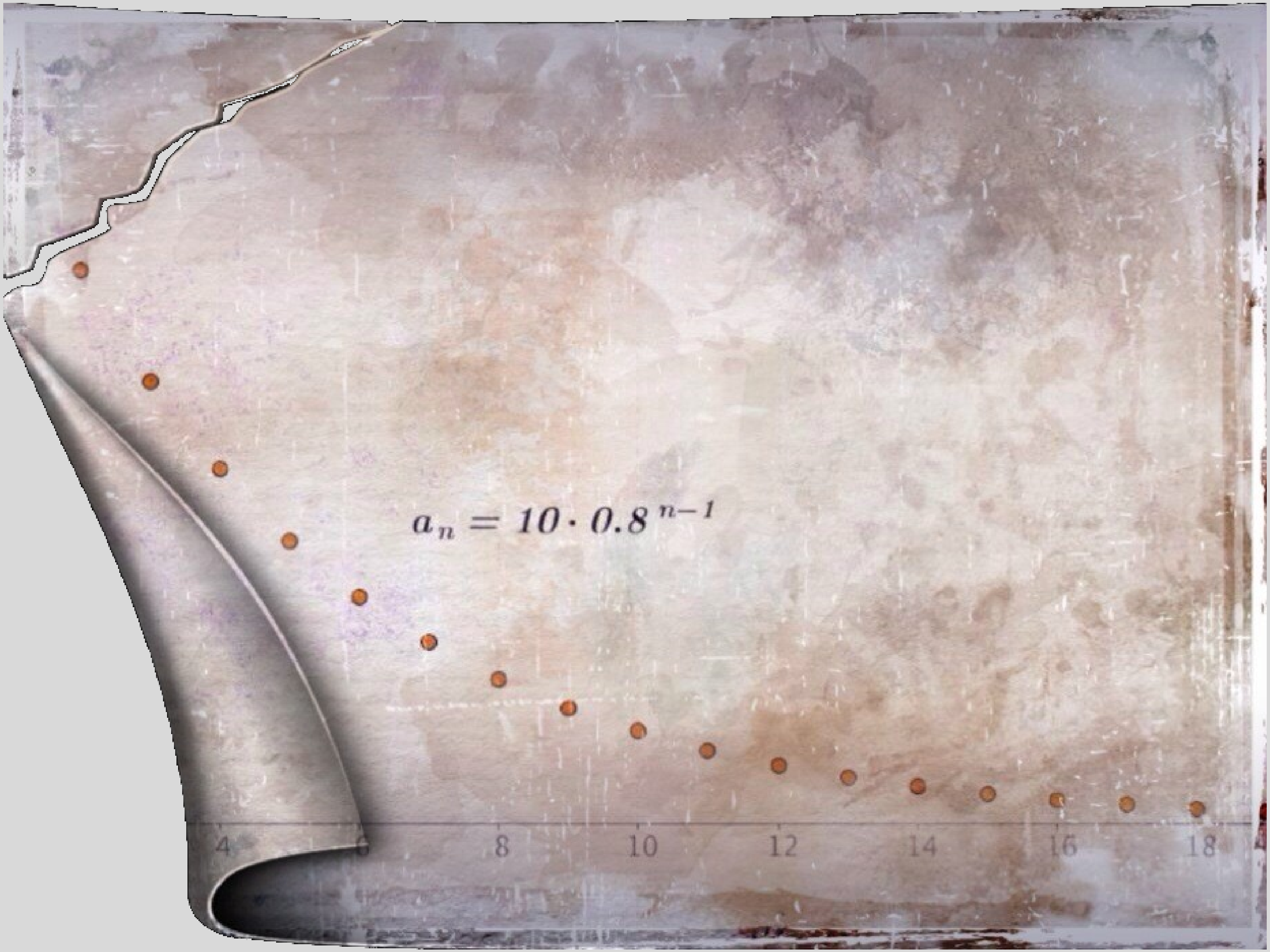

Monotonie einer Folge

Definition: Eine Folge heißt

1) monoton steigend, wenn $a_{n+1} \geqslant a_n$

2) streng monoton steigend, wenn $a_{n+1} > a_n$

3) monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leqslant a_n$

4) streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} < a_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$)

