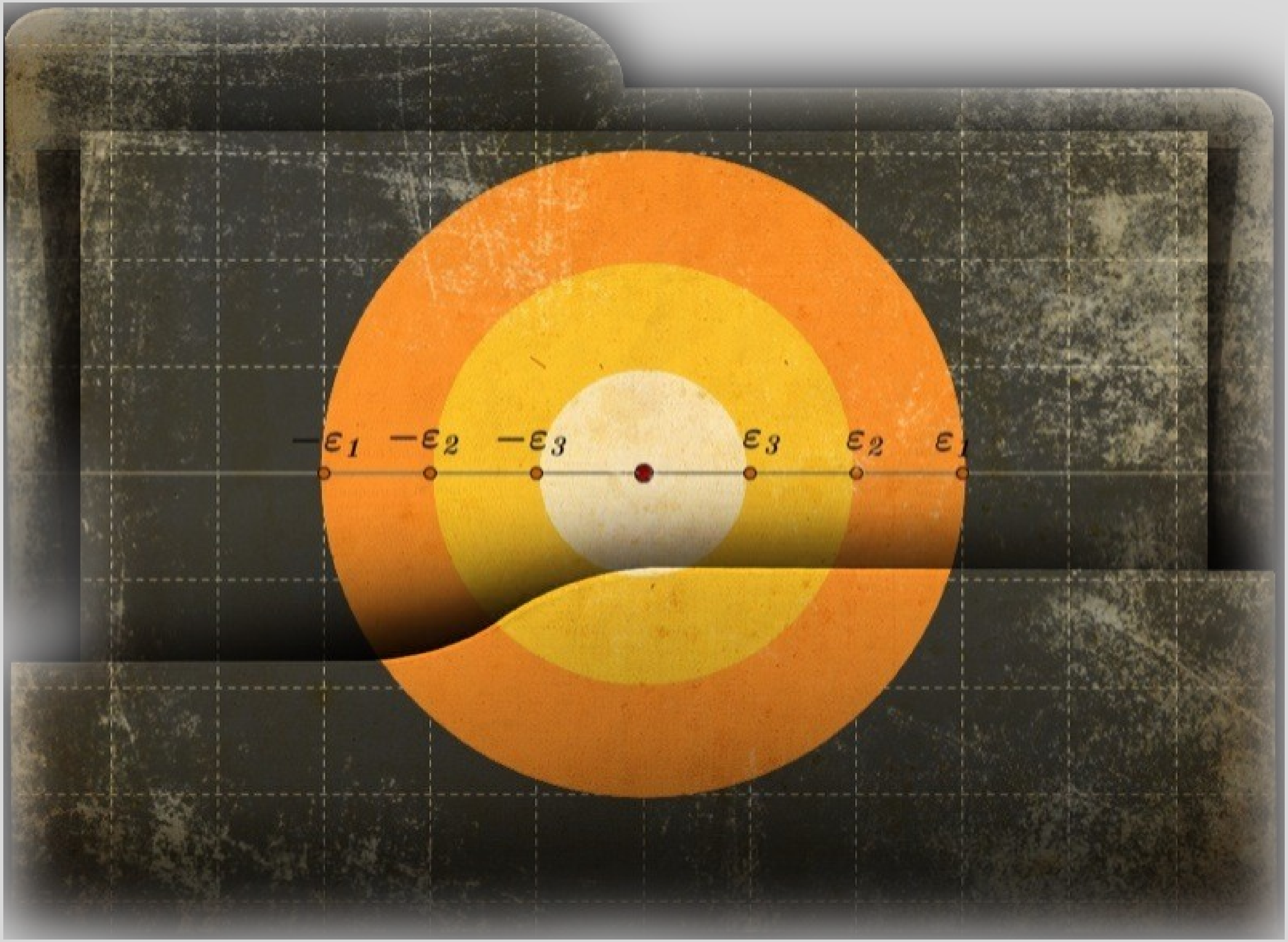

Konvergenz einer Folge

- Drei “Verhaltensmuster” von Folgen. Beispiele

  1) $a_n = \dfrac{1}{n}, \quad a_n = \dfrac{n}{n+1}, \qquad$ 2) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n+1}{n}, \qquad$ 3) $a_n = n^2$

  und ihre graphischen Darstellungen.

- Grenzwert (Limes) einer Folge. Begriff der konvergenten und divergenten Folge. Erklärung der Notation

  $$\lim_{n \to \infty} a_n = a\,.$$

- Nullfolge: Definition, Beispiele.

- ε-Umgebung: ε-Umgebung von 0, ε-Umgebung von a $(a \neq 0)$.

“Verhaltensmuster” einer Folge für wachsende n

Wir untersuchen das Verhalten von Zahlenfolgen für wachsende Indices n. Es kommen im Wesentlichen drei “Verhaltensmuster” vor:

1) Die Glieder der Folge nähern sich mit wachsendem n genau einer Zahl.

2) Mit wachsendem Index n “nähern sich die Glieder der Folge “abwechselnd” zwei verschiedenen Zahlen.

3) Die Glieder der Folge wachsen mit n über jede noch so große Zahl.

Im Folgenden werden wir diese “Verhaltensmuster” an Beispielen erläutern.

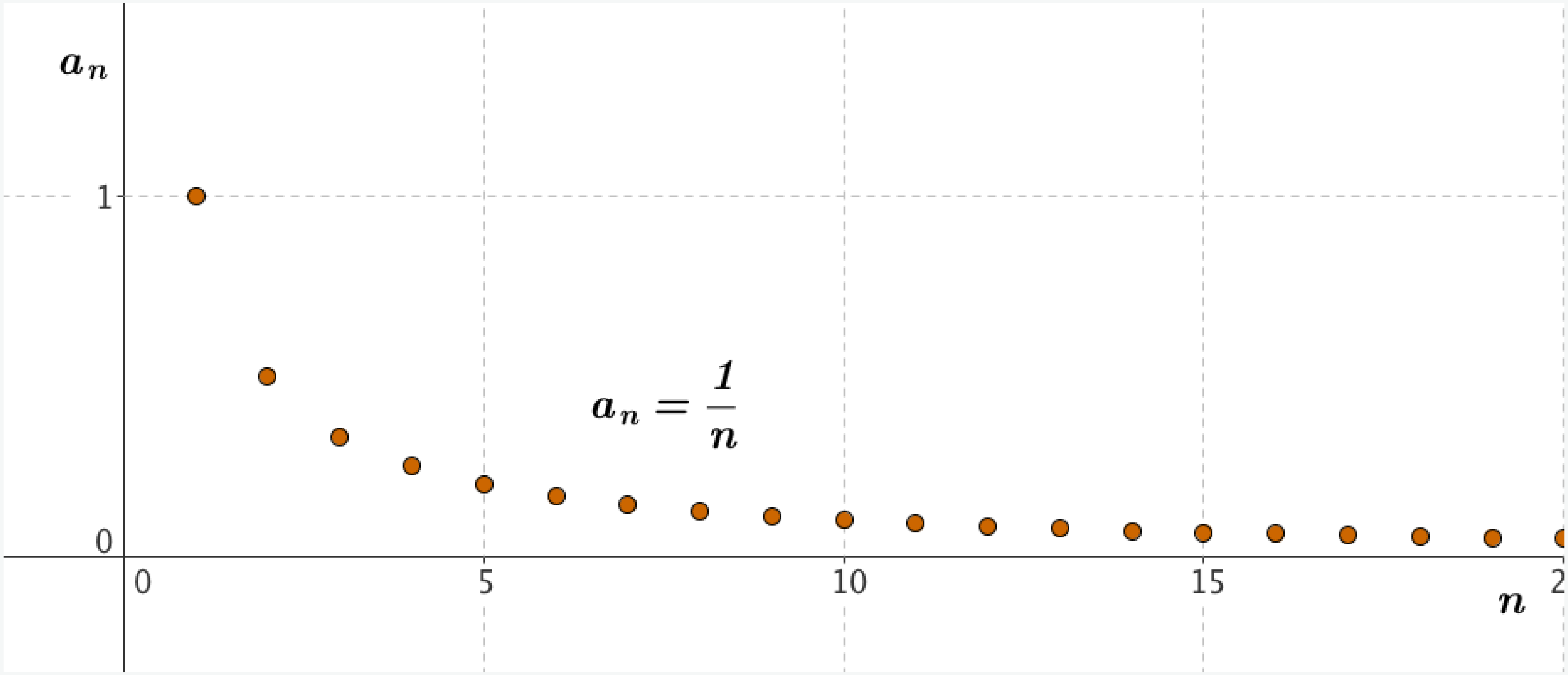

Abb. 1-1: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

Mit dem wachsenden n nähern sich die Glieder der Folge dem Wert Null.

