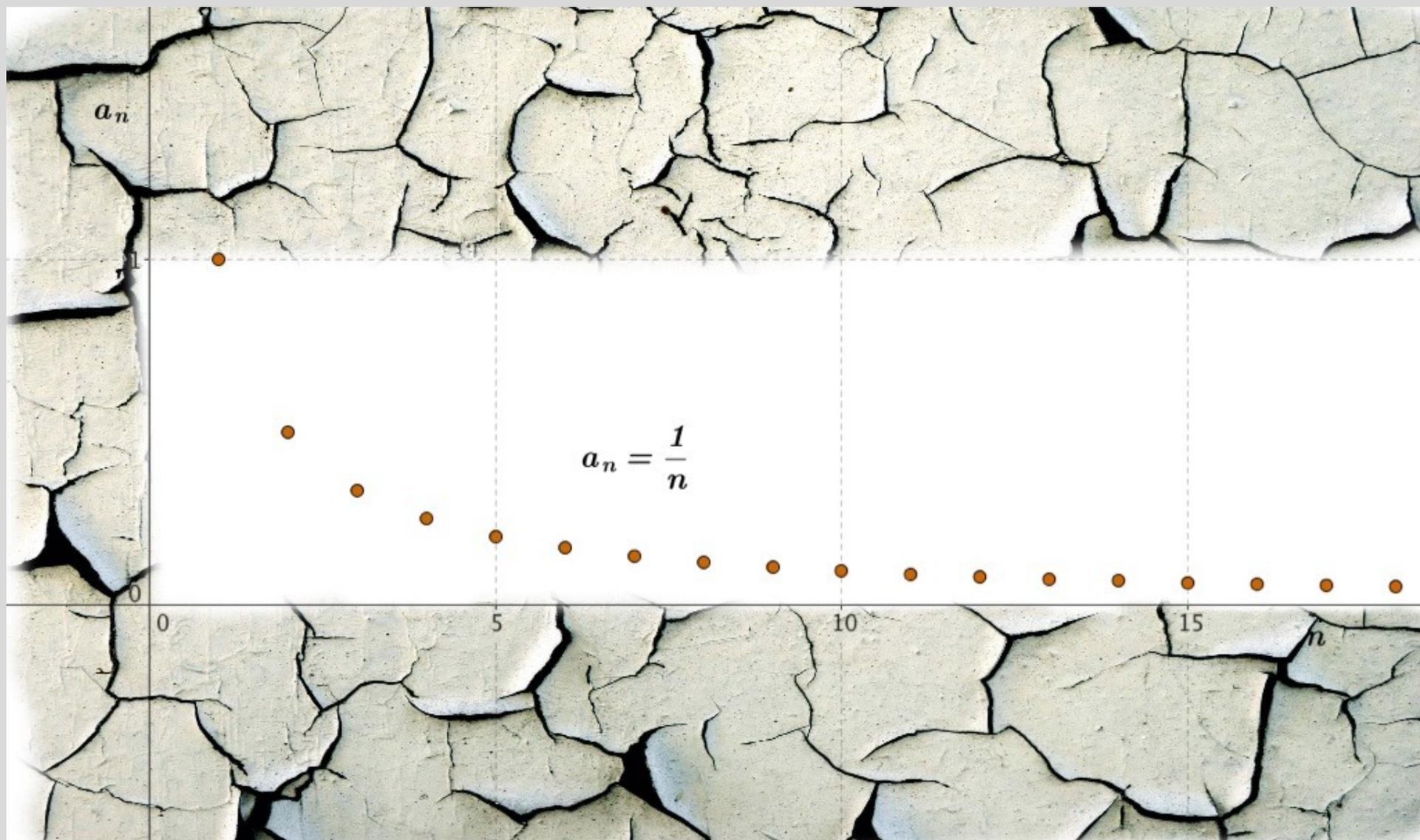




Beschränkte Folgen



Welche Begriffe werden eingeführt:

- ▶ nach oben beschränkte Folge, obere Schranke, Supremum,
- ▶ nach unten beschränkte Folge, untere Schranke, Infimum,
- ▶ nach unten und nach oben beschränkte Folge.

Nach oben beschränkte Folge

$$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Definition:

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl M gibt, sodass jedes Element dieser Folge kleiner oder gleich M ist:

$$a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Zahl M nennt man obere Schranke der Folge. Die kleinste obere Schranke wird auch Supremum M_S genannt.

Beispiele von nach oben beschränkten Folgen:

$$a_n = 5 - n, \quad b_n = 6 - 0.05 n^2,$$

Nach oben beschränkte Folge

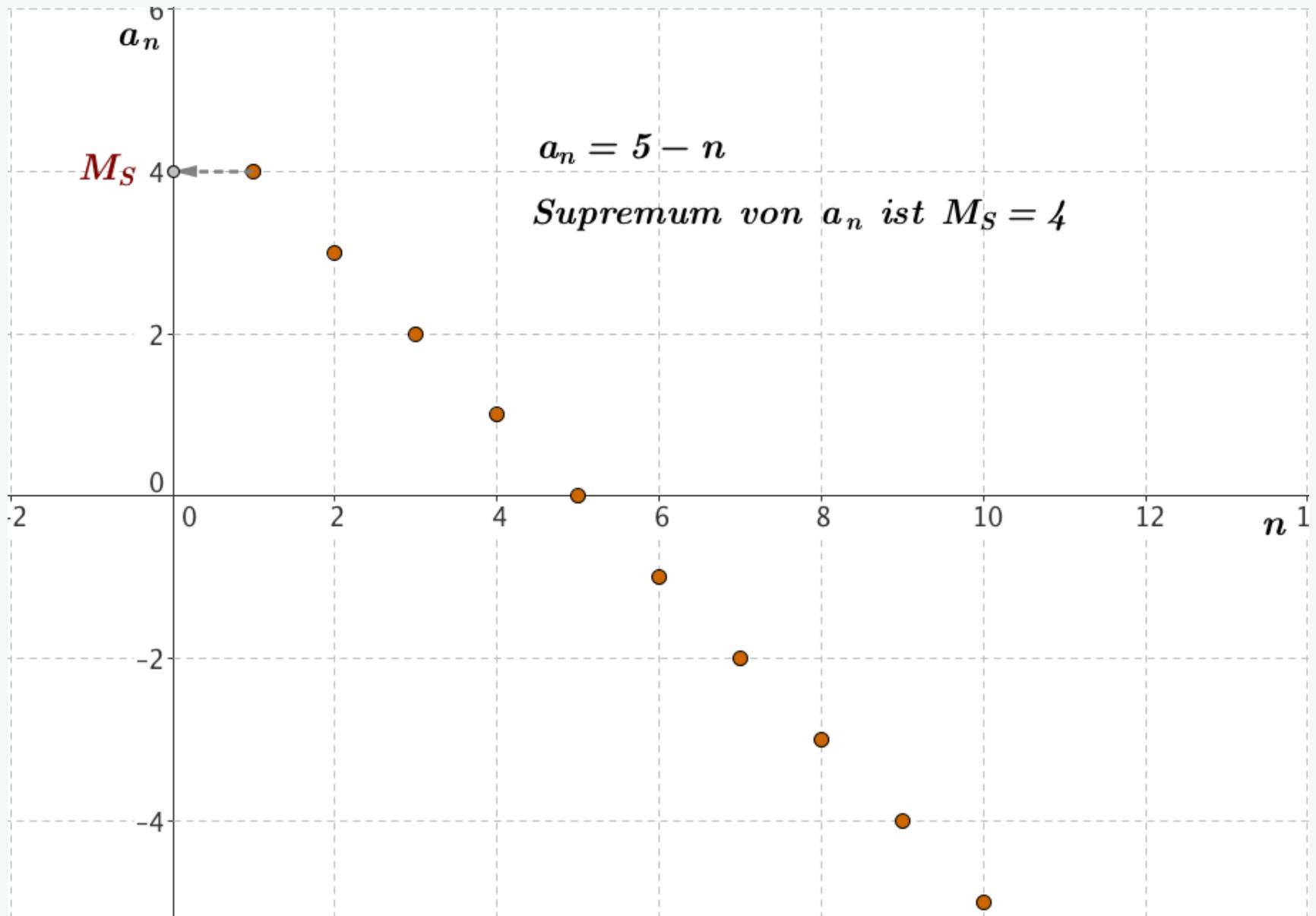


Abb. B1-1: Eine nach oben beschränkte Folge

$$a_n = 5 - n, \quad M_S = 4$$

Nach oben beschränkte Folge

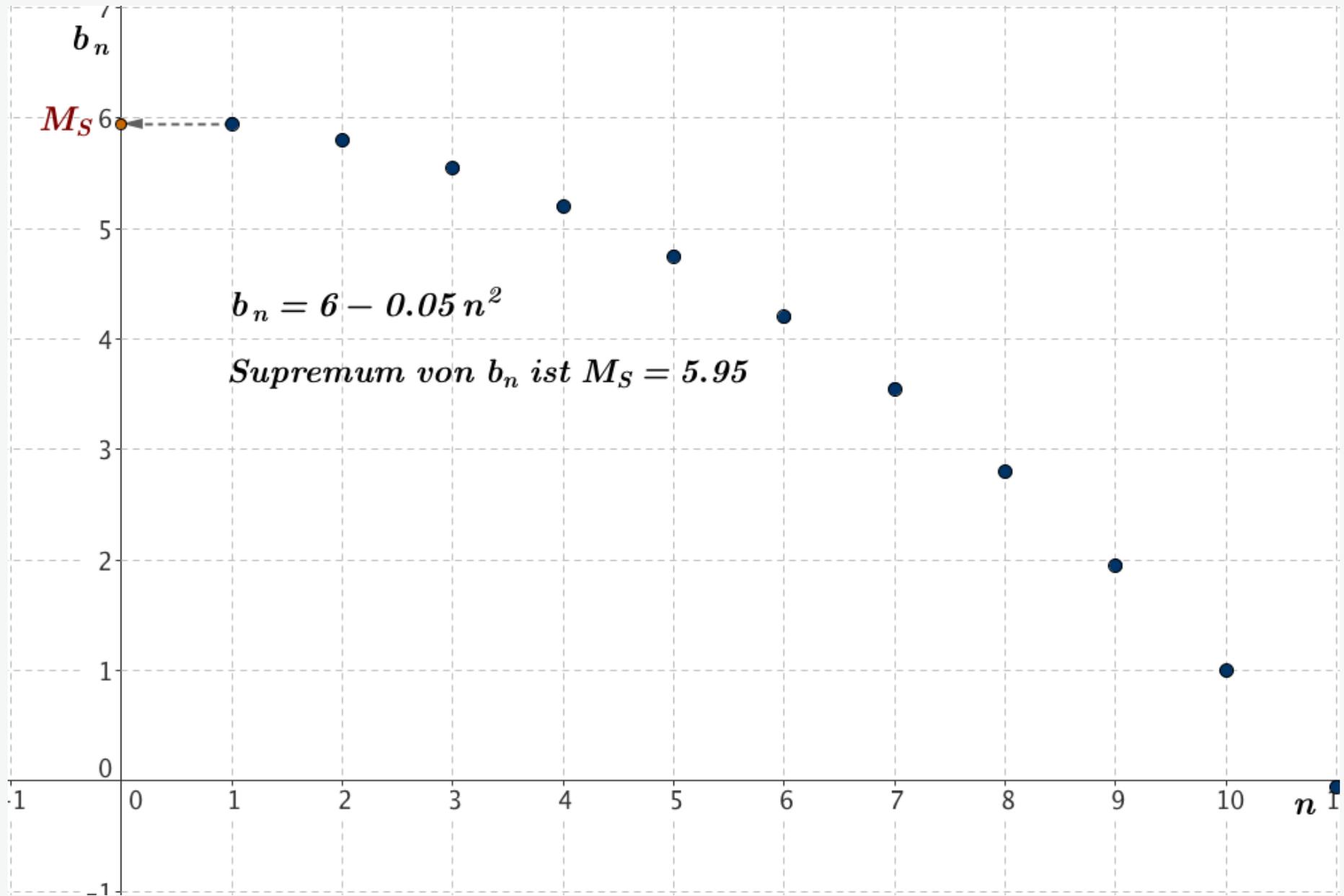


Abb. B1-2: Eine nach oben beschränkte Folge

$$b_n = 6 - 0.05n^2, \quad M_S = 5.95$$

$$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Definition:

Eine Folge heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl m gibt, sodass jedes Element dieser Folge größer oder gleich m ist:

$$a_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Zahl m nennt man untere Schranke der Folge. Die größte untere Schranke wird auch Infimum m_I genannt.

Beispiele nach unten beschränkten Folgen:

$$a_n = -4 + 0.4n, \quad b_n = -2 + 0.1n^2$$

Nach unten beschränkte Folge

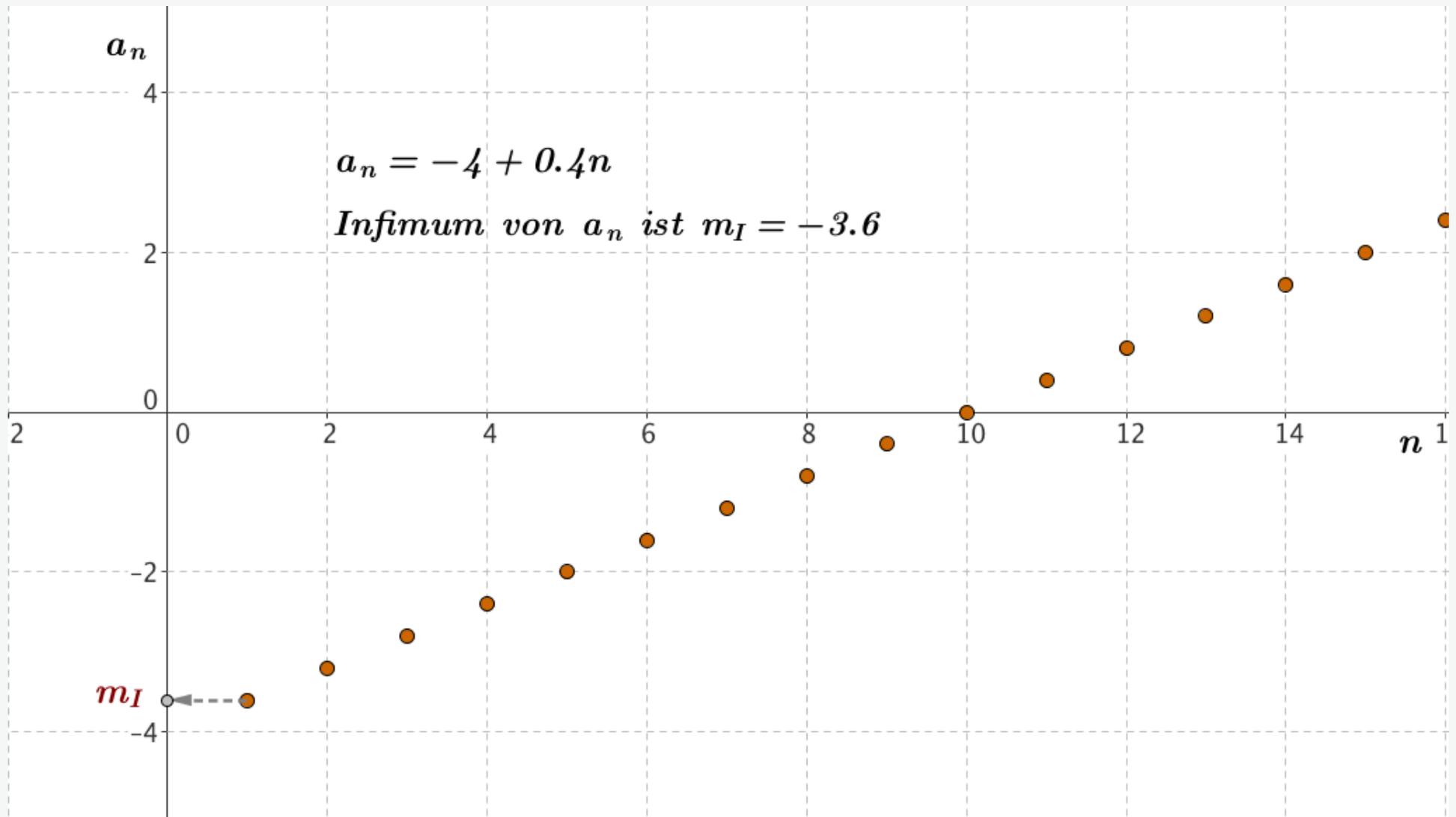


Abb. B2-1: Eine nach unten beschränkte Folge

$$a_n = -4 + 0.4n, \quad m_I = -3.6$$

Nach unten beschränkte Folge

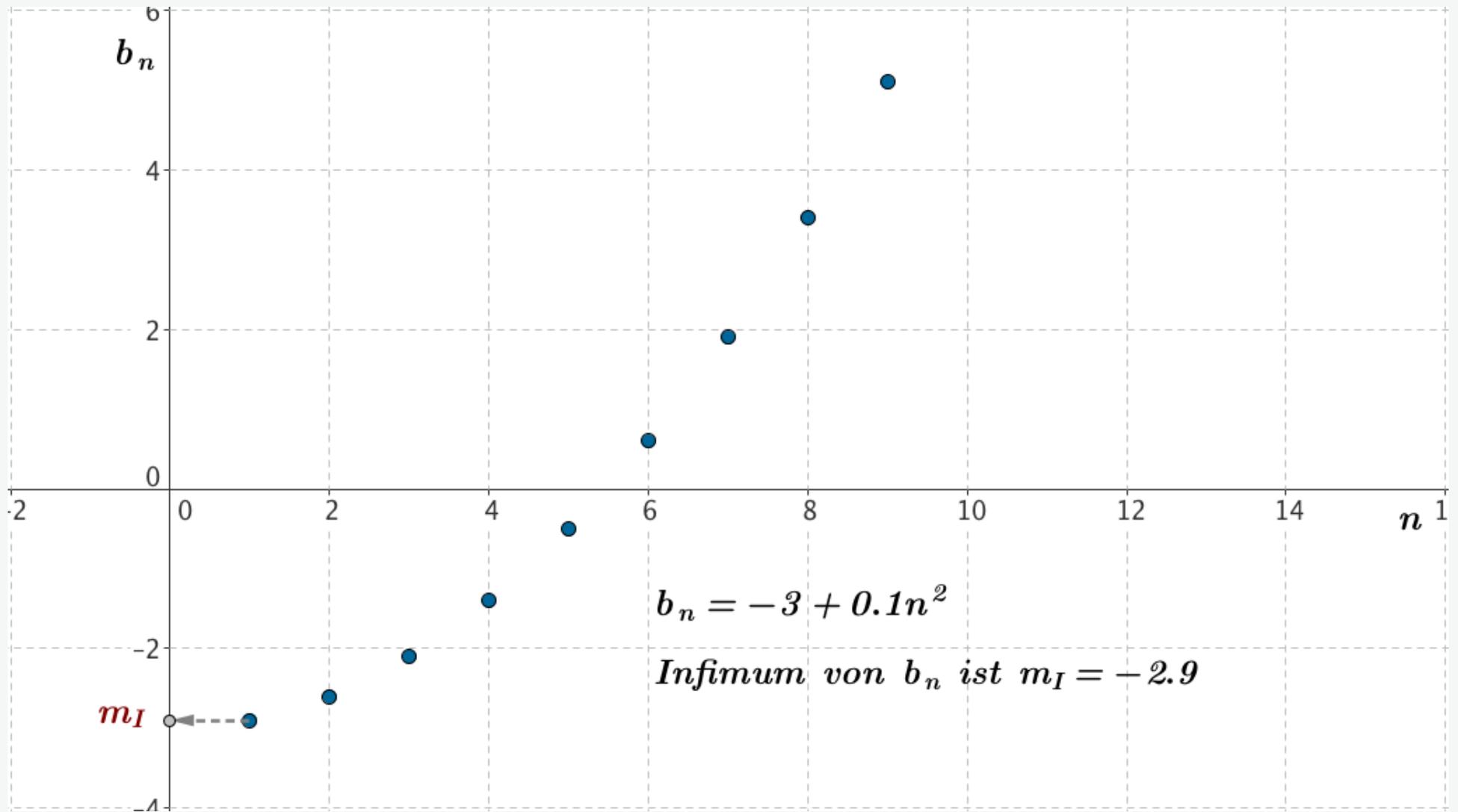


Abb. B2-2: Eine nach unten beschränkte Folge

$$b_n = -3 + 0.1n^2, \quad m_I = -2.9$$

Definition:

Eine nach oben und unten beschränkte Folge ist beschränkt:

$$m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beispiele:

1. $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \quad 0 < a_n \leq 1$

2. $\langle a_n \rangle = \left\langle 2 + (-1)^{n+1} \frac{8}{n} \right\rangle = 10, -2, 4.67, 0, 3.6, 0.67, 3.14, \dots$