Beispiele:

- Die geometrische Folge aus dem Beispiel über die Weizenkörner auf den Schachbrettfeldern

$$a_n = 2^{n-1}$$

ist eine streng monoton steigende Folge, denn für alle Folgenglieder gilt

$$a_{n+1} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2^{n-1} = a_n$$

- Die Folge $a_n = 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, \ldots$ ist eine monoton steigende Folge.

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass eine Folge mit dem gemeinsamen Glied

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

eine steigende Folge ist.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften der folgenden Folge mit einem gemeinsamen Glied

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}$$

Monotone Folgen: Lösung 1

$$a_n = \frac{n-1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

$$a_{n+1} \geqslant a_n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

Diese Folge ist eine streng monoton steigende Folge. Die Punkte der *x,y*-Ebene, die *n* und den zugehoerigen Folgengliedern entsprechen, liegen auf der Kurve der Funktion $y = (x-1)/x$.

Monotone Folgen: Lösung 1

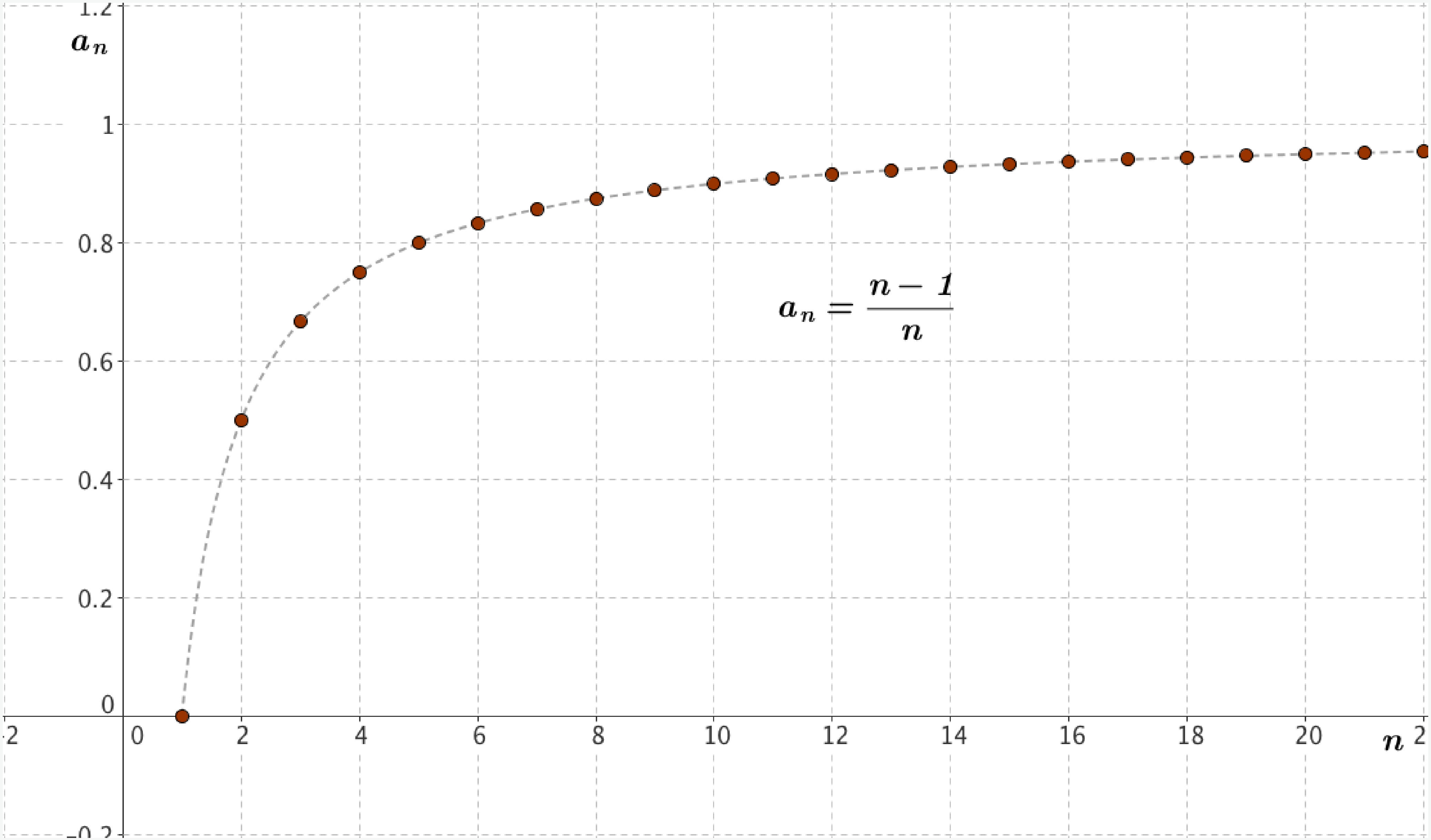

Abb. L1: Die Funktion $y = (x - 1)/x$ für $x \geq 1$ (gestrichelt). Die Punkte entsprechen den ersten Gliedern der Folge $(n - 1)/n$.

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} =$$

$$= \frac{(2n+3)(n+2)-(2n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0$$

Man kann das auch zeigen, indem man zuerst den Folgenterm vereinfacht:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2(n+2-2)+1}{n+2} = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2},$$

und dann die Differenz bildet:

$$a_{n+1} - a_n = \left(2 - \frac{3}{n+3}\right) - \left(2 - \frac{3}{n+2}\right) = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0$$

Diese Folge ist streng monoton steigend.