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \langle a_n \rangle = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ \ldots$$

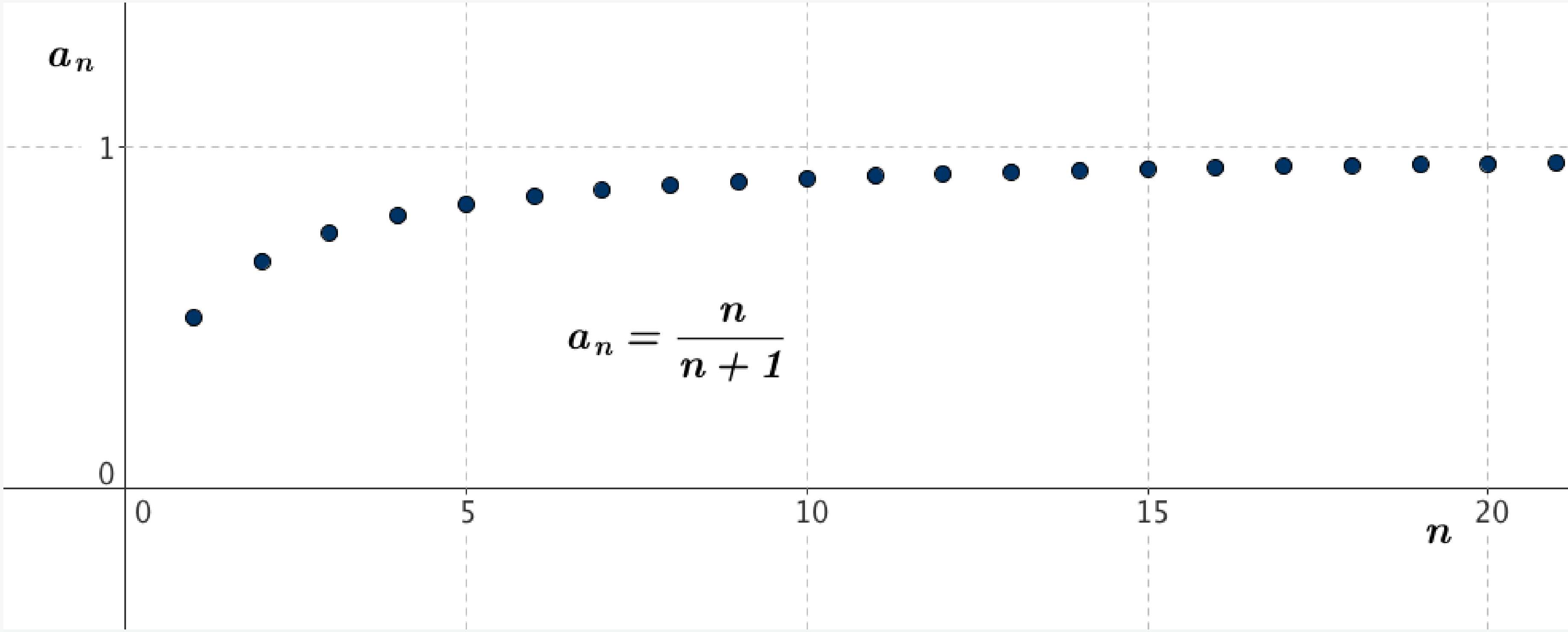

Abb. 1-2: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad \langle a_n \rangle = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots$$

Mit dem wachsenden n nähern sich die Glieder der Folge 1.

