Geometrische Folgen

Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

Während bei einer arithmetischen Folge jeweils die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Folgengliedern konstant ist

$$a_{n+1} - a_n = d$$

bleibt bei einer sog. geometrischen Folge für alle n der Quotient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

konstant.

Definition 1:

Eine Folge heißt geometrischen Folge, wenn es eine Konstante gibt

$$q \in \mathbb{R}, \qquad q \neq 0$$

so dass für alle n je zwei aufeinander folgende Folgenglieder die Bedingung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad n \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{R}$$

erfüllen.

Definition 2:

Eine Folge mit einem von Null verschiedenen Anfangsglied ist genau dann eine geometrischen Folge, wenn sie ein Bildungsgesetz der Form

$$a_n = a_1 \, q^{n-1}$$

wobei a_1 das Anfangsglied und q der konstante Quotient der Folge ist $(n \geq 2)$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,, \quad q \in \mathbb{R}$$

Sissa lebte angeblich im dritten oder vierten Jahrhundert n. Chr. in Indien und gilt Legenden zufolge als der Erfinder des Schachspiels beziehungsweise seiner indischen Urform Tschaturanga.

Der indische Herrscher Shihram tyrannisierte seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend. Um die Aufmerksamkeit des Königs, ohne seinen Zorn zu entfachen, auf seine Fehler zu lenken, schuf Sissa ein Spiel, in dem die wichtigste Figur, der König, ohne Hilfe anderer Figuren und Bauern nichts ausrichten kann. Der Unterricht im Schachspiel hat auf Shihram einen starken Eindruck gemacht. Er wurde milder und ließ das Schachspiel verbreiten, damit alle davon davon Kenntnis nähmen. Um sich für die anschauliche Lehre von Lebensweisheit und zugleich Unterhaltung zu bedanken, gewährte er

aus Wikipedia

Abb. 1: Erste Schachfiguren

Sissa einen freien Wunsch. Dieser wünschte sich Weizenkörner: Auf das erste Feld eines Schachbretts wollte er ein Korn, auf das zweite Feld die doppelte Menge, also zwei, auf das dritte wiederum doppelt so viele, also vier und so weiter.

Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung bekam, musste er hören, dass die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet hatten. Wie groß war sein Erstaunen, als nach einigen Tagen der Vorsteher seiner Kornkammer ganz verzweifelt vorsprach und meldete, im ganzen Reich, in der ganzen Welt gäbe es nicht soviel Weizen, um den Wunsch des Weisen zu erfüllen.

aus Wikipedia

Wie viele Weizenkörner sollte Sissa erhalten? Die Gesamtmenge ist die Summe über die Weizenkornmengen der 64 Schachfelder.

Abb. 3: Sissa erfindet das Schach (*künstlerische Darstellung von Thiago Cruz*)

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Lahur_Sessa_by_Thiago_Cruz.jpg&filetimestamp=20080213131704

Die Weizenkornmengen auf den Schachbrettfeldern berechnen sich auf folgende Weise

$$a_1 = 1 , \quad a_{n+1} = 2\, a_n , \quad n = 1, \ldots, 63$$

Für je zwei aufeinander folgende Glieder dieser Folge ist der Quotent konstant

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

Es handelt sich um eine geometrische Folge.

$$a_1 = 1 = 2^0 , \qquad a_2 = 2 \cdot 1 = 2^1 ,$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 2^2 , \qquad a_n = 2^{n-1}$$

Die Gesamtmenge Weizen, die Sissa erhalten sollte, ist also gleich der Summe

$$S_{64} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$$

Sind a und b zwei positive reelle Zahlen, so bezeichnet man die Zahl q, $q^2 = a \cdot b$, als das geometrische Mittel von a und b. Im Folgenden wird gezeigt, dass für jede (beliebige) geometrische Folge die folgende Eigenschaft gilt: "Jedes Folgenglied (außer a_1) einer geometrischen Folge ist das geometrische Mittel ihrer beiden benachbarten Folgenglieder".

$$a_n \quad : a_1, \; a_2, \; a_3, \; \dots, \; a_{n-1}, \; a_n, \; a_{n+1}, \; \dots$$

Laut der Definition einer geometrischen Folge gilt für beliebige benachbarten Folgenglieder

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \Rightarrow \quad a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Jedes Folgenglied einer geometrischen Folge ist das geometrische Mittel ihrer beiden benachbarten Folgenglieder.