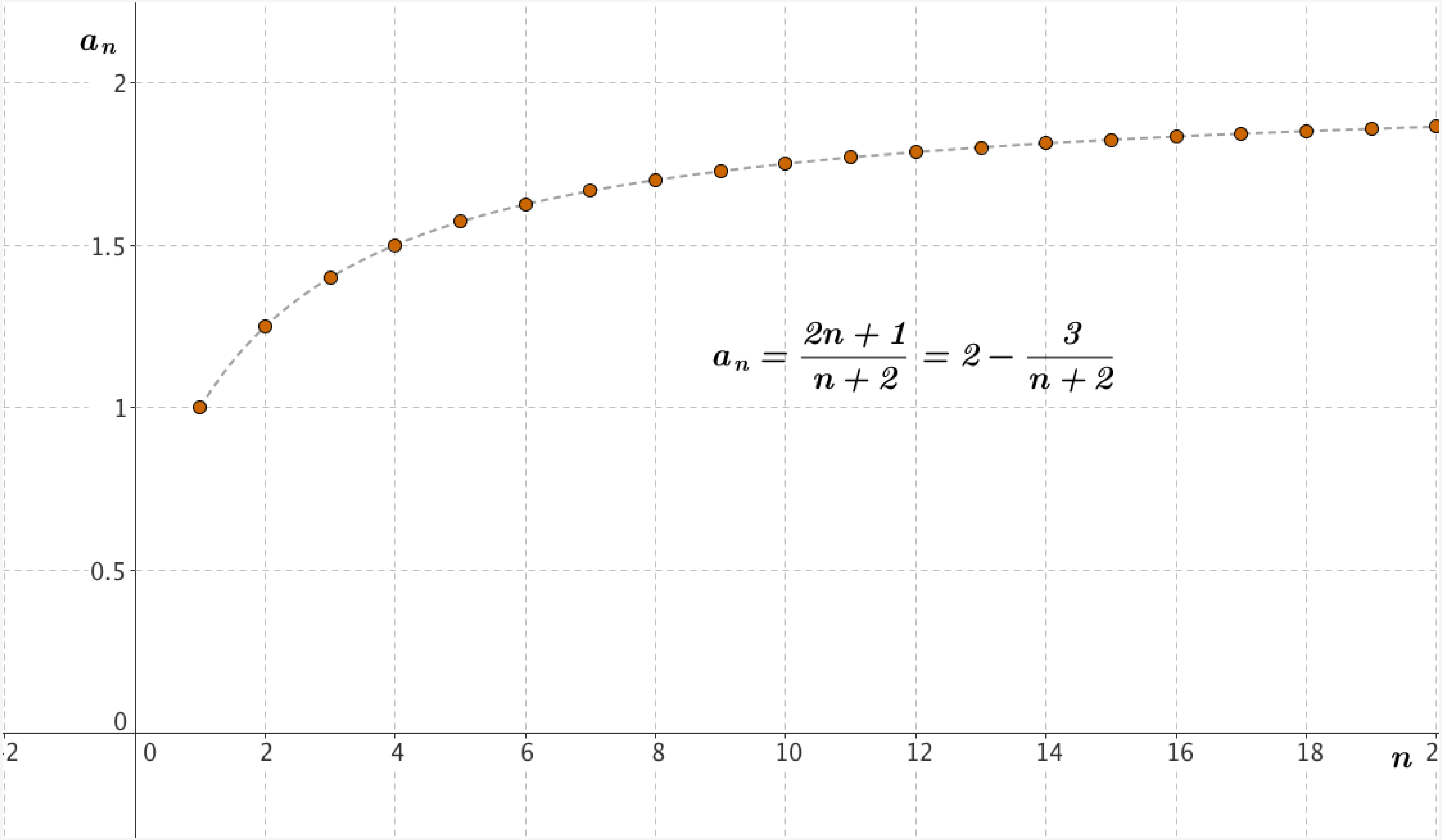

Abb. L2: Die Funktion y =(2x +1)/(x +2) für x ≥ 1 (gestrichelt). Die Punkte entsprechen den ersten Gliedern der Folge (2n +1)/(n +2)

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass eine Folge mit dem gemeinsamen Glied

$$a_n = -(n + 1)$$

eine fallende Folge ist.

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften der folgenden Folge mit einem gemeinsamen Glied

$$a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$$

$$a_n = -\,(n + 1)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-(1 + n + 1)}{-(n + 1)} = \frac{n + 2}{n + 1} = 1 + \frac{1}{n + 1} > 1$$

Da alle Folgenglieder negativ sind, bedeutet diese Ungleichung, dass

$$a_{n+1} < a_n$$

und die Folge eine streng monoton fallende Folge ist.