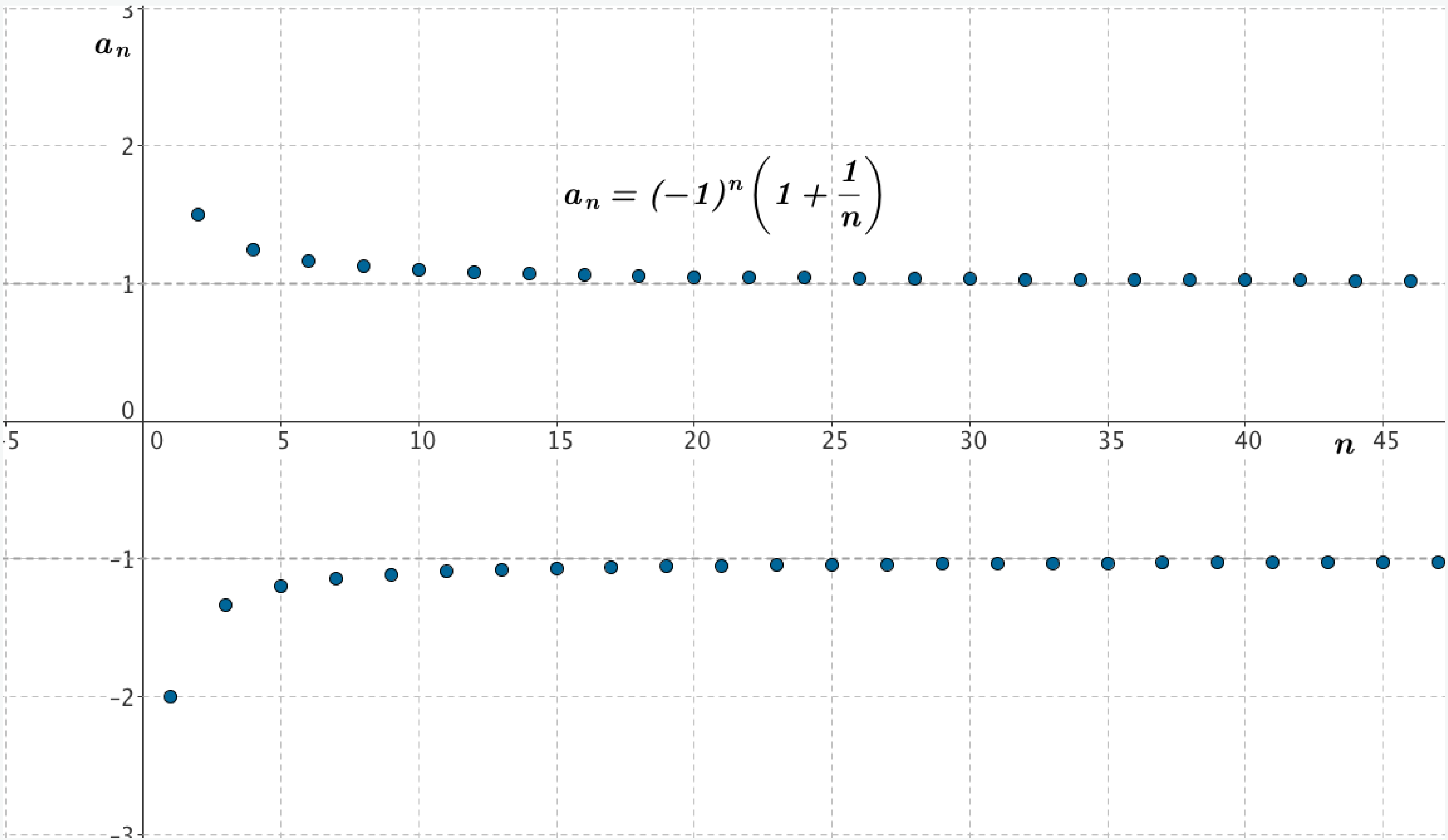

Abb. 1-3: Graphische Darstellung der ersten 47 Glieder der Folge

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$$

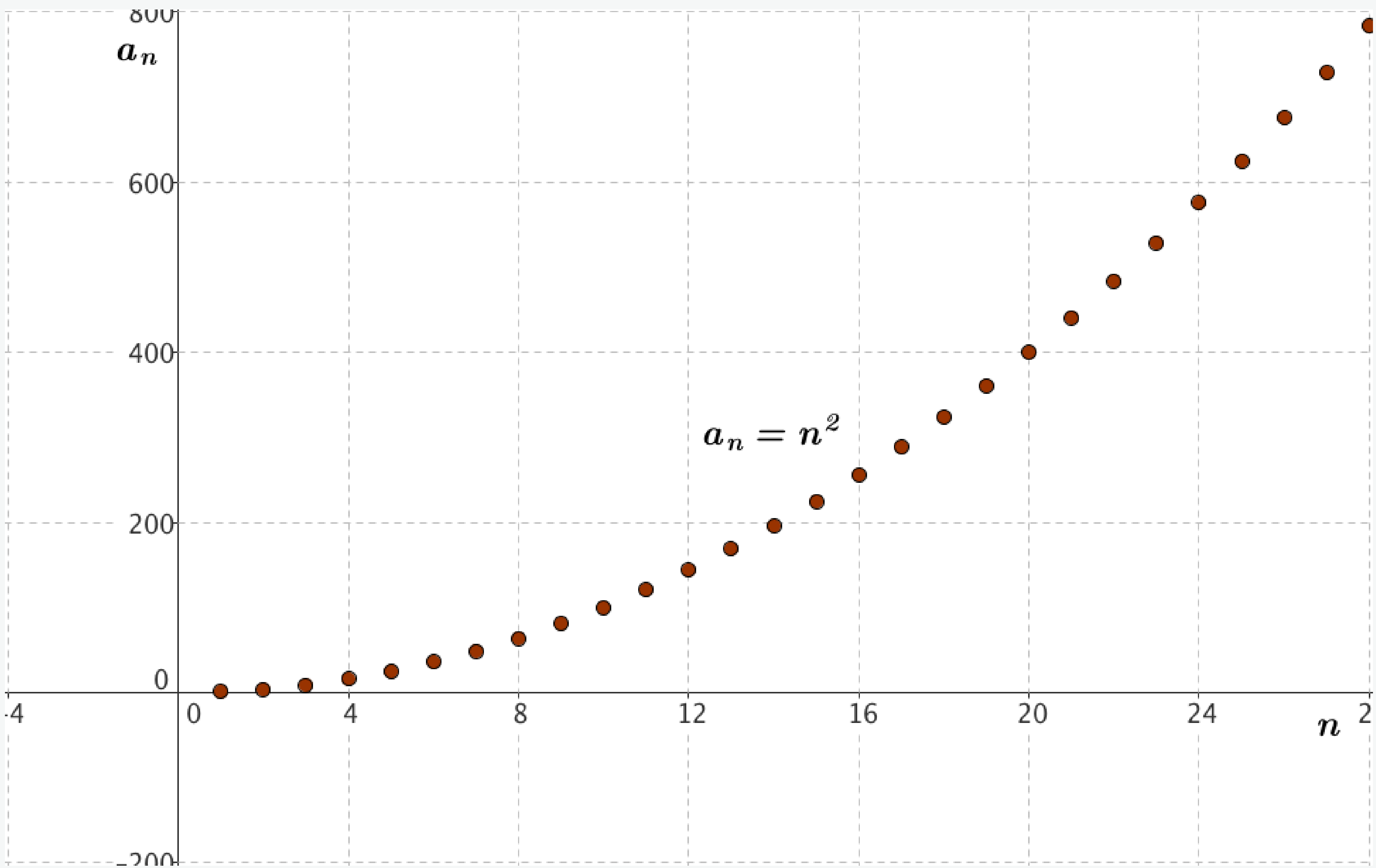

Abb. 1-4: Graphische Darstellung der ersten 28 Glieder der Folge

$$a_n = n^2$$

Abbildug 1-3:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\langle a_n \rangle = -2, \ \frac{3}{2}, \ -\frac{4}{3}, \ \frac{5}{4}, \ -\frac{6}{5}, \ \frac{7}{6}, \ -\frac{8}{7}, \ \frac{9}{8}, \ \ldots$$

Mit wachsendem Index n “nähern sich die Glieder der Folge abwechselnd” zwei verschiedenen Zahlen: 1 und -1.

Abbildug 1-4:

$$a_n = n^2$$

$$\langle a_n \rangle = 1, \ 4, \ 9, \ 16, \ 25, \ 36, \ 49, \ 64, \ 81, \ 100, \ \ldots$$

Die Glieder der Folge wachsen mit n über jede noch so große Zahl.

1) $a_n = \frac{1}{n}$, $\quad \langle a_n \rangle = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots$

2) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $\quad \langle a_n \rangle = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \frac{15}{8}, \frac{17}{9}, \ldots$

3) $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, $\quad \langle a_n \rangle = 2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \frac{37}{36}, \frac{50}{49}, \frac{65}{64}, \frac{82}{81}, \ldots$

4) $a_n = 9$, $\quad \langle a_n \rangle = 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$

5) $\langle a_n \rangle = 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots$

Die fünfte Folge ist die Folge der abbrechenden Dezimalbruchentwicklungen von $\sqrt{2}$.

Die Glieder der Folge nähern sich mit wachsendem n genau einer Zahl a.

Die Folge 1: $a = 0$, Die Folge 2: $a = 2$,

Die Folge 3: $a = 1$, Die Folge 4: $a = 9$,

Die Folge 5: $a = \sqrt{2}$.

Definition:

Nähern sich die Glieder einer Folge mit wachsendem n genau einer Zahl, nennt man diese Zahl Grenzwert oder Limes der Folge.

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, wird sie konvergent genannt. Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, wird sie divergent genannt.

Notation:

Besitzt eine Folge $n \to a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{R}$

den Grenzwert a, so schreibt man mit dem Symbol lim (*Limes*):

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a .$$

Limes auf lateinisch heißt Grenze.

Es existiert noch eine Schreibweise für den Grenzwert einer Folge:

$$a_n \to a, \quad n \to \infty .$$

(a_n konvergiert gegen a für n gegen unendlich)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Man sagt:

1) Die Folge besitzt den Grenzwert a.

2) Die Folge konvergiert gegen (den Grenzwert) a.

3) Der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ existiert.

Für die Folgen von Seite 2-1 können wir die Grenzwerte angeben:

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

2) $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, $\quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

3) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$, $\quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.

4) $a_n = 9$, $\quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 9$.

5) $\langle a_n \rangle = 1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots \quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2}$.

Definition 1:

Folgen, deren Folgenglieder gegen die Zahl 0 streben, nennt man Nullfolgen.

Ein Beispiel ist die schon besprochene Folge der Pendelausschläge. Je länger man das Pendel beobachtet, desto kleiner werden die Pendelamplituden.