Nach unten und oben beschränkte Folge: Beispiel 1

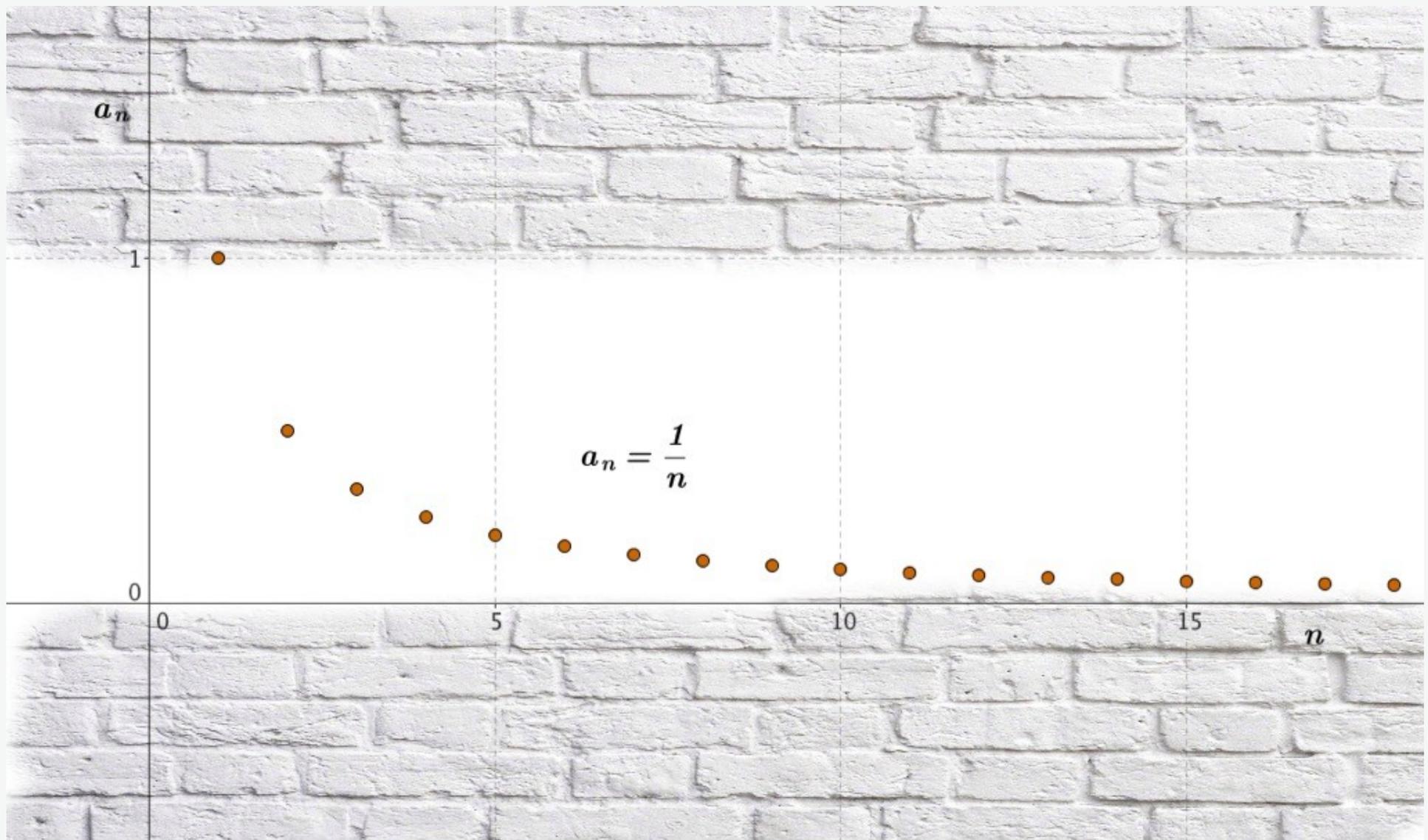


Abb. B3-1: Eine nach unten und oben beschränkte Folge

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad 0 < a_n \leq 1$$

Nach unten und oben beschränkte Folge: Beispiel 2

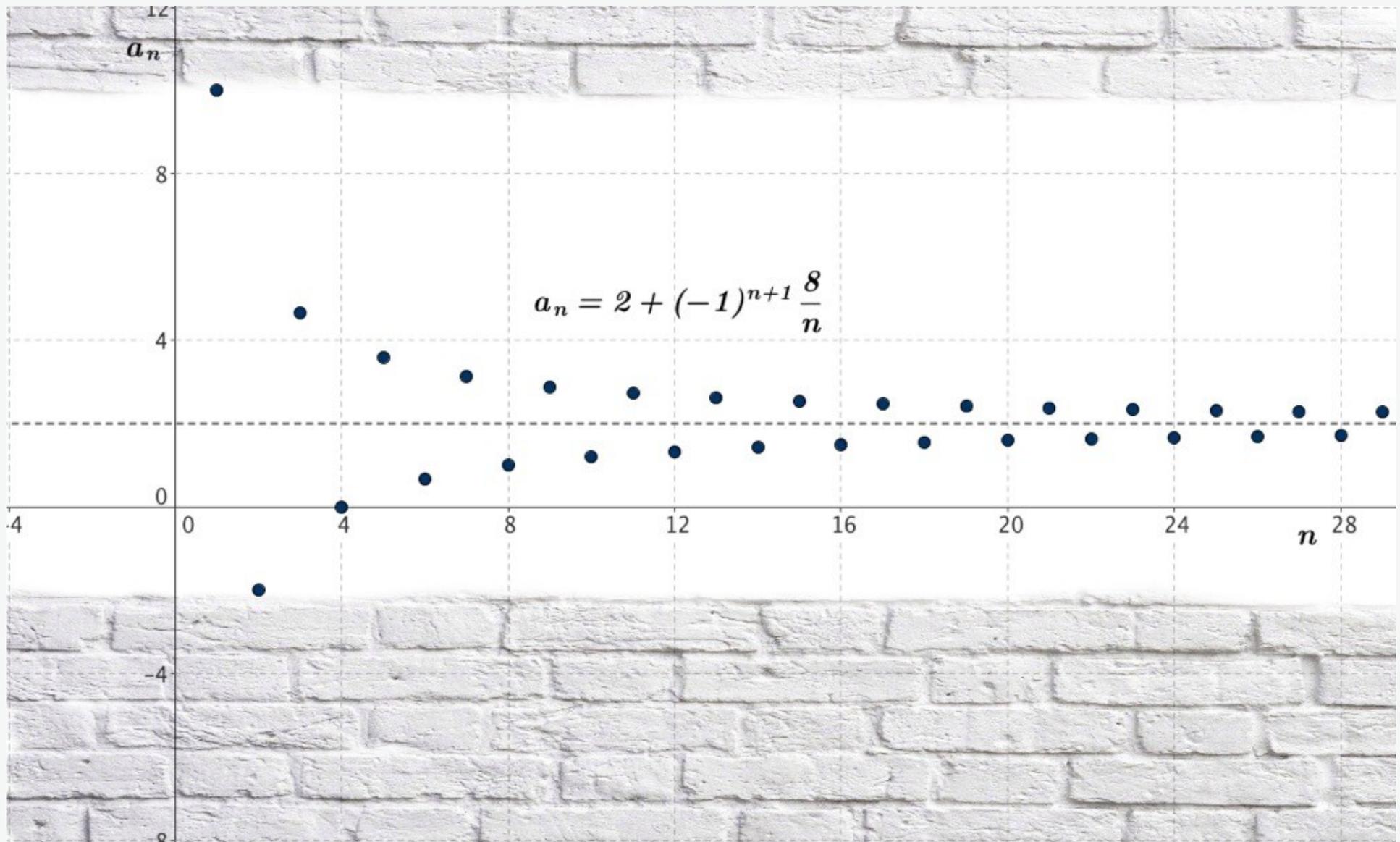


Abb. B3-2: Eine nach unten und oben beschränkte Folge

$$a_n = 2 + (-1)^{n+1} \frac{8}{n}, \quad -2 \leq a_n \leq 10$$

Bestimmen Sie für die folgenden beschränkten Folgen untere bzw. obere Schranken