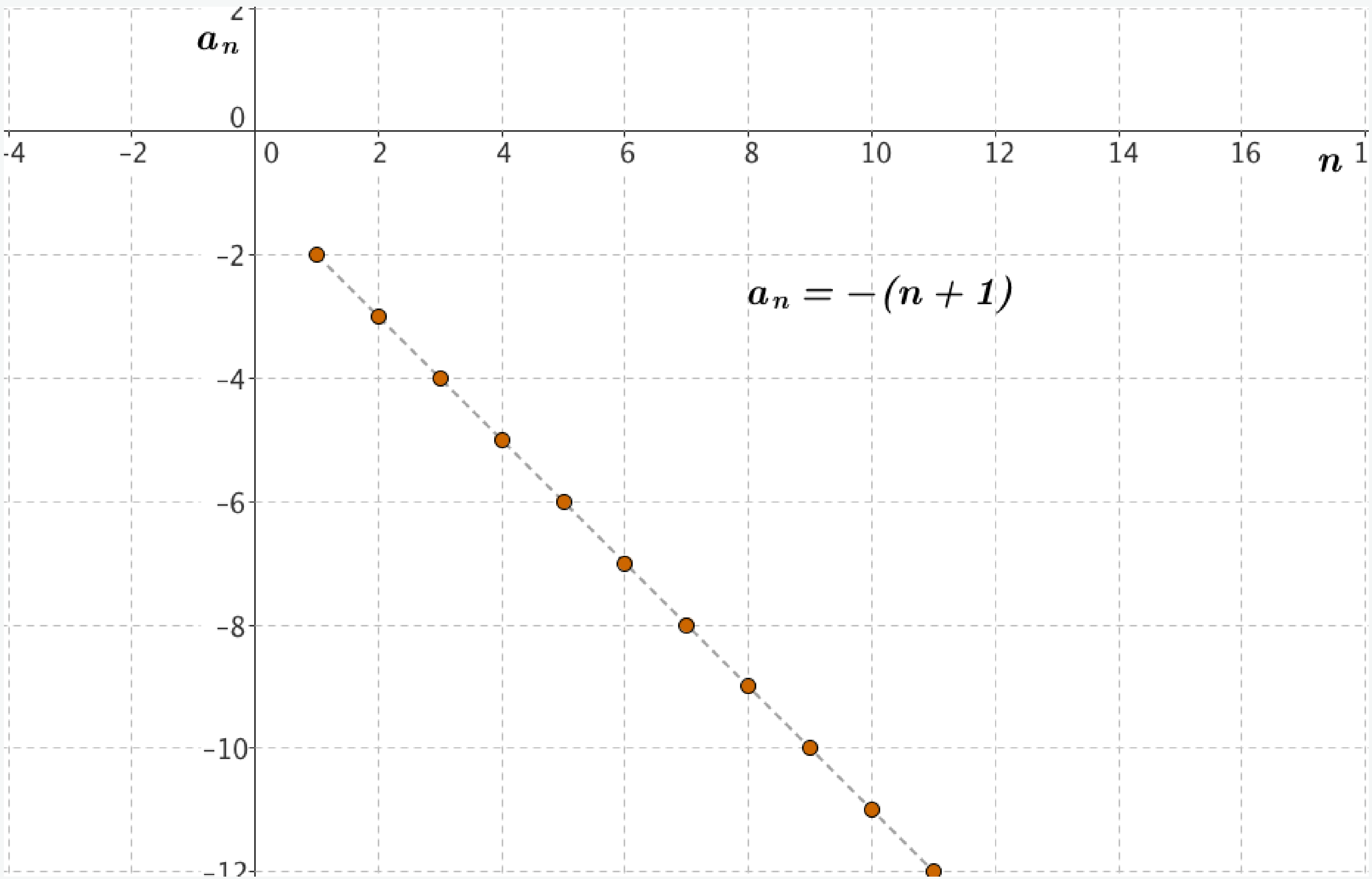

Abb. L3: Die Funktion y =- (x +1) für x ≥ 1 (gestrichelt). Die Punkte entsprechen den ersten Gliedern der Folge - (n +1)

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} =$$

$$= \sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n+2)} - (n+1) - \sqrt{n(n+1)} =$$

$$= \sqrt{(n+1)(n+2)} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt{\frac{n}{n+2}}\right) =$$

$$= \sqrt{(n+1)(n+2)} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}\right) =$$

$$= \sqrt{(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) > 0$$

Folgende Folgen sind streng monoton fallende Folgen:

$$a_n = \frac{n+1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}, \qquad c_n = -\left(n^2 + n + 1\right)$$

Die Folge $1, \ 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}, \ \dots$

ist eine monoton fallende Folge.