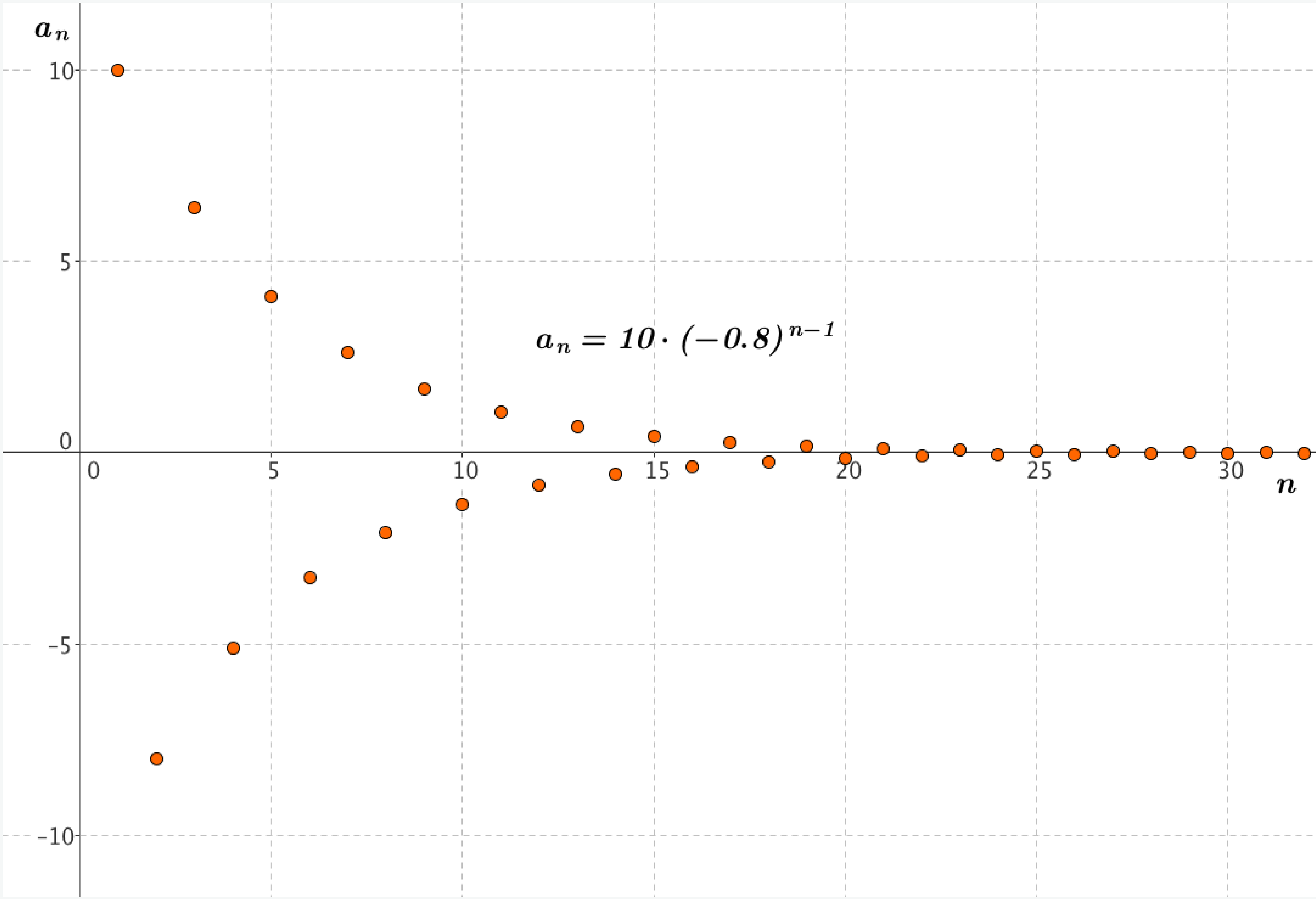

Abb. 2-1: Die ersten 32 Glieder der Folge der Pendelausschläge

$$\langle\, a_n = 10 \cdot (-0.8)^{n-1} \,\rangle =$$

$$= \; 10, \; -8, \; 6.4, \; -5.12, \; 4.10, \; -3.28, \; 2.62,$$

$$-2.10, \; 1.68, \; -1.34, \; 1.07, \; -0.86, \; 0.69, \; -0.55, \; 0.44, \; -0.35\,, \; \dots$$

$$0.28, \; -0.23, \; 0.18, \; -0.14, \; 0.12, \; -0.09, \; 0.7, \; -0.06, \; 0.05\,, \; \dots$$

$$-8 \leqslant a_n \leqslant 10$$

Die Amplituden der Folge der Pendelausschläge “streben gegen 0” oder “konvergieren gegen 0”. Im Folgenden werden wir am Beispiel dieser Folge die Konvergenz einer Folge gegen Null mathematisch formulieren.

Um die Konvergenz von Folgen zu prüfen, untersucht man das "Abstandsverhalten" von Folgengliedern. Der Abstand einer reellen Zahl x von Null ist bekanntlich durch $|x|$ gegeben. Die Menge aller Zahlen, die von Null einen Abstand kleiner als eine vorgegebene Zahl ε haben, bilden eine ε-Umgebung von Null.

Definition:

Ist $\varepsilon > 0$, so heißt die Menge

$$U_\varepsilon(0) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x| < \varepsilon \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon < x < \varepsilon \,\}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

ε-Umgebung von 0.

Die ε-Umgebung von Null ist ein offenes Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ der Länge 2ε mit dem Mittelpunkt 0.

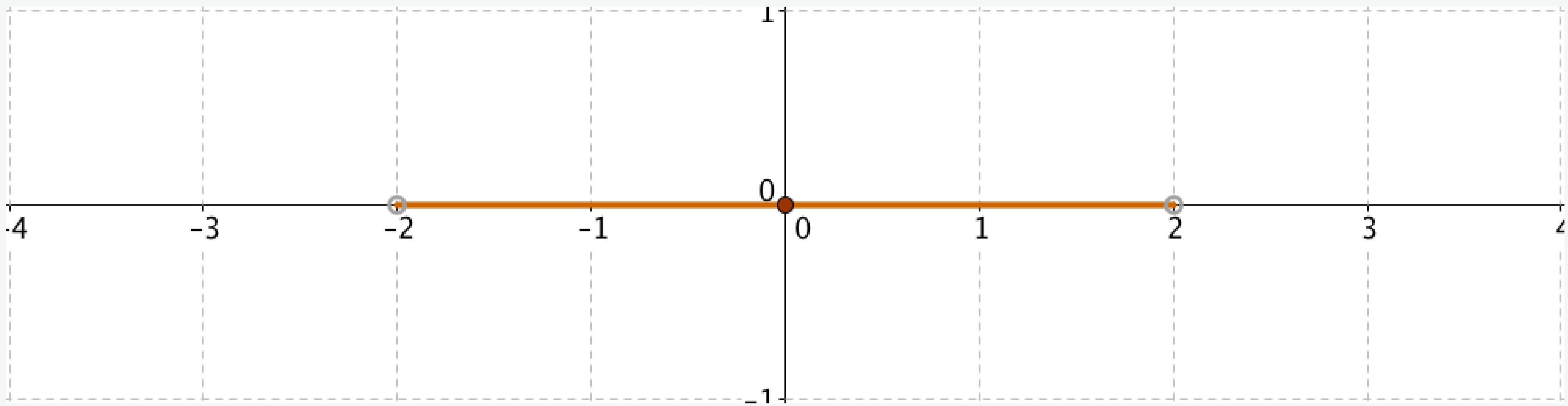

Abb. : Die "2-Umgebung" von Null

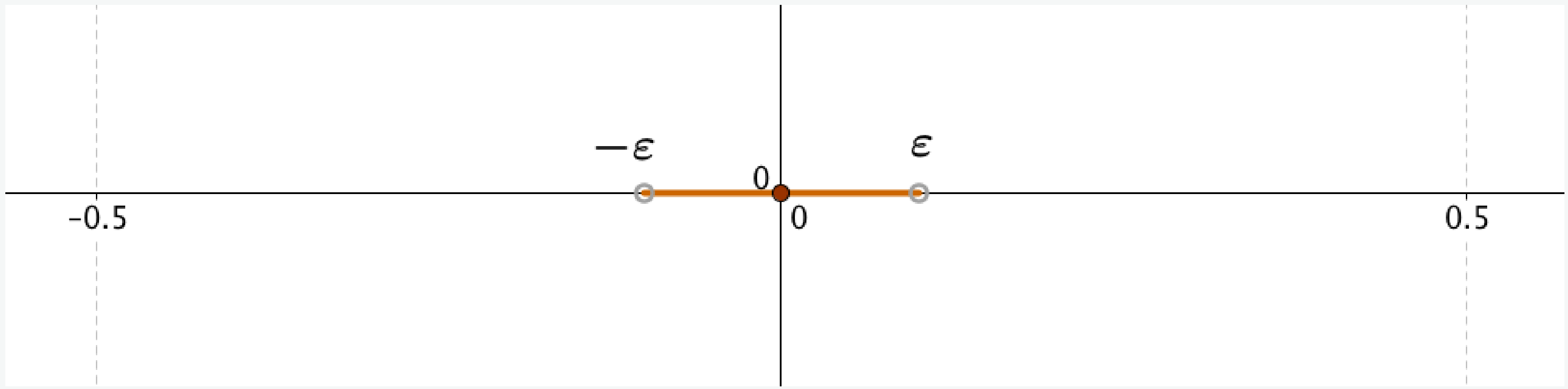

Abb. : Die ε-Umgebung von Null

Die Amplituden der Folge der Pendelausschläge kann man auch auf der Zahlengeraden darstellen:

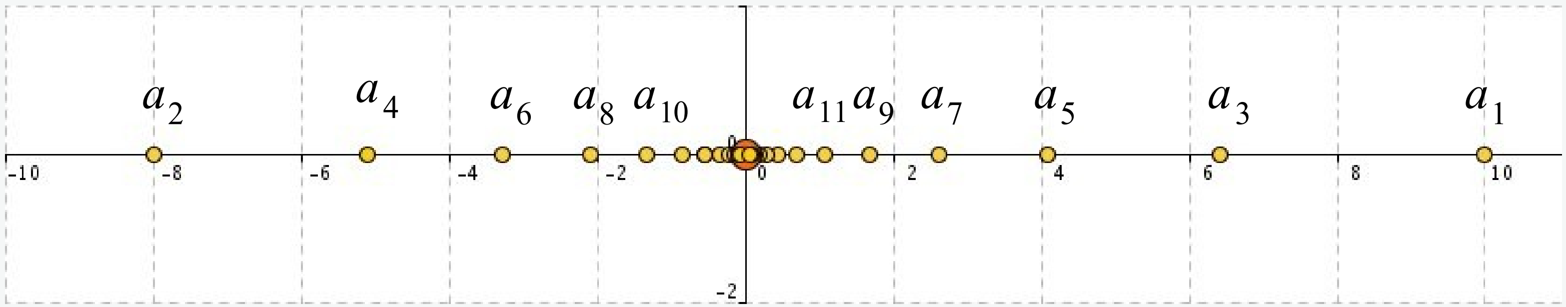

Abb.: Die Amplituden der Folge der Pendelausschläge auf der Zahlengeraden

Die Folge besitzt folgende Eigenschaften:

1) Mit zunehmendem n unterscheiden sich die Folgenglieder immer weniger von Null.

2) In jeder ε-Umgebung der Zahl 0 liegen fast alle Glieder der Folge. Das bedeutet, dass nur endlich viele Glieder außerhalb der vorgegebenen Umgebung liegen. Wir erläutern das im Folgenden.

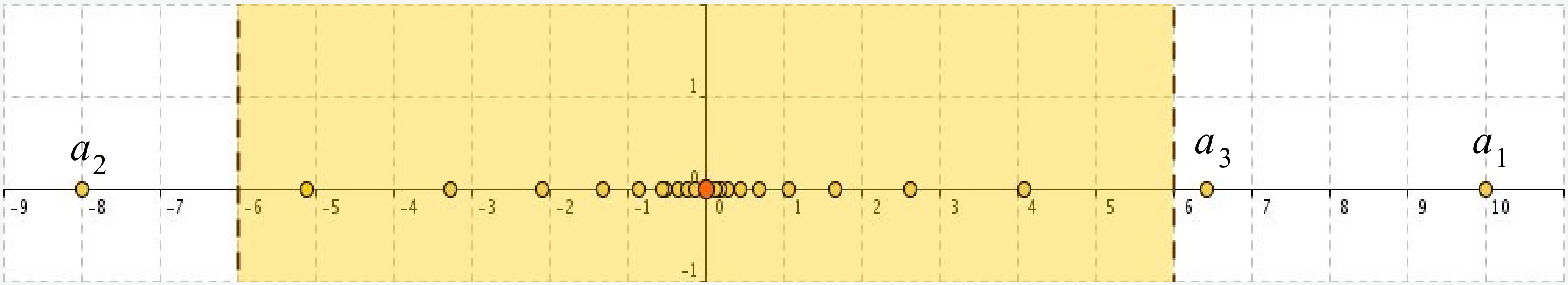

Abb. 6-2: Die Folgenglieder außerhalb und innerhalb der "6-Umgebung" von Null

In der "*6*-Umgebung" von Null liegen alle Folgenglieder mit Ausnahme der ersten drei.

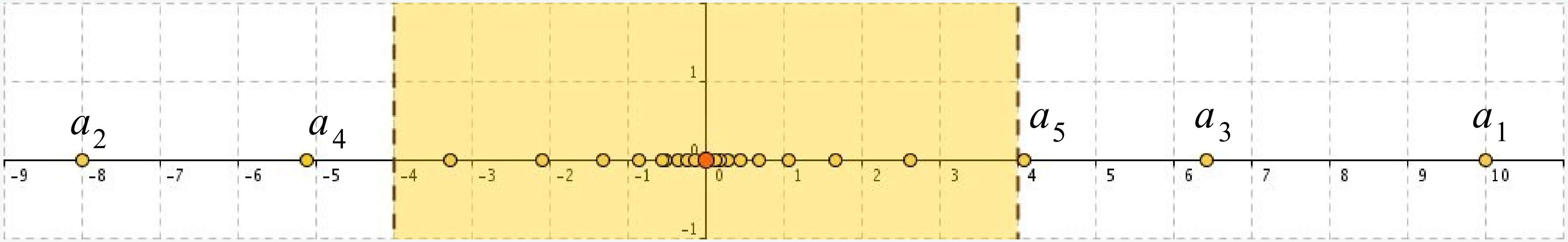

Abb. 6-3: Die Folgenglieder außerhalb und innerhalb der "4-Umgebung" von Null

In der "4-Umgebung" von Null liegen alle Folgenglieder mit Ausnahme der ersten fünf.

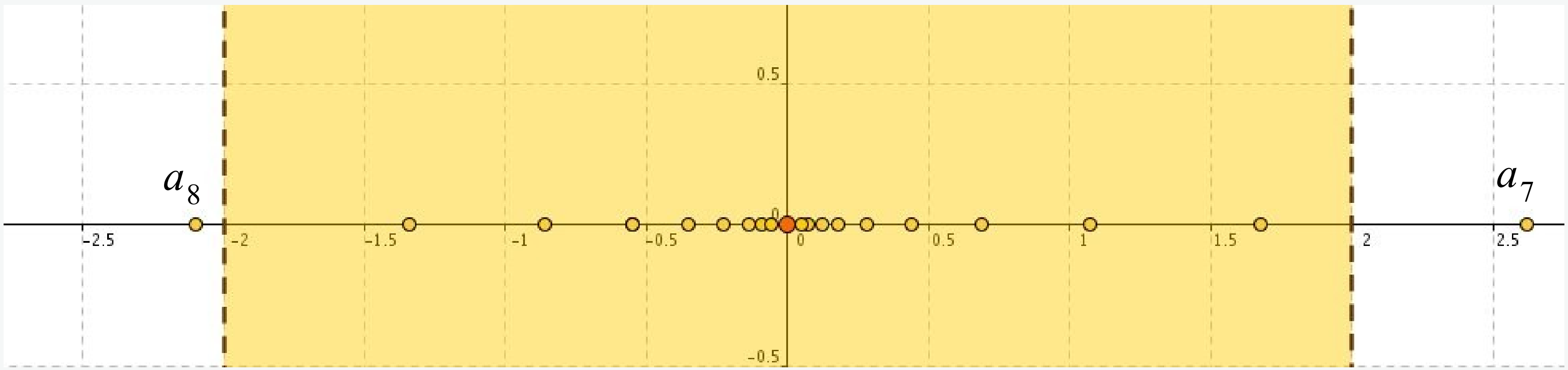

Abb. 6-4: Die Folgenglieder außerhalb und innerhalb der "2-Umgebung" von Null

In der "*2*-Umgebung" von Null liegen alle Folgenglieder mit Ausnahme der ersten acht.

Das kann man weiter fortsetzen und zeigen, dass es zu vorgegebenen Zahlen $\varepsilon > 0$ einen passenden Index $n(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$|a_n| < \varepsilon, \qquad n > n(\varepsilon)$$

Weitere Beispiele der ε-Umgebungen der Folge der Pendelausschläge

$$|a_n| < \varepsilon_0 = 10^{-1} \qquad \forall \quad n > n_0 = 21$$

$$|a_n| < \varepsilon_1 = 10^{-2} \qquad \forall \quad n > n_1 = 31$$

$$|a_n| < \varepsilon_2 = 10^{-3} \qquad \forall \quad n > n_2 = 42$$

$$|a_n| < \varepsilon_3 = 10^{-4} \qquad \forall \quad n > n_3 = 53$$

Fast alle Folgenglieder bedeutet:

Alle mit Ausnahme von endlich vielen.