Aufgabe 1: $a_n = \frac{n}{n+1}$

Aufgabe 2: $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

Aufgabe 3: $a_n = 2 + \frac{1}{n}$

Aufgabe 4: $a_n = \sqrt{3+n}$

Aufgabe 5: $a_n = (-1)^n \cdot 2$

Aufgabe 6: $a_n = 10 \cdot 0.8^{n-1}$

Aufgabe 7: $a_n = 10 \cdot (-0.8)^{n-1}$

Beschränkte Folgen: Lösung 1

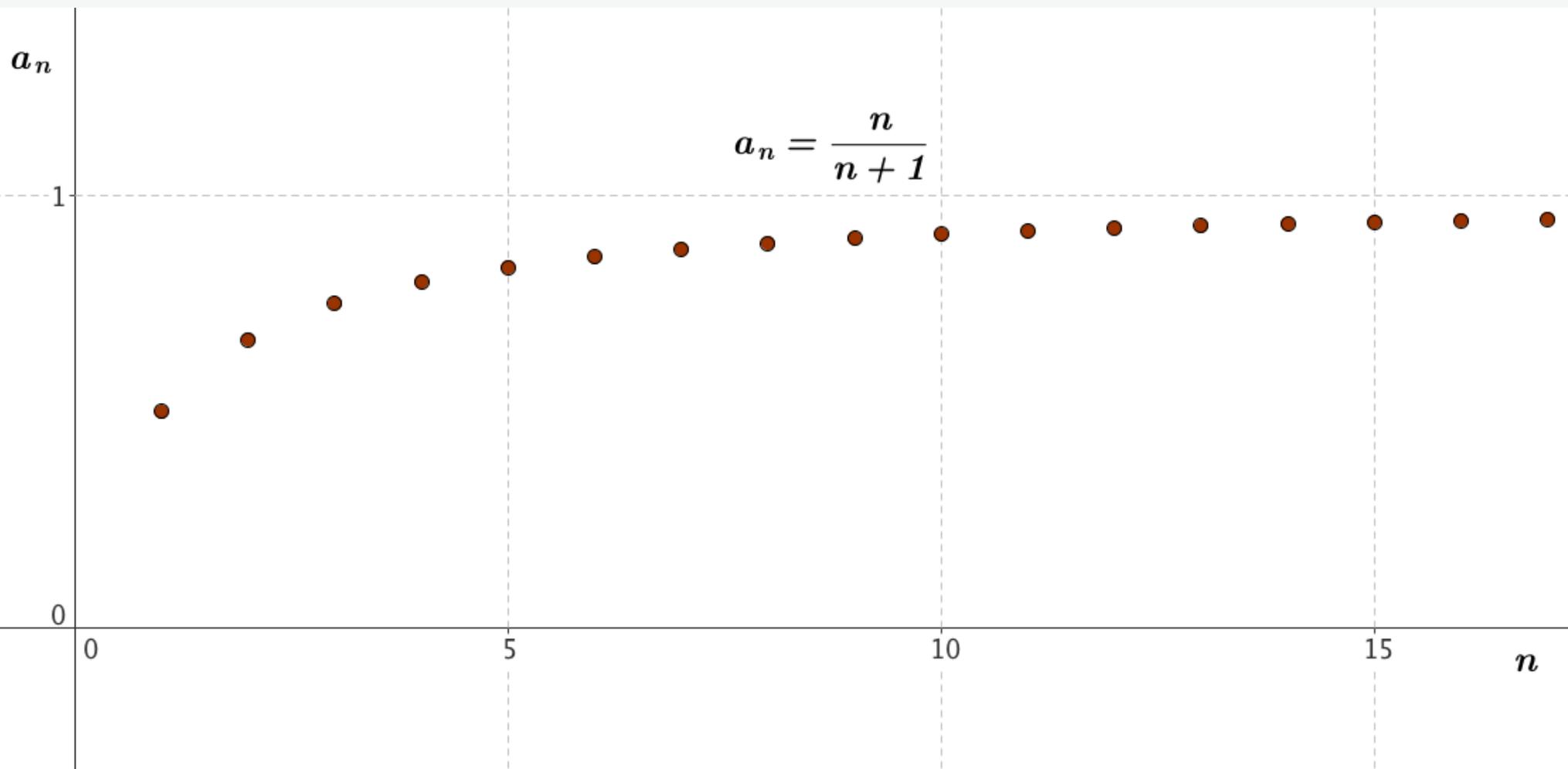


Abb. L-1: Eine nach unten und oben beschränkte Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$$