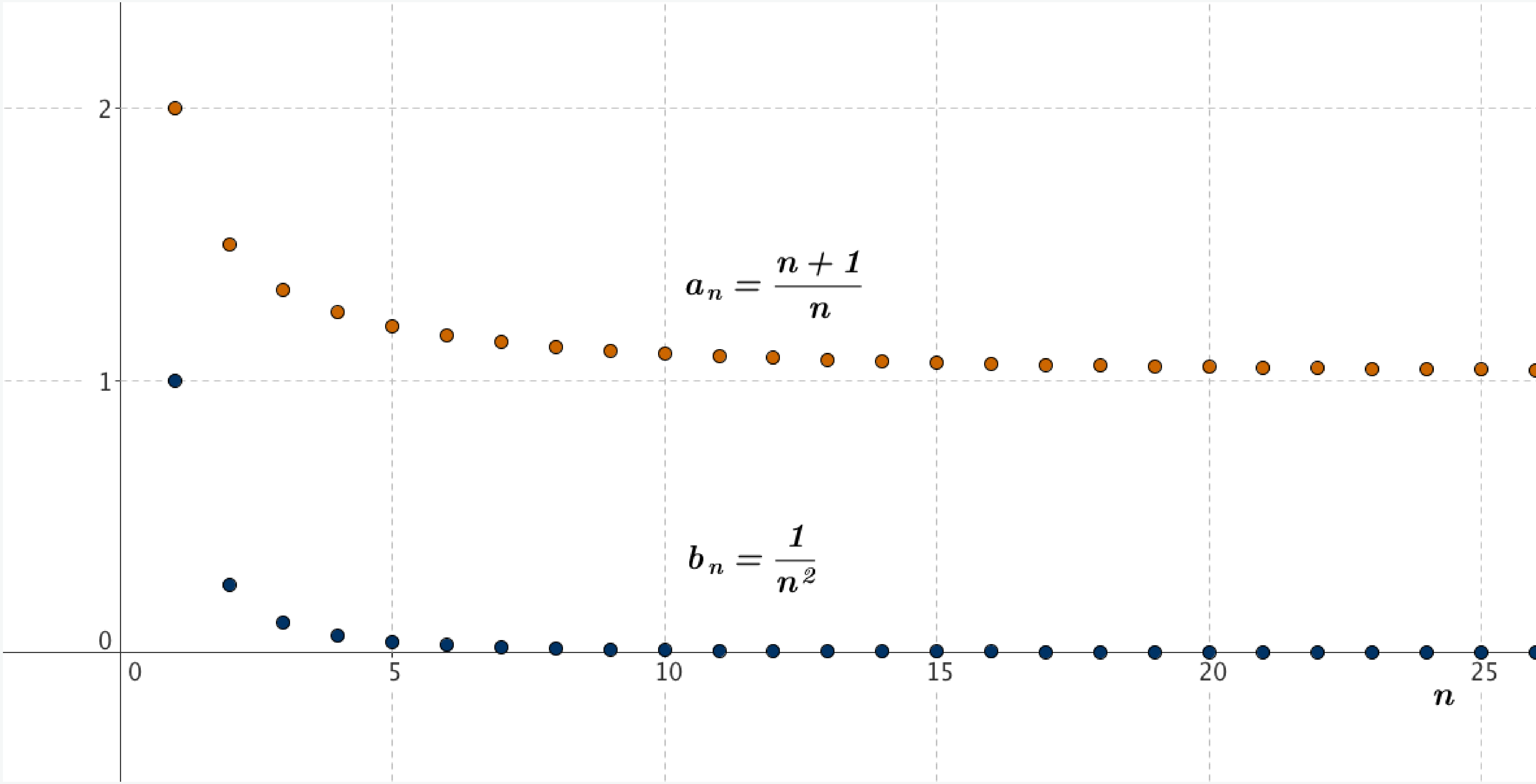

Abb. B1: Zwei streng monoton fallende Folgen

$$a_n = \frac{n+1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

Definition:

Eine Folge heißt alternierend, wenn je zwei aufeinander folgende Folgenglieder stets verschiedenes Vorzeichen haben:

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

Beispiele:

$$a_n = 6, \ -6, \ 6, \ -6, \ 6, \ -6, \ 6, \ \ldots$$

$$\langle \, b_n = (-1)^n \, 2^n \, \rangle = -2, \ 4, \ -8, \ 16, \ -32, \ \ldots$$

$$\langle \, c_n = \frac{(-1)^n}{n} \, \rangle = -1, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ -\frac{1}{5}, \ \ldots$$