Wir bestimmen die n-te Partialsumme einer geometrischen Folge

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n\, q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q$$

$$a_1 q = a_2, \qquad a_2 q = a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1} q = a_n \quad \Rightarrow$$

$$S_n\, q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n q$$

$$S_n\, q - S_n = a_n q - a_1 \quad \Leftrightarrow \quad S_n\,(q-1) = a_n q - a_1 \quad \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} \qquad q \neq 1$$

$$a_n = a_1\, q^{n-1} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1\, q^{n-1} q - a_1}{q-1} = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q-1}$$

Falls $|q| < 1$, kann diese Formel auf folgende Weise dargestellt werden

$$S_n = \frac{a_1\,(1 - q^n)}{1-q}, \qquad q \neq 1, \qquad a_1 \neq 0$$

Jetzt bestimmen wir die Gesamtmenge der Weizenkörner, die der Erfinder des Schachspiels erhalten sollte,

$$S_{64} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 1.84467 \cdot 10^{19}$$

Um eine Vorstellung von dieser Menge Weizenkörner zu machen, nehmen wir an, dass 100 Weizenkörner 1g wiegen und 1 Güterwagen 50 t Weizen fasst. Der Weizen wiegt dann etwa

$$\frac{1.84467 \cdot 10^{19}}{100} \, g = 1.8 \cdot 10^{17} \, g = 1.8 \cdot 10^{11} \, t$$

d.h. 180 Milliarden Tonnen. Zum Transport in Güterwagen wären

$$\frac{1.8 \cdot 10^{11}}{50} = 3.6 \cdot 10^{9}$$

(d.h. 3.6 Milliarden) Güterwagen nötig.

Falls jeder Güterwagen 10 m lang ist, ergibt sich ein Güterwagenzug der Länge

$$3.6 \cdot 10^{9} = 3.6 \cdot 10^{7} \, km$$

Das ist mehr, als die 100-fache Entfernung zwischen Mond und Erde.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der geometrischen Folgen ist die Zinsrechnung.

Zu Beginn eines Jahres wird ein Betrag von 1.000 € auf ein Sparbuch eingezahlt. Der jährliche Zinssatz beträgt 4%. Die Kontostände zu Beginn eines jeden Jahres bilden dann eine geometrische Folge

$$a_1 = 1000$$

Der Kontostand zu Beginn des *2*. Jahres ergibt sich als Summe aus dem ursprünglichen Kontostand und den Zinsen

$$a_2 = a_1 + a_1 \cdot 4\,\% = a_1 + a_1 \cdot \frac{4}{100} = a_1 \left(1 + \frac{4}{100} \right) =$$

$$= a_1 \cdot 1.04 = 1040$$

Entsprechend erhalten wir für die weiteren Kontostände

$$a_3 = a_2 + a_2 \cdot \frac{4}{100} = a_2 \cdot 1.04 = 1040 \cdot 1.04 = 1081.6$$

$$a_4 = a_3 \cdot 1.04 = 1124.864$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot 1.04$$

Diese geometrische Folge lässt sich wie folgt beschreiben

$a_1 = 1000$ – das Anfangsglied der Folge

$q = 1.04$ – der konstante Quotient

Bei gleich bleibenden Zinssatz steht nach 10 Jahren ein Kapital von 1480.24 € zur Verfügung

$$a_{11} = a_{10} \cdot 1.04 = a_1 \cdot 1.04^{10} = 1000 \cdot 1.48024 \simeq 1480.24$$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie das 8. Glied der geometrischen Folge

$1, \quad 3, \quad 9, \quad 27, \; . . .$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie das 10. Glied der geometrischen Folge

$$2, \quad -\sqrt{2}\,, \quad 1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad \ldots$$

Aufgabe 3:

Das dritte Glied einer geometrischen Folge ist gleich 8, das fünfte Glied gleich 32. Bestimmen Sie das zehnte Glied.

$b_3 = 8, \qquad b_5 = 32, \qquad b_{10} = \,?$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Summe der ersten acht Glieder der geometrischen Folge

$b_n = 3 \cdot 2^n$

Lösung 1: $\langle a_n \rangle = 1, \ 3, \ 9, \ 27, \ \ldots, \quad a_1 = 1, \quad q = 3$

$$a_n = a_1 \, q^{n-1}, \qquad a_8 = a_1 \, q^7 = 1 \cdot 3^7 = 2187$$

Lösung 2: $\langle a_n \rangle = 2, \ -\sqrt{2}, \ 1, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ldots, \quad a_1 = 2, \quad q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$a_{10} = a_1 \, q^9 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^9 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^8} \right) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2} \cdot 2^4} = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2^3} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Lösung 3: $b_3 = 8, \quad b_5 = 32, \quad b_4^2 = b_3 \cdot b_5 = 8 \cdot 32 = 256 \quad \Rightarrow$

$$(b_4)_1 = 16, \quad (b_4)_2 = -16, \quad q_1 = \frac{(b_4)_1}{b_3} = 2, \quad q_2 = \frac{(b_4)_2}{b_3} = -2$$

$$(b_{10})_1 = b_3 \cdot q_1^7 = 8 \cdot 2^7 = 1024$$

$$(b_{10})_2 = b_3 \cdot q_2^7 = 8 \cdot (-2)^7 = -1024$$

Lösung 4:

$$b_n = 3 \cdot 2^n \quad : b_1 = 3 \cdot 2 = 6\,, \quad b_2 = 3 \cdot 2^2 = 12\,, \quad q = \frac{b_2}{b_1} = 2$$

$$S_n = b_1 \, \frac{q^n - 1}{q - 1}\,, \qquad S_8 = 6 \, \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 6 \cdot \left(2^8 - 1\right) = 1530$$