$$\frac{1}{2} \leq a_n < 1, \quad m_I = \frac{1}{2}, \quad M_S = 1$$

Beschränkte Folgen: Lösung 2

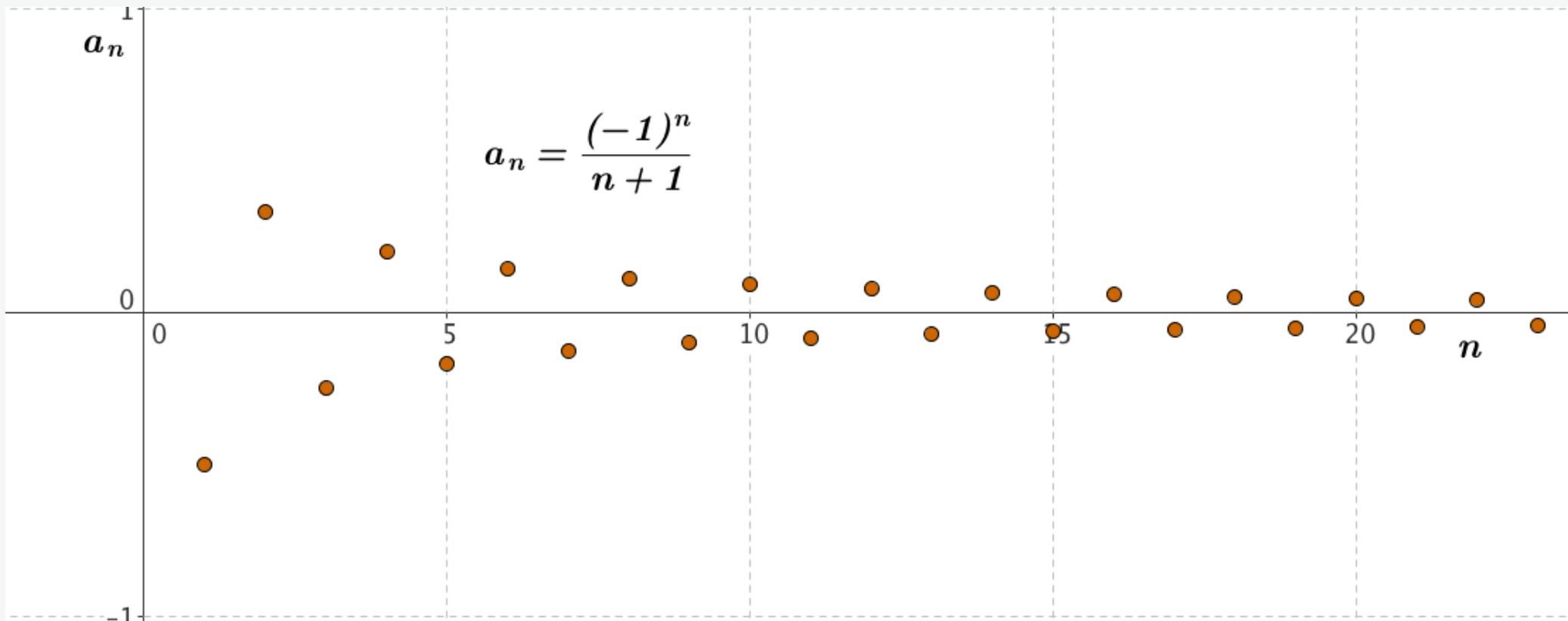


Abb. L-2: Eine nach unten und oben beschränkte Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{n+1} \right\rangle = -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

$$-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{3}, \quad m_I = -\frac{1}{2}, \quad M_S = \frac{1}{3}$$

Beschränkte Folgen: Lösung 3

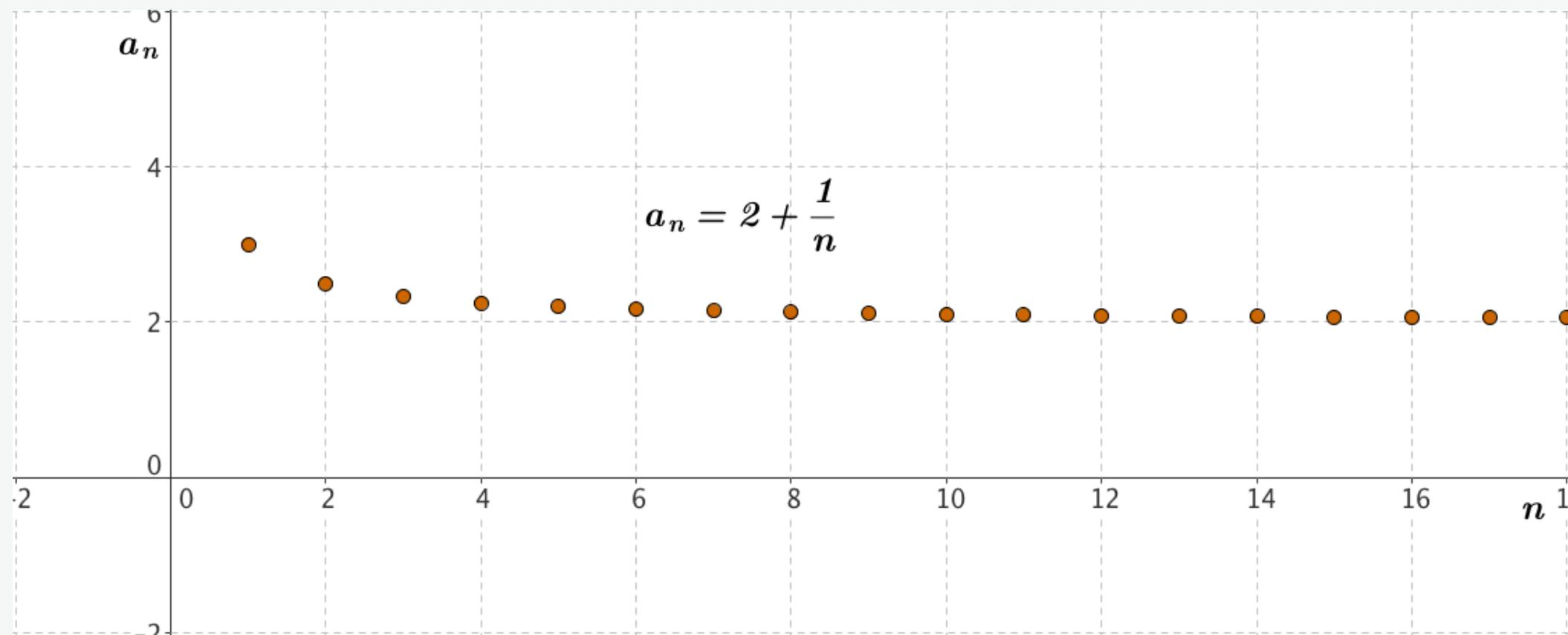


Abb. L-3: Eine nach unten und oben beschränkte Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle 2 + \frac{1}{n} \right\rangle = 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \dots$$