Dabei ist es nicht wichtig, wie groß oder klein ε gewählt wird. Bei jeder Wahl von ε liegen nur endlich viele Folgenglieder außerhalb der ε-Umgebung der Zahl 0.

Fast alle bedeutet auch: mindestens alle ab einem bestimmten Folgenindex.

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0\,.$$

1) $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon_1 = 0.1, \quad \forall \; n > n_0 = 10, \quad U_{\varepsilon_1} = \left(-0.1,\, 0.1\right)$

2) $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon_2 = 0.01, \quad \forall \; n > n_0 = 100, \quad U_{\varepsilon_2} = \left(-0.01,\, 0.01\right)$

Beispiele einiger Nullfolgen:

1) $a_n = \dfrac{1}{n}, \qquad a_n = \dfrac{1}{3n}, \qquad a_n = \dfrac{1}{n+1}$

2) $a_n = -\dfrac{1}{n}, \qquad a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n}, \qquad a_n = -\dfrac{1}{5n+3}$

3) $a_n = \dfrac{1}{n^2}, \qquad a_n = \dfrac{1}{4n^3}, \qquad a_n = \dfrac{1+n}{n^2+2n}$

Die Definition einer ε-Umgebung von 0 unterscheidet sich grundsätzlich nicht von der ε-Umgebung einer Zahl $a \neq 0$.

Definition:

Sind $\varepsilon > 0$ und x reelle Zahlen, so heißt die Menge

$$U_\varepsilon(a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon \} =$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

ε-Umgebung von a.

Da es beliebig viele positive Zahlen ε gibt, gibt es also beliebig viele ε-Umgebungen einer Zahl a.

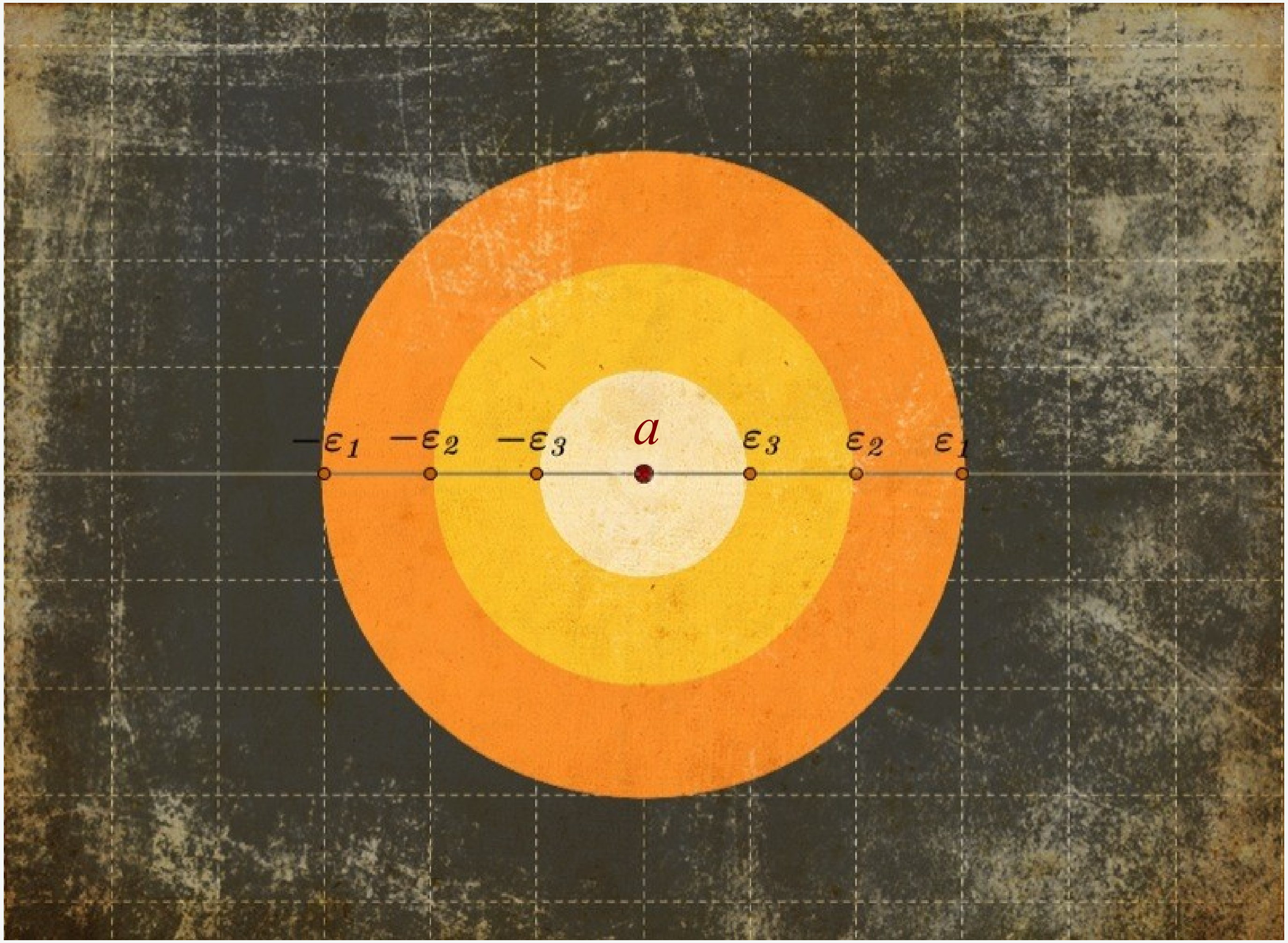

Abb.: Drei ε-Umgebungen von a

$$U_{\varepsilon_1}(a) = \{\, x \in \mathbb{R} \;\mid\; a - \varepsilon_1 < x < a + \varepsilon_1 \,\}$$

$$U_{\varepsilon_2}(a) = \{\, x \in \mathbb{R} \;\mid\; a - \varepsilon_2 < x < a + \varepsilon_2 \,\}$$

$$U_{\varepsilon_3}(a) = \{\, x \in \mathbb{R} \;\mid\; a - \varepsilon_3 < x < a + \varepsilon_3 \,\}$$

Kann eine Folge zwei verschiedene Grenzwerte haben?

Um diese Frage zu beantworten, analysieren wir das “Verhaltensmuster” *2*.

Die Glieder der Folge

$$a_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

“nähern sich abwechselnd” den Zahlen - 1 und + 1. Eine solche Folge besitzt nicht etwa zwei Grenzwerte, sondern keinen. Betrachten wir z.B. für $\varepsilon = 0.5$ die ε-Umgebung von 1, so gibt es immer wieder (negative) Folgenglieder, die nicht in dieser Umgebung liegen, wie groß wir den Index n auch wählen. Entsprechendes gilt für jedes kleinere $\varepsilon > 0$ und analog auch für $a = -1$. Die Zahlen - 1 und + 1 sind keine Grenzwerte für diese Folge.

Der Grenzwert einer Folge muss eindeutig bestimmt sein.