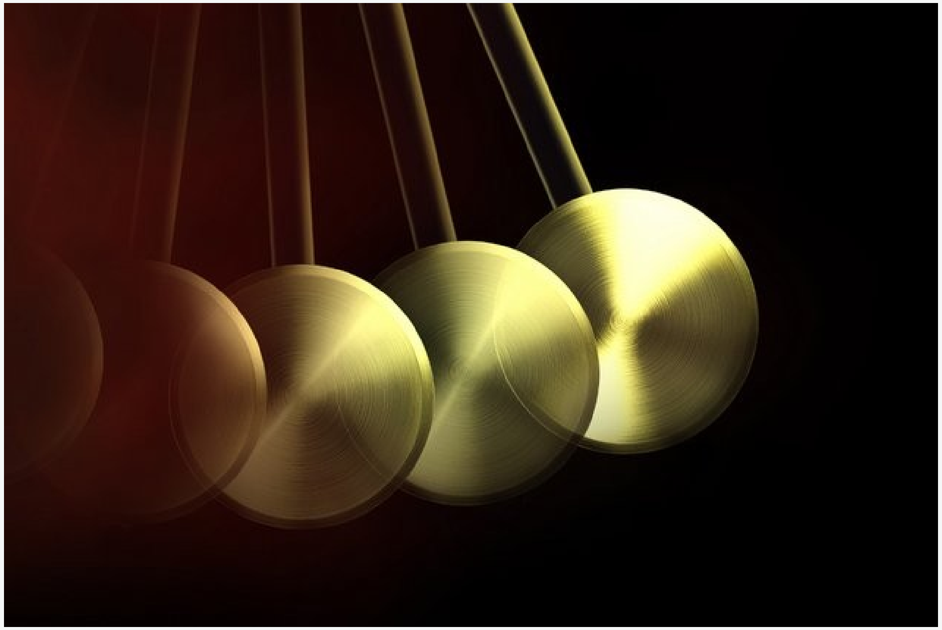

Abb. B2-1: Auslenkung eines Pendels aus der Ruhelage

Ein Pendel werde nach rechts um 10 cm aus seiner Ruhelage entfernt und losgelassen. Die Ausschläge nach beiden Seiten – sie heißen Amplituden – bilden dann eine Folge

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots$$

Wir unterscheiden die rechten und die linken Amplituden, indem wir die linken mit Minuszeichen versehen. Es sind also

$$a_1, \ a_3, \ a_5, \ \dots \ \text{positiv}$$

und

$$a_2, \ a_4, \ a_6, \ \dots \ \text{negativ}$$

Aufgrund von Reibung an der Pendelaufhängung, Luftwiderstand usw. werden die auf a_1 folgenden Amplituden nicht mehr den Betrag der “Anfangsauslenkung” erreichen. Wir nehmen an, dass stets jeweils 80% des Betrags der vorhergehenden Amplitude erreicht werden. Dann können wir die Glieder der Folge auf folgende Weise berechnen