$$2 < a_n \leq 3, \quad m_I = 2, \quad M_S = 3$$

Beschränkte Folgen: Lösung 4

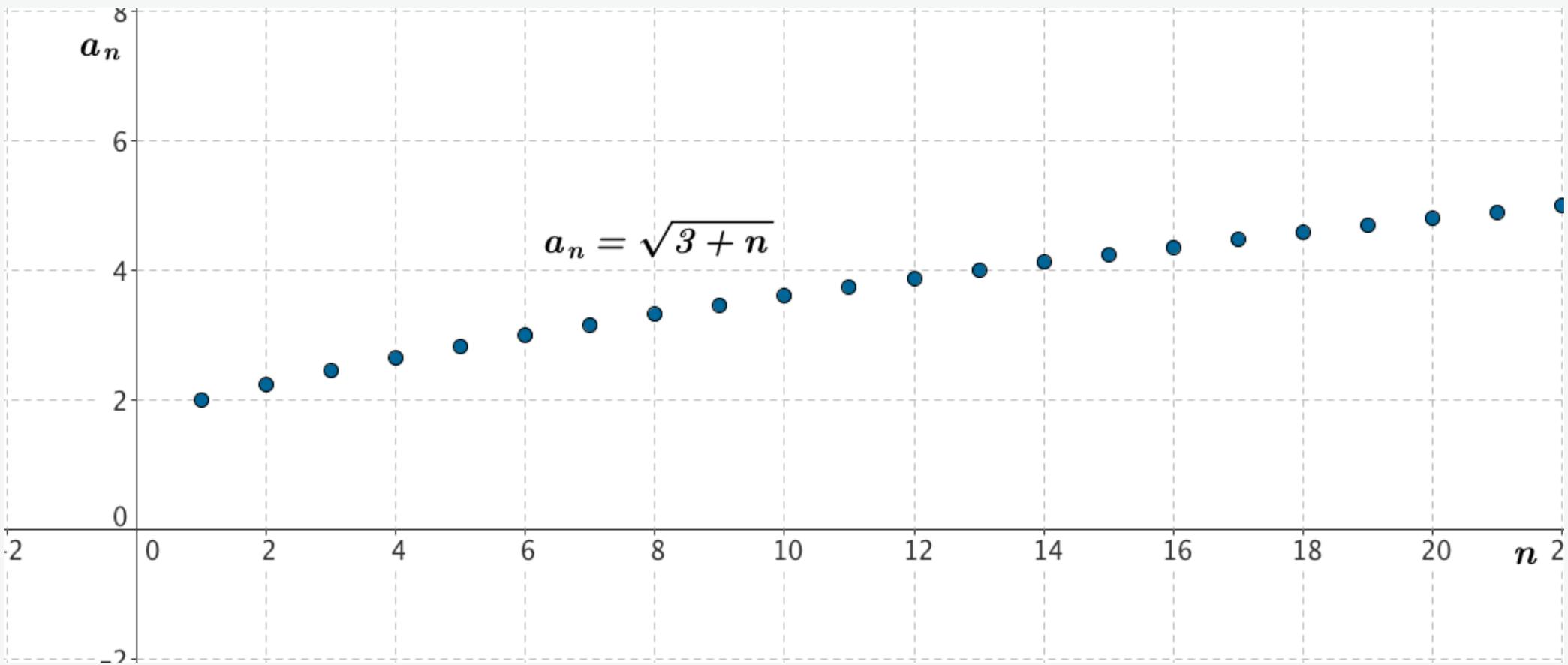


Abb. L-4: Eine nach unten beschränkte Folge

$$\langle a_n \rangle = \langle \sqrt{3+n} \rangle = 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}, \dots$$

$$a_n \geq 2, \quad m_I = 2$$

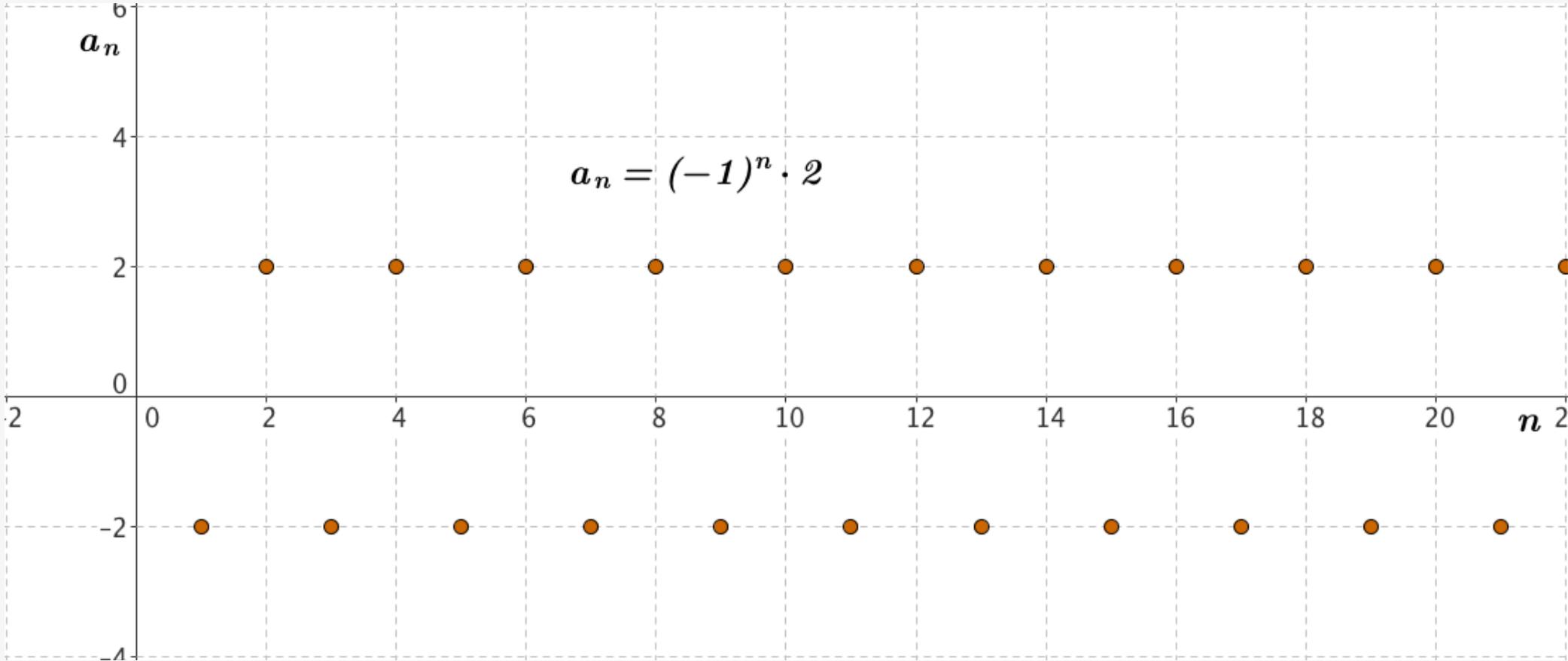


Abb. L-5: Eine nach unten und oben beschränkte Folge

$$\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n 2 \rangle = -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots$$