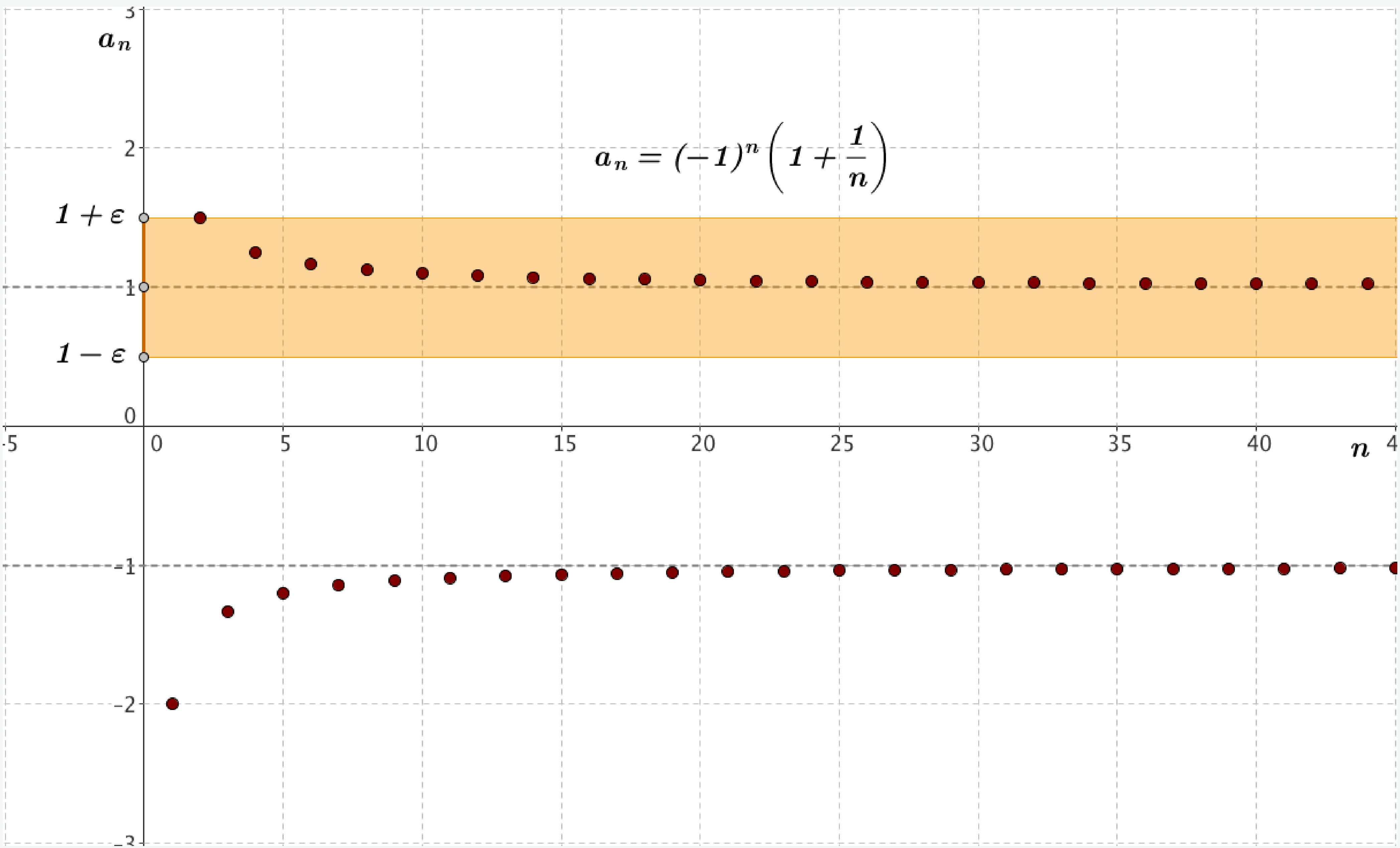

Abb.: Die ε-Umgebungen von 1

Der Begriff Folgenhäufungspunkt ist eng verwandt mit dem Begriff Grenzwert. Der entscheidende Unterschied ist, dass jede Folge höchstens einen Grenzwert haben kann, aber möglicherweise mehrere Häufungspunkte. Von einem Grenzwert wird gefordert, dass in jeder Umgebung des Grenzwertes fast alle Folgenglieder liegen. Bei einem Häufungspunkt müssen dies nur unendlich viele sein.

Definition:

Ein Punkt p heißt Häufungspunkt einer Folge, falls in jeder noch so kleinen Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder liegen.

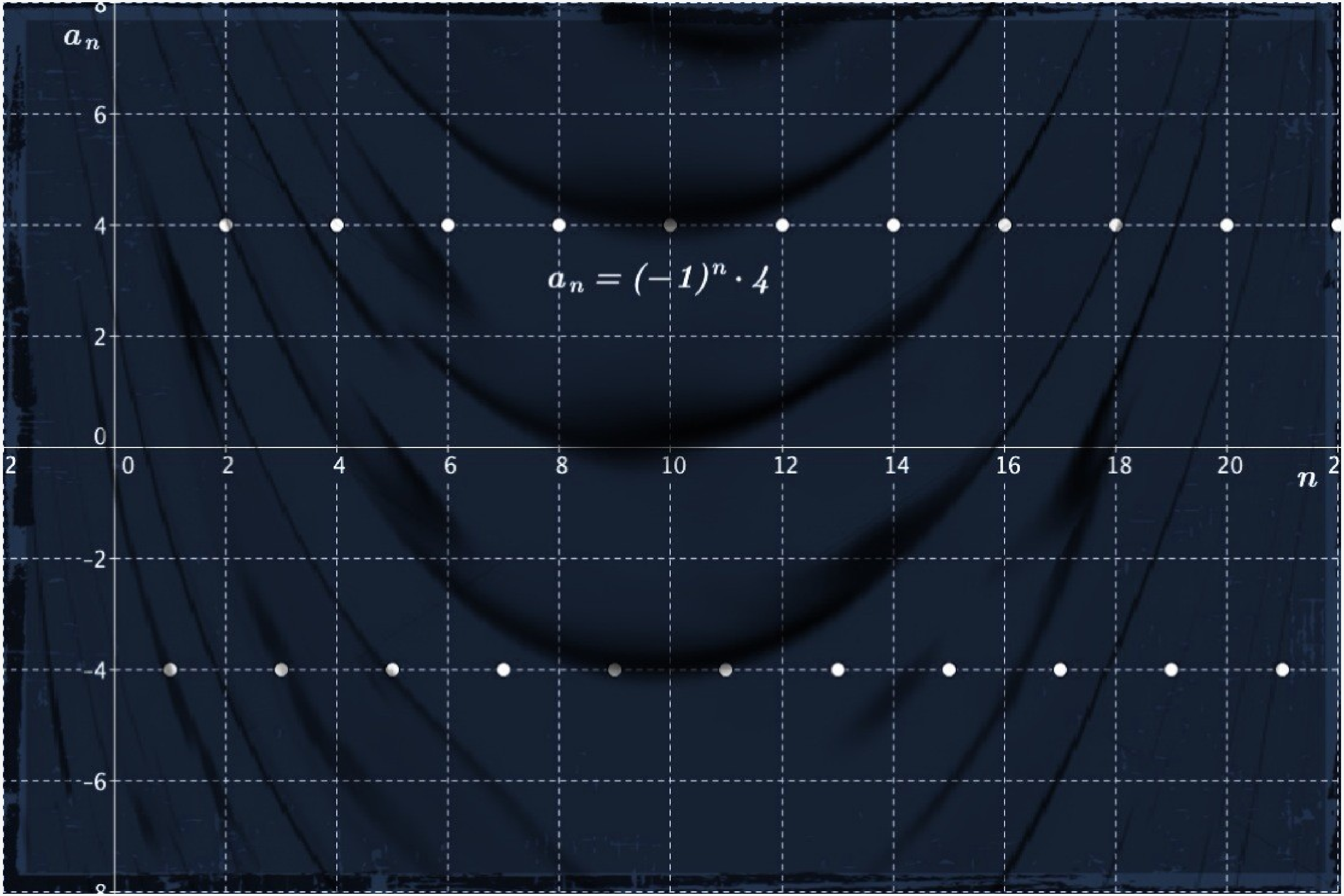

Abb.: Die Folge hat keinen Grenzwert und zwei Haufungspunkte -4 und 4

Berechnung eines Grenzwertes:

Hat eine Folge die Form eines Bruchs und im Zähler und Nenner Potenzausdrücke von n, kann man den Grenzwert wie folgt berechnen:

- Man bestimmt die größte Potenz von n im Nenner und klammert diese Potenz im Zähler und Nenner aus und kürzt.
- Nullfolgen haben den Grenzwert null.