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = 10 \cdot (-0.8) = -8$$

$$a_3 = a_2 \cdot (-0.8) = 10 \cdot (-0.8)^2$$

$$a_4 = 10 \cdot (-0.8)^3$$

$$a_5 = 10 \cdot (-0.8)^4$$

$$a_n = 10 \cdot (-0.8)^{n-1}$$

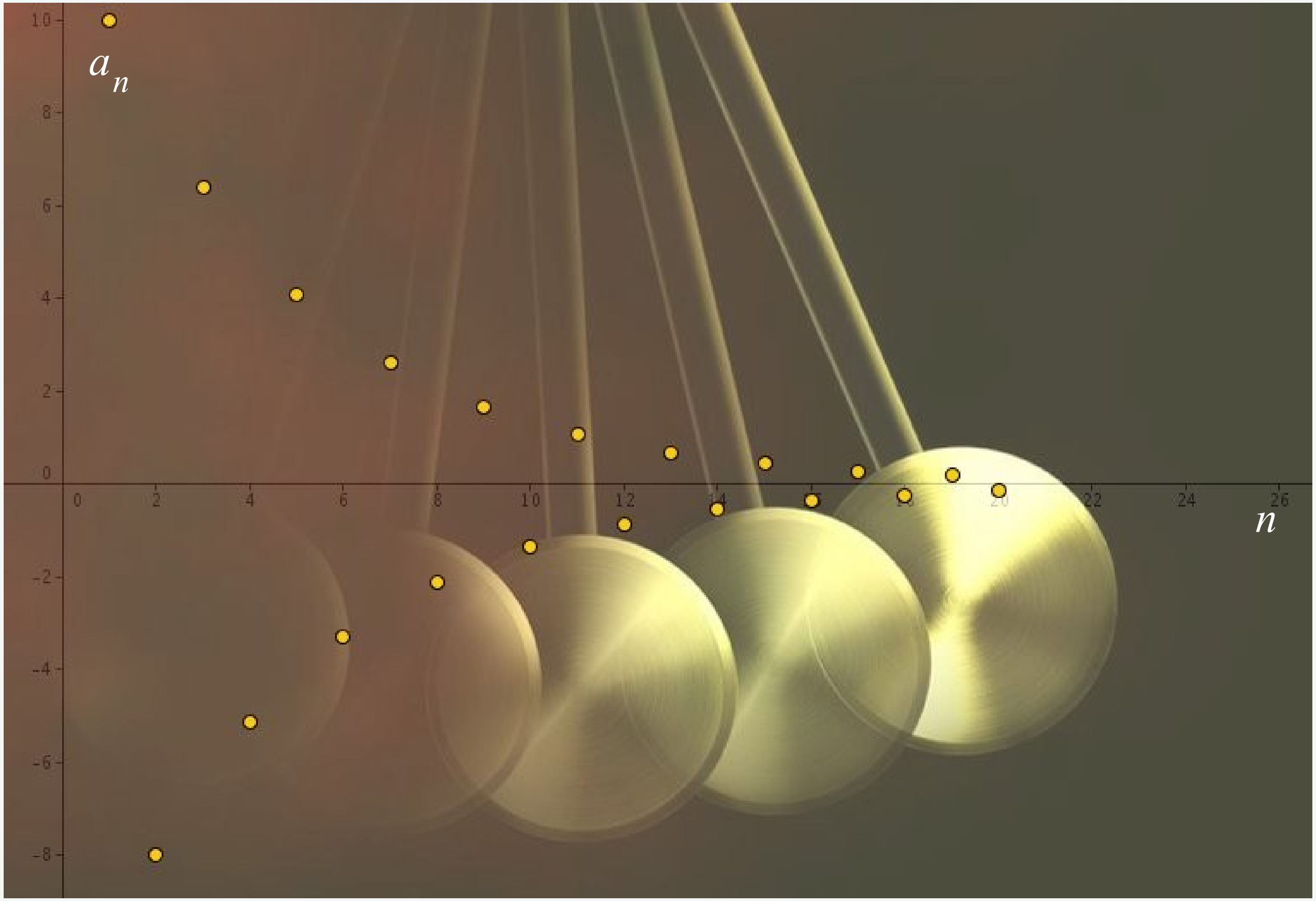

Abb. B2-2: Folge der Pendelausschläge

Betrachten wir die Folgenglieder mit ungeradem Index, also die Pendelausschläge nach rechts, so handelt es sich bei dieser Teilfolge um eine (streng) monoton fallende Folge. Dagegen bildet die Teilfolge der Folgenglieder mit geradem Index, also die Pendelausschläge nach links, eine (streng) monoton steigende Folge.

$$a_1, \quad a_3, \quad a_5, \quad a_7, \quad \ldots$$

$$10, \quad 6.4, \quad 4.096, \quad 2.621, \quad 1.678, \quad 1.074, \ldots$$

$$a_2, \quad a_4, \quad a_6, \quad a_8, \quad \ldots$$

$$-8, \quad -5.12, \quad -3.277, \quad -2.097, \quad -1.342, \ldots$$