$$-2 \leq a_n \leq 2, \quad m_I = -2, \quad M_S = 2$$

Beschränkte Folgen: Lösung 6

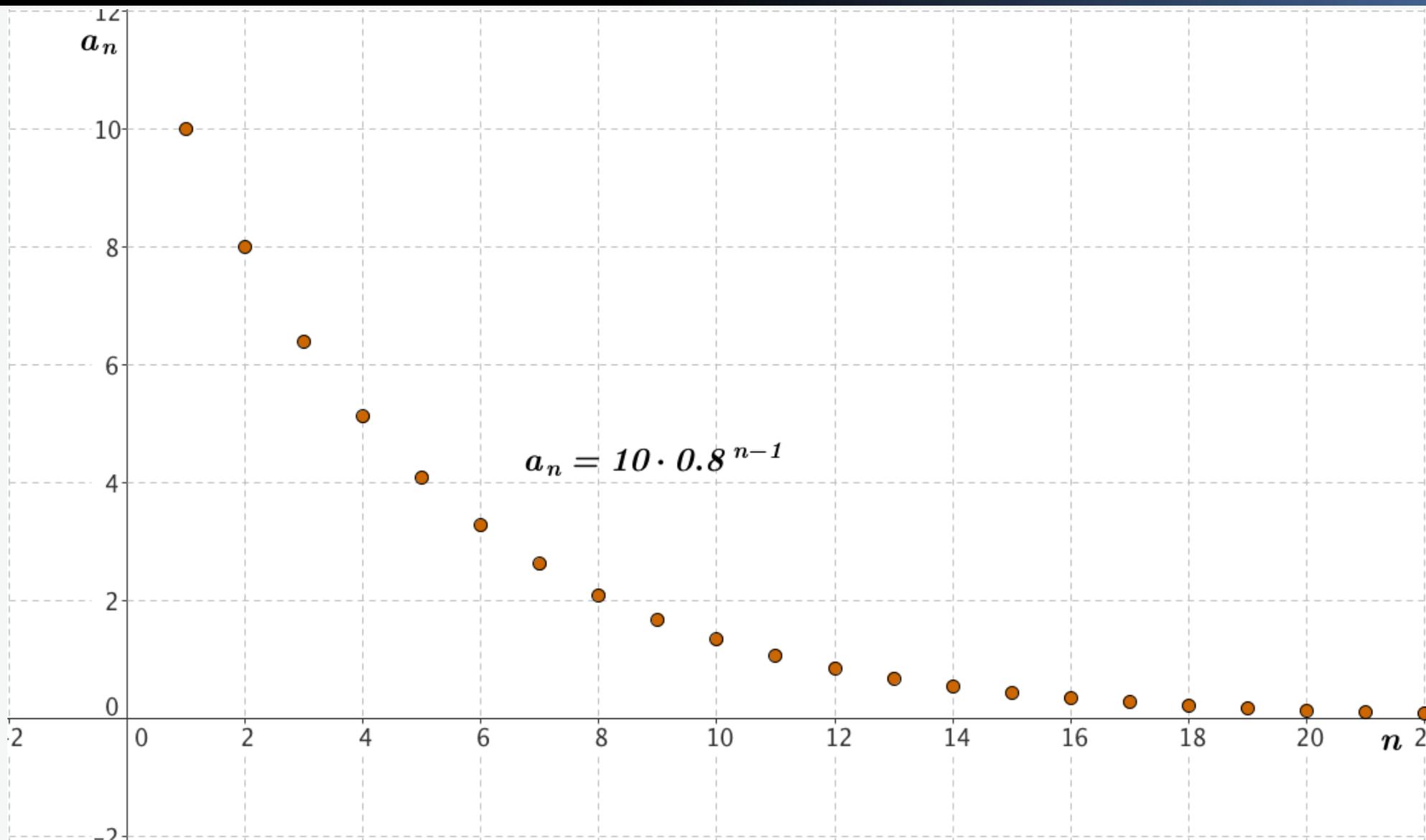


Abb. L-6: Eine nach unten und oben beschränkte Folge

$$\langle a_n \rangle = \langle 10 \cdot (0.8)^{n-1} \rangle = 10, 8, 6.4, 5.12, 4.096, 3.277, \dots$$

$$0 < a_n \leq 10, \quad m_I = 0, \quad M_S = 10$$

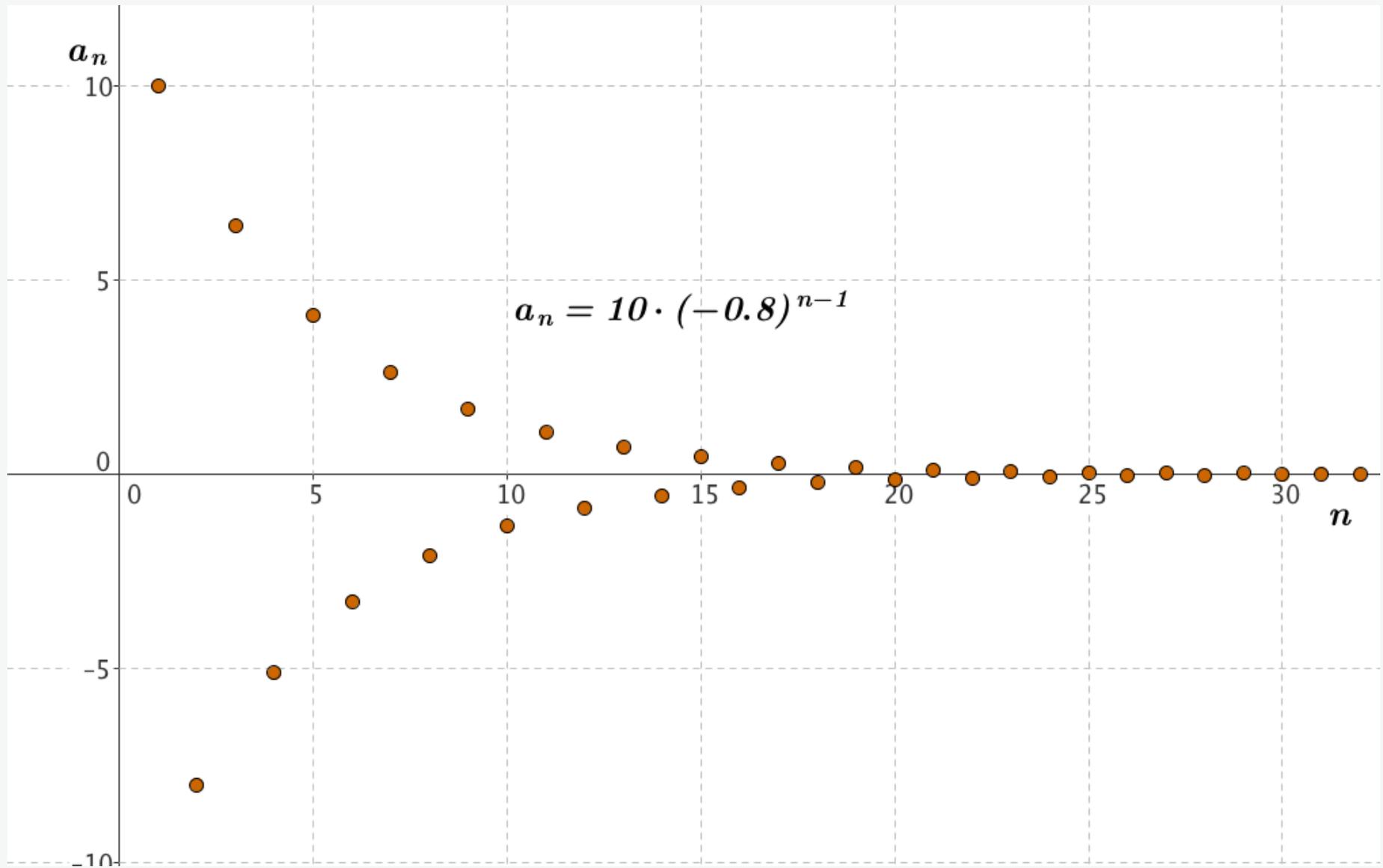


Abb. L-7: Eine nach unten und oben beschränkte Folge

$$\langle a_n \rangle = \langle 10 \cdot (-0.8)^{n-1} \rangle = 10, -8, 6.4, -5.12, 4.096, -3.277, \dots$$

$$-8 \leq a_n \leq 10, \quad m_I = -8, \quad M_S = 10$$