Beispiel: Wir bestimmen den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{3n^2 - 8n}{(n+2)^2}$

$$a_n = \frac{3n^2 - 8n}{(n+2)^2} = \frac{3n^2 - 8n}{n^2 + 4n + 4} = \frac{n^2\left(3 - \frac{8}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 - \frac{8}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{8}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{8}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = 3$$

$\dfrac{4}{n}, \quad \dfrac{8}{n}, \quad \dfrac{4}{n^2} \quad -$ Nullfolgen oder: $$a_n = \frac{3n^2 - 8n}{(n+2)^2} = \frac{n^2\left(3 - \frac{8}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} = \frac{3 - \frac{8}{n}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 3$$

Einige Regeln:

1) Der Grenzwert ist nicht gleich null, wenn die größten Potenzen im Nenner und Zähler gleich sind. Er wird durch die Koeffizienten der größten Potenzen bestimmt. Im vorigen Beispiel:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 - 8n}{(n+2)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot n^2 - 8n}{1 \cdot n^2 + 4n + 4} = 3$$

2) Der Grenzwert ist gleich null, wenn die größte Potenz im Nenner ist:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{12n^3 - 5n^2}{n^5 + 7n^3 + 17n} = \lim_{n \to \infty} \frac{12 - \frac{5}{n}}{n^2 + 7 + \frac{17}{n^2}} = 0$$

3) Der Grenzwert ist $\pm\,\infty$, wenn die größte Potenz im Zähler ist:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{9n^4 - 4n}{3n^3 + 11} = \lim_{n \to \infty} \frac{9n - \frac{4}{n^2}}{3 + \frac{11}{n^3}} = \infty$$

$$a_n = \frac{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \ldots + b_1 n + b_0}{c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0}, \qquad b_k, c_m \neq 0$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} 0, & k < m \\ \dfrac{b_k}{c_m}, & k = m \\ +\infty, & k > m, \ \dfrac{b_k}{c_m} > 0 \\ -\infty, & k > m, \ \dfrac{b_k}{c_m} < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie ob die Folge konvergiert oder divergiert und welche Häufungspunkte p sie hat:

1) $a_n = \dfrac{1}{n+2}$, 2) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

3) $a_n = (-1)^n \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$, 4) $a_n = (-1)^n \cdot 3$

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n \, n^2}{(3n+2)^2}$

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz und Häufungspunkte:

1) $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3n}$, 2) $a_n = \dfrac{(-1)^n \, 3n^2}{n^2 + 2n + 1}$

Häufungspunkt: Lösung 1

1) $a_n = \dfrac{1}{n+2}, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad p = 0$

Die Folge konvergiert gegen 0 und hat den einzigen Häufungspunkt $p = 0$.

2) $a_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1, \qquad p = 1$

Die Folge konvergiert gegen 1 und hat den einzigen Häufungspunkt $p = 1$.

3) $a_n = (-1)^n \left(2 + \dfrac{1}{n}\right), \qquad p_1 = -2, \qquad p_2 = 2$

Die Folge ist divergent und hat zwei Häufungspunkte -2 und 2.

4) $a_n = (-1)^n \cdot 3, \qquad p_1 = -3, \qquad p_2 = 3$

Die Folge ist divergent und hat zwei Häufungspunkte - 3 und 3.

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n^2}{(3n+2)^2}, \qquad p_1 = -\dfrac{1}{9}, \quad p_2 = \dfrac{1}{9}$

Die Folge ist divergent und hat zwei Häufungspunkte -1/9 und 1/9.

1) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}, \qquad a_n \in [\,5/6,\ 1/2\,), \qquad p = \frac{1}{2}$

Die Folge ist streng monoton fallend, konvergent, beschränkt und hat einen Häufungspunkt.

2) $$a_n = \frac{(-1)^n\, 3\, n^2}{n^2 + 2n + 1} = (-1)^n\, 3 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

Die Folge ist eine alternierende Folge, deswegen nicht monoton.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3\, n^2}{n^2 + 2n + 1} = 3, \qquad \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{3\, n^2}{n^2 + 2n + 1}\right) = -3$$

$$a_1 = -\frac{3}{1 + 2 + 1} = -\frac{3}{4}, \qquad a_2 = \frac{3}{2^2 + 2 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{9}$$

$$a_n \in (-3,\ 3), \qquad p_1 = 3, \qquad p_2 = -3$$

Die Folge ist nach oben durch 3 und nach unten durch - 3 beschränkt, hat zwei Häufungspunkt 3 und - 3.

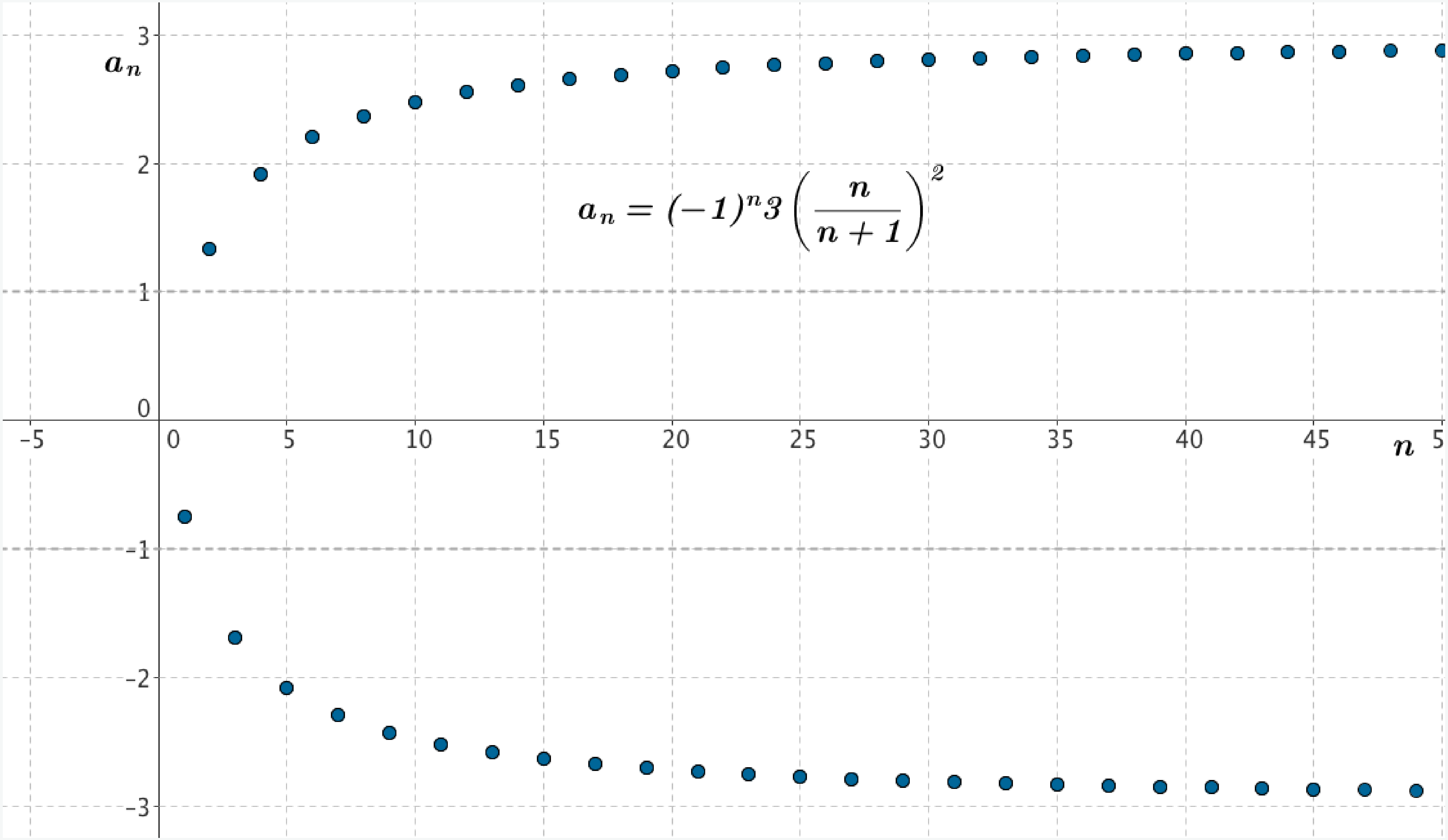

Abb.: Die Folge hat keinen Grenzwert und zwei Haufungspunkte -3 und